

Лекция № 9

ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАБОТЫ КОМПЬЮТЕРА

Логические основы работы компьютера

Алгеброй логики называется аппарат, который позволяет выполнять действия над высказываниями.

Высказывание – это предложение, относительно которого имеет смысл говорить истинно оно или ложно.

Высказывания могут быть представлены с помощью математических, химических и прочих знаков.

- Алгебра логики = алгебра Буля = булева алгебра (англ. математик Джордж Буль).
- Высказывания обозначают прописными латинскими буквами: A , B , X , Y .
- Три основные логические операции с высказываниями: сложение, умножение, отрицание.
- Определены аксиомы (законы) алгебры логики для выполнения этих операций.
- Действия, которые производятся над высказываниями, записываются в виде *логических выражений*.

Алгебра логики рассматривает высказывания не с точки зрения их содержания, а с точки зрения их истинности или ложности.

Высказывание может принимать только два значения:

- ИСТИНА (обозначим 1)
- ЛОЖЬ (обозначим 0)

Логические выражения могут быть:

- *Простое логическое выражение* состоит из одного высказывания и не содержит логические операции (два результата — либо «истина», либо «ложь»).
- *Сложное логическое выражение* содержит высказывания, объединенные логическими операциями (содержит аргументы, которыми являются высказывания).

В качестве основных логических операций в сложных логических выражениях используются следующие:

- *НЕ* (логическое отрицание, инверсия);
- *ИЛИ* (логическое сложение, дизъюнкция);
- *И* (логическое умножение, конъюнкция).

- Логическое отрицание является одноместной операцией, так как в ней участвует одно высказывание.
- Логическое сложение и умножение — двуместные операции, в них участвует два высказывания.

Существуют и другие операции (например, операции следования и эквивалентности), правила работы которых можно вывести на основании основных операций.

Все операции алгебры логики определяются *таблицами истинности* значений.

Таблица истинности определяет результат выполнения операции для всех возможных логических значений исходных высказываний.

Количество вариантов, отражающих результат применения операций, зависит от количества высказываний в логическом выражении.

Таблица истинности

- одноместной логической операции состоит из двух строк: два различных значения аргумента — «истина» (1) и «ложь» (0) и два соответствующих им значения функции, в таблице истинности;
- двуместной логической операции — четыре строки: 4 различных сочетания значений аргументов — 00, 01, 10 и 11 и 4 соответствующих им значения функции.

Операция «НЕ» — логическое отрицание (инверсия)

применяется к одному аргументу, в качестве которого может быть и простое, и сложное логическое выражение.

Результатом операции «НЕ» является следующее:

- если исходное выражение истинно, то результат его отрицания будет ложным;
- если исходное выражение ложно, то результат его отрицания будет истинным.

Операция «НЕ»

- Для операции отрицания «НЕ» приняты следующие условные обозначения: $\neg A$; not A.
- Результат операции отрицания «НЕ» определяется следующей таблицей истинности:

A	$\neg A$
ложь	истина
истина	ложь

или

A	$\neg A$
0	1
1	0

Примеры отрицания

1. Высказывание «Земля вращается вокруг Солнца» истинно. Высказывание «Земля не вращается вокруг Солнца» ложно.
2. Высказывание «Уравнение $y = 4x + 3$ в промежутке $-2 < x < 2$ не имеет корней» ложно. Высказывание «Уравнение $y = 4x + 3$ в промежутке $-2 < x < 2$ имеет корень» истинно.
3. «4 — не простое число» истинно.

Принцип работы переключателя настольной лампы таков: если лампа горела, переключатель выключает ее, если лампа не горела — включает ее (электрически аналог операции отрицания).

Операция «ИЛИ» – логическое сложение (дизъюнкция, объединение) выполняет функцию объединения двух высказываний, в качестве которых может быть и простое, и сложное логическое выражение.

Высказывания, являющиеся исходными для логической операции, называют аргументами.

Результатом операции «ИЛИ» является выражение, которое будет истинным тогда и только тогда, когда истинно будет хотя бы одно из исходных выражений.

Операция «ИЛИ»

Результат операции «ИЛИ» определяется следующей таблицей истинности:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Применяемые обозначения: A или B; $A \vee B$; A or B.

Результат операции «ИЛИ» истинен, когда истинно A, либо истинно B, либо истинно и A, и B одновременно, и ложен тогда, когда аргументы A и B — ложны.

Примеры логического сложения

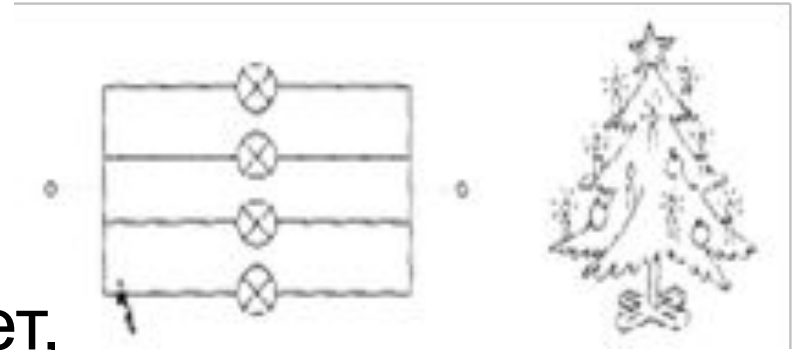
1. Рассмотрим высказывание «В библиотеке можно взять книгу или встретить знакомого». Это высказывание формально можно представить так: $C = A \vee B$, где высказывание A — «В библиотеке можно взять книгу», а B — «В библиотеке можно встретить знакомого». Объединение этих высказываний при помощи операции логического сложения означает, что события могут произойти как отдельно, так и одновременно.

Примеры логического сложения

2. Рассмотрим высказывание «Знания или везение — залог сдачи экзаменов». Успешно сдать экзамен может тот, кто все знает, или тот, кому повезло (например, вытянут единственный выученный билет), или тот, кто все знает и при этом выбрал «хороший» билет.

Примеры логического сложения

3. Кто хоть однажды использовал елочную гирлянду с параллельным соединением лампочек, знает, что гирлянда будет светить до тех пор, пока цела хотя бы одна лампочка.



Логическая операция «ИЛИ» схожа с работой подобной гирлянды, ведь результат операции ложь только в одном случае — когда все аргументы ложны.

Операция «И» – логическое умножение (конъюнкция)

выполняет функцию пересечения двух высказываний (аргументов), в качестве которых может быть и простое, и сложное логическое выражение.

Результатом операции «И» является выражение, которое будет истинным тогда и только тогда, когда истинны оба исходных выражения.

Операция «И»

Результат операции «И» определяется следующей таблицей истинности:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Применяемые обозначения: A и B; $A \wedge B$; A and B.

Результат операции «И» истинен тогда и только тогда, когда истинны одновременно высказывания A и B, и ложен во всех остальных случаях.

Примеры логического умножения

1. Рассмотрим высказывание «Учитель должен быть умным и справедливым». Это высказывание формально можно представить так: $C - A \wedge B$, где высказывание A — «Учитель должен быть умным», а B — «Учитель должен быть справедливым». Объединение этих высказываний при помощи операции логического умножения означает, что учитель должен быть одновременно и умным, и справедливым.

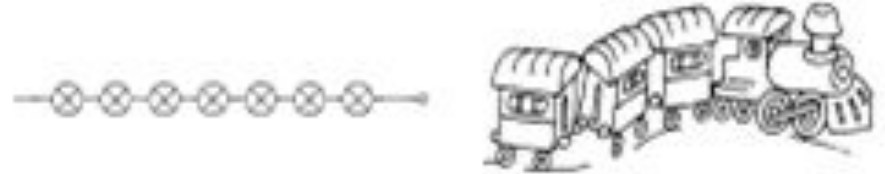
Примеры логического умножения

2. Рассмотрим высказывание «Умение и настойчивость приводят к достижению цели».

Достижение цели возможно только при одновременной истинности двух предпосылок — умения и настойчивости.

Примеры логического умножения

3. Логическую операцию «И» можно сравнить с последовательным соединением лампочек в гирлянде.



При наличии хотя бы одной неработающей лампочки электрическая цепь оказывается разомкнутой, то есть гирлянда не работает.

Ток протекает только при одном условии — все составляющие цепи должны быть исправны.

Операция «ЕСЛИ-ТО» – логическое следование (импликация)

связывает два простых логических выражения, из которых первое является условием, а второе — следствием из этого условия.

Применяемые обозначения: если А, то В;
А влечет В; if A then B; $A \rightarrow B$.

Операция «ЕСЛИ-ТО»

Таблица истинности:

A	B	Если A, то B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Результат операции следования (импликации) ложен только тогда, когда предпосылка A истинна, а заключение B (следствие) ложно.

Примеры операции следования

1. Рассмотрим высказывание «Если идет дождь, то на улице сыро». Здесь исходные высказывания «Идет дождь» и «На улице сыро». Если не идет дождь и не сыро на улице, результат операции следования — истина. На улице может быть сыро и без дождя, например, когда прошла поливочная машина или дождь прошел накануне. Результат операции ложен только тогда, когда дождь идет, а на улице не сыро.

Примеры операции следования

- 2. Рассмотрим два высказывания: $A \{x \text{ делится на } 9\}$, $B \{x \text{ делится на } 3\}$. Операция $A \rightarrow B$ означает следующее: «Если число делится на 9, то оно делится и на 3. Рассмотрим возможные варианты:
- A — ложно, B — ложно (1-я строка таблицы истинности). $x = 4, 17, 22$.
- A — ложно, B — истинно (2-я строка таблицы истинности). $x = 6, 12, 21$.
- A — истинно, B — ложно (3-я строка таблицы истинности). Невозможно найти такие числа, которые делились бы на 9, но не делились на 3.
- A — истинно, B — истинно (4-я строка таблицы истинности). $x = 9, 18, 27$.

Операция «А тогда и только тогда, когда В» (эквивалентность, равнозначность)

Таблица истинности:

A	B	$A \sim B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Результат операции эквивалентность истинен только тогда, когда А и В одновременно истинны или одновременно ложны.

Примеры операции эквивалентности

1. «День сменяет ночь тогда и только тогда, когда солнце скрывается за горизонтом»;
2. «Добиться результата в спорте можно тогда и только тогда, когда приложено максимум усилий».

Вопросы

1. Что такое алгебра логики? Какие логические операции вы знаете?
2. Что такое высказывание? Приведите примеры высказываний.
3. Какие виды логических выражений вы знаете?
4. Что такое таблица истинности?
5. В чем отличие одноместной и двуместной операции?
6. Что такое логическое отрицание? Приведите свои примеры.
7. Что такое логическое сложение? Приведите свои примеры.
8. Что такое логическое умножение? Приведите свои примеры.
9. Что такое импликация? Приведите свои примеры.
10. Что такое эквивалентность? Приведите свои примеры.