



ТОМСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ



ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Надежность технических систем

2018

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ



ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ



- отказы ТС*
- ошибки операторов ТС
- внешние негативные воздействия

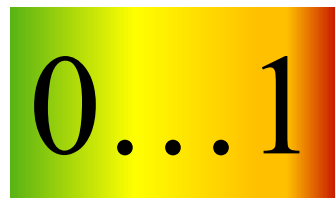


Отказ – это нарушение работоспособности*

***Работоспособность – состояние ТС, при котором она способно выполнять свои функции с параметрами, установленными требованиями технической документации.*



- отказ ТС;
- аварийный исход;
- образование поражающих факторов;
- поражение объектов воздействия;
- вторичные поражающие факторы;
- воздействия вторичных факторов;
- поражение.



Вероятность

Основная причина – отказ.

Отказ – случайное события.

Параметры, описывающие случайные события, – случайные величины.

Случайное событие – событие, которое может произойти или не произойти.

Случайная величина – величина, которая при многократных равноточных измерениях (сделанных в одних условиях) может принимать различные числовые значения.



**В основе обработки случайных величин
лежат знания
вероятностных закономерностей случайных событий,
являющихся предметом
теории вероятностей.**

Данные знания позволяют построить закономерности изменения численных характеристик, описывающих случайные события.

Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях науки, техники и технологии:

- теория автоматического управления,
- **теория надежности,**
- теория ошибок наблюдений,
- теория массового обслуживания

и т.д.

Событие

Достоверное событие – событие, которое произойдет при соблюдении определенных условий.

Например, отказ.

Невозможное событие – событие, которое заведомо не может произойти при заданных условиях.

События независимые – наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого. В противном случае события – *зависимые*.

Не совместные (совместные) события – события, появление одного из которых исключает (не исключает) возможности появления другого.

Пример, отказ и безотказная работа.

Противоположное событие $\bar{A}$ относительно некоторого события A – событие ($\bar{A}$), состоящее в не появлении выбранного события A .

Например, отказ и безотказная работа.

Полная группа событий – совокупность событий, при которой в результате действий должно произойти хотя бы одно из событий этой совокупности.

Например, отказ и безотказная работа.

Генеральная совокупность N – полный набор всех возможных значений, которые может принимать случайная физическая величина.

Выборка объема – набор n значений величин x_i , полученный из генеральной совокупности N .

Можно понимать:

- под выборкой – реально рассматриваемую совокупность значений $(x_1, x_2, \dots, x_i)$ случайной величины X ;
- под генеральной совокупностью – гипотетически существующую совокупность возможных значений.



**Цель обработки набора значений величин x_i выборки –
определение закономерностей, описывающих
генеральную совокупность.**

Частотное определение вероятности

Абсолютная частота случайного события A – количество m проявления данного события, зафиксированного в объеме данных n .

Относительная частота случайного события A :

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число появления события A в серии испытаний;

n – общее число проведенных одинаковых испытаний.



При малом количестве испытаний в серии значения W для разных серий различны – W_k

$$W_k = \frac{m_k}{n}.$$

При большом числе испытаний значения появления события W_k в различных сериях отличаются друг от друга незначительно

$$W_1 = \frac{m_1}{n} \approx W_2 = \frac{m_2}{n} \approx \dots W_k = \frac{m_k}{n},$$

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = P,$$

где P – вероятность появления случайного события A .



Из определения вероятности вытекают свойства:

- вероятность случайного события есть положительное число

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- вероятность достоверного события

$$P(A)=1.$$

- вероятность невозможного события

$$P(A)=0.$$



Теорема сложения вероятностей

Если события A и B совместны, то вероятность появления одного из них равна сумме их вероятностей минус вероятность их одновременного появления

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Вероятность появления одного из двух несовместных событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Сумма вероятностей двух несовместных противоположных событий, образующих полную группу

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Теорема умножения вероятностей

- зависимые события:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B)$$

Условная вероятность события A $P(A/B)$ – вероятность события A , вычисленная в предположении, что событие B произошло

- независимые события:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Функция распределения

Многократные равноточные измерения физической величины – выборка x_i .

Истинное значение x_0 измеряемой величины X – неизвестно.

Область значений разбивается на равные интервалы Δx .

Определяется количество измерений, попавших в каждый интервал: $m_1, m_2, \dots, m_k$.



Для каждого интервала получим значения:

- абсолютной частоты – $m_1, m_2, \dots, m_k$;
- относительной частоты:

$$W_k = \frac{m_k}{n},$$

где k – порядковый номер интервала;

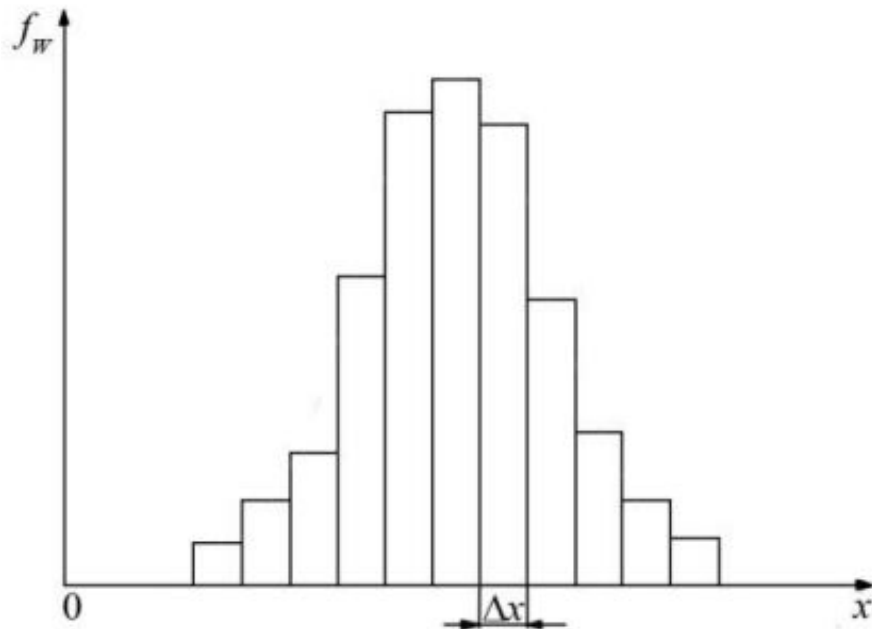
- плотности относительной частоты

$$f_k(x) = \frac{m_k}{\Delta x \cdot n},$$



Гистограмма распределения по осям:

- абсцисс – интервалы Δx ,
- ординат – значения m_i , W_i или f_W .



Для каждого числа x в диапазоне изменения случайной величины X существует определенная вероятность $P(X < x)$ того, что X не превышает значения x :

$$F(x) = P(X < x)$$

Вероятность этого события называют *функцией распределения*:

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Показывает, какие значения случайной величины наиболее вероятны.



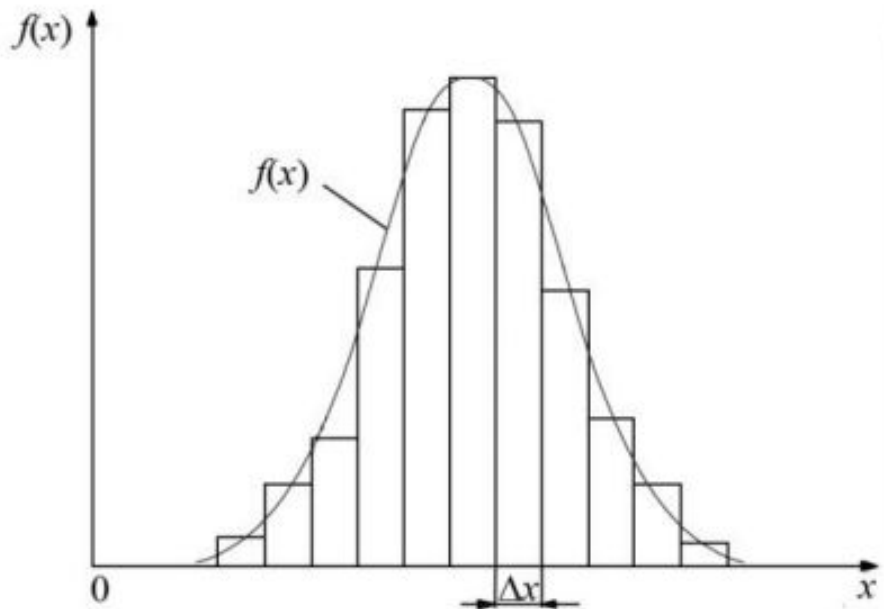
Плотность вероятности

Находится при условии:

- число интервалов $k \rightarrow \infty$,
- длина интервала $\Delta x \rightarrow 0$.

Плотность вероятности –
производная от функции
распределения:

$$f(x) = \frac{P(x)}{dx} = \frac{F(x)}{dx}.$$



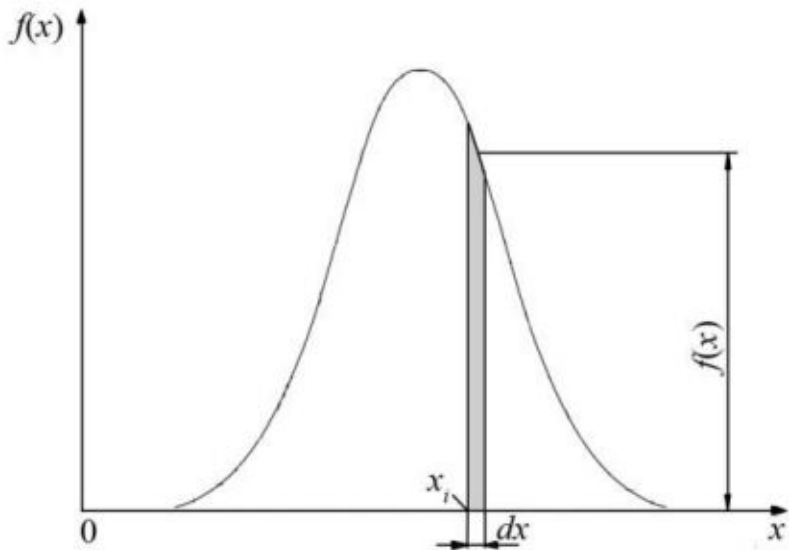
Плотность вероятности (площадь под кривой в интервале $x \in [x_i, x_i + dx]$) позволяет вычислить вероятность попадания случайной величины в данный интервал.

Функция распределения:

$$F(x) = \int_{x_i}^{x_i+dx} f(x) dx.$$

Для интервала
бесконечной длины

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$





В теории надежности за случайную величину обычно принимают время работы изделия (время до возникновения отказа):

$$x \rightarrow t: F(x) \rightarrow F(t), f(x) \rightarrow f(t)$$

Во многих случаях нет необходимости пользоваться функциями $F(t)$ или $f(t)$, достаточно знать числовые характеристики этих кривых.



Числовые характеристики

В теории надежности наиболее распространены:

- среднеарифметическое значение;
- математическое ожидание;
- дисперсия;
- среднеквадратичное отклонение.

Случайная величина:

- дискретная;
- непрерывная.



Математическое ожидание – наиболее вероятное значение случайной величины:

- для дискретных случайных величин

$$M(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i;$$

- для непрерывных случайных величин

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Дисперсия – мера отклонения случайной величины X от ее математического ожидания $M(x)$:

- для дискретных случайных величин

$$D(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(x))^2 \cdot p_i;$$

- для непрерывных случайных величин

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - M(x))^2 \cdot f(x) dx$$

Среднеквадратичное отклонение характеризует рассеяние случайной величины:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$$



На практике $M(x)$ и $D(x)$ случайной величины можно оценить только на основе выборки из конечного числа измерений случайной величины:

- выборочное среднее арифметическое значение случайной величины

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i;$$

- исправленное выборочное среднеквадратическое значение случайной величины

$$D(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$



Для оценки

- $M(x)$ кроме $\bar{x}$ могут использоваться:
 - медиана – значение, при котором площади под кривой справа и слева от медианы равны;
 - мода – значение, в котором плотность вероятности наибольшая либо (для дискретных) наиболее часто встречающееся значение
- дисперсии – размах:

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Законы распределения случайных величин

Закон распределения случайной величины – функциональная зависимость между возможными значениями случайной величины и соответствующим им вероятностям.

Наиболее полно описываются числовыми характеристиками, функцией распределения и плотностью вероятности.



Наибольшее распространение получили законы:

□ для дискретных случайных величин:

- биномиальный закон;
- закон Пуассона;

□ для непрерывных случайных величин:

- нормальный закон и логарифмически-нормальное;
- закон Вейбулла-Гнеденко;
- экспоненциальный закон;
- гамма-распределение;
- Рэля.

Закон Пуассона

Описывает закономерность появления случайных отказов в сложных системах.

Случайная величина X распределена по закону Пуассона, если вероятность того, что эта величина примет определенное значение m , выражается:

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

λ – параметр распределения (ожидаемое количество появлений значения m)



Параметр распределения

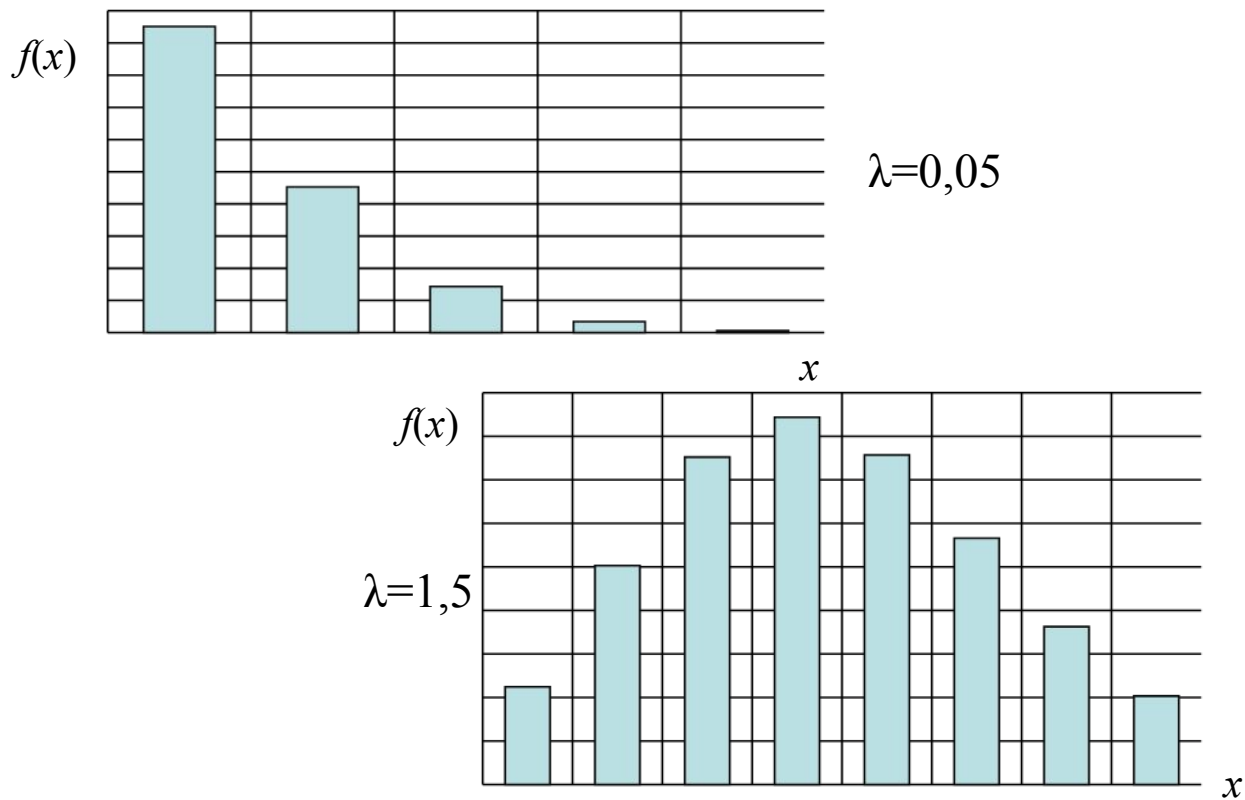
$$\lambda = np,$$

где n – общее количество испытаний;

p – вероятность появления ожидаемого события (отказа).

Математическое ожидание и дисперсия

$$M(x) = D(x) = \lambda$$





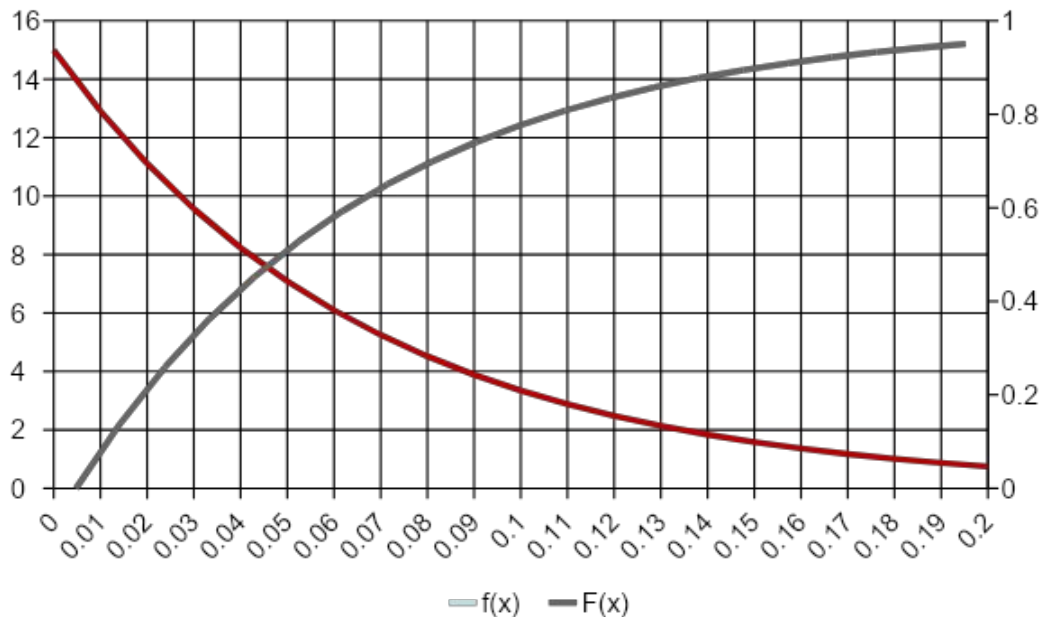
Экспоненциальный закон

Основной закон, т.к. описывает закономерность появления отказов в период нормальной эксплуатации изделий: постепенные отказы еще не проявились и надежность характеризуется внезапными отказами.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Математическое ожидание и дисперсия

$$M(x) = \frac{1}{\lambda} \qquad D(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$



Графики функции распределения $F(x)$ и плотности вероятности $f(x)$ при $\lambda=15$

Нормальный закон

Используют для описания постепенных отказов, когда распределение времени безотказной работы вначале имеет низкую плотность, затем максимальную и далее плотность снижается.

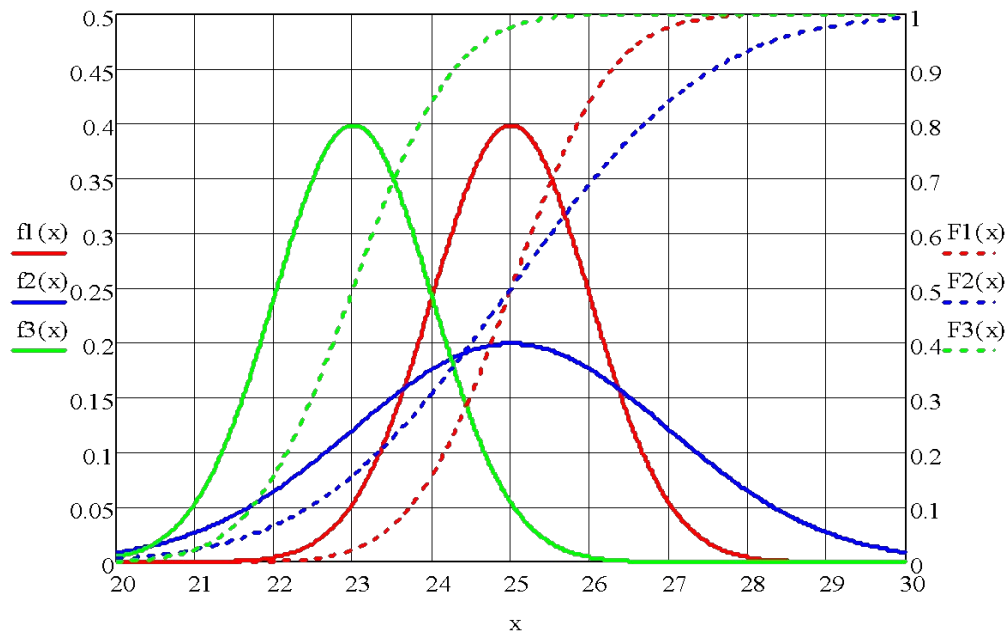
Плотность вероятности и функция распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

где m – математическое ожидание, мода, медиана;

σ – стандартное отклонение.

a и b – пределы изменения значений величины X .



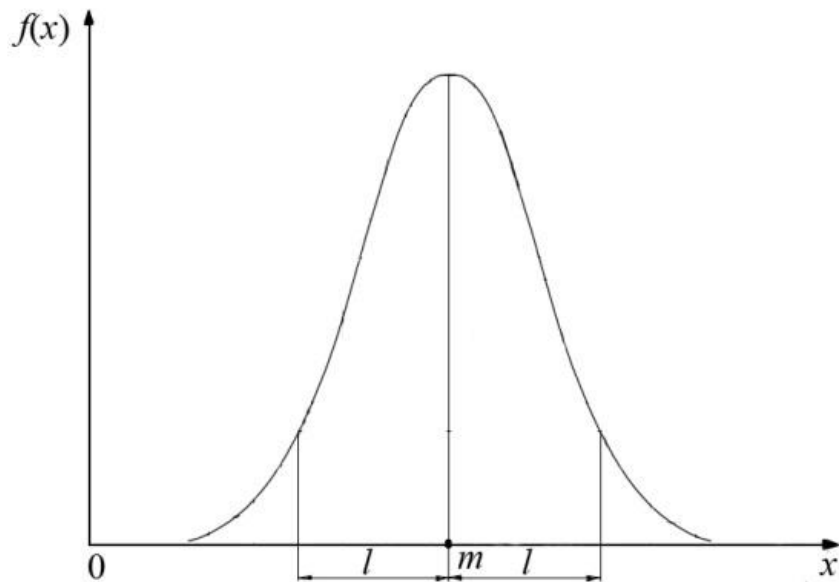
Графики функции распределения $F(x)$ и плотности вероятности $f(x)$:
 $m=25, \sigma=1$ ($f1(x), F1(x)$); $m=25, \sigma=2$ ($f2(x), F2(x)$); $m=23, \sigma=1$ ($f3(x), F3(x)$)

Математическое ожидание и дисперсия

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx;$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (M(x) - x)^2 f(x)dx.$$

Часто приходится вычислять
вероятность того, что значение
случайной величины X попадает в
интервал $(m - l, m + l)$



Вероятность, с которой в условиях данного эксперимента полученные экспериментальные данные можно считать надежными либо достоверными, называют **доверительной вероятностью** (надежностью)

Интервал $x \in [-l, +l]$, соответствующий доверительной вероятности, называется **доверительным интервалом**.

Вероятность попадания значения случайной величины X в интервал $(m - l, m + l)$, выраженный через среднеквадратичное отклонение σ :

Правило трех сигм

Интервал	Вероятность
$m - \sigma \leq x \leq m + \sigma$	68,3%
$m - 2\sigma \leq x \leq m + 2\sigma$	95,5%
$m - 3\sigma \leq x \leq m + 3\sigma$	99,7%

Вероятность того, что случайная величина отклонится от своего $M(x)$ ожидания на величину, большую чем утроенное σ , практически равна нулю (0,3%).

Закон Вейбулла-Гнеденко

Универсальный – при соответствующих значениях переходит в нормальное, экспоненциальное и другие.

Закон удовлетворительно описывает:

- разброс усталостной прочности стали, пределов ее упругости;
- наработку до отказа подшипников, элементов радиоэлектронной аппаратуры,
- надежность деталей и узлов машин, в частности автомобилей, а также для оценки надежности машин в процессе их приработки

Функция распределения

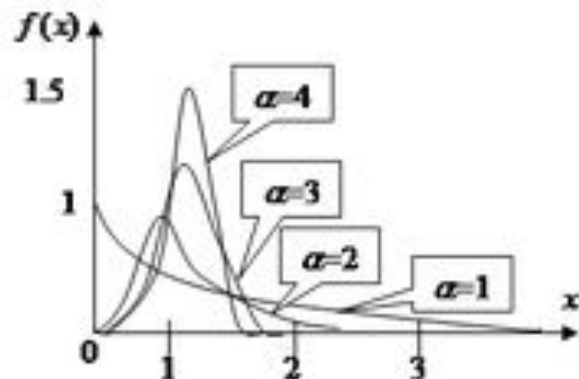
$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x^\alpha},$$

α – параметр формы (определяется подбором в результате обработки экспериментальных данных);

λ – параметр масштаба

плотность вероятности

$$f(x) = \lambda \alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^\alpha},$$





ТОМСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ



ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Надежность технических систем

2018