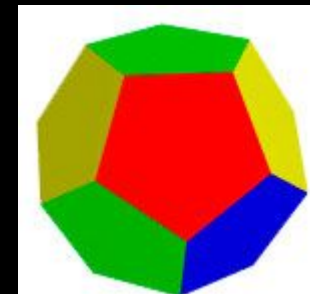
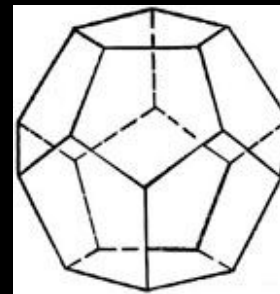


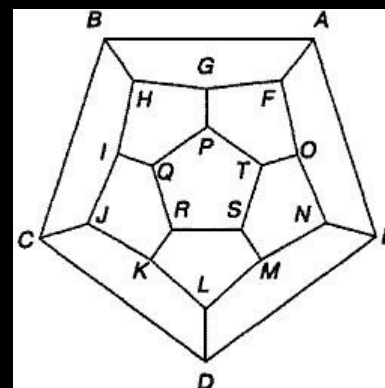
# ГАМИЛЬТОНОВЫ ГРАФЫ

# ЗАДАЧА ГАМИЛЬТОНА

- В 1857 году ирландский математик Гамильтон предложил игру, названную «путешествие по додекаэдру». Игра сводилась к обходу по рёбрам всех вершин правильного додекаэдра при условии, что ни в одну из вершин нельзя заходить более одного раза. Додекаэдр — это многогранник, граням и которого служат 12 правильных пятиугольников. У него 20 вершин и 30 рёбер.



На первом рисунке изображен додекаэдр с прозрачными гранями, а на втором с непрозрачными. Обрати внимание, что в каждой вершине додекаэдра сходятся по три ребра. Представь, что наш додекаэдр сделан из проволоки и его можно растягивать без разрывов. Взявшись за вершины A, B, C, D, E, растянем додекаэдр на столе. Получим изображенный на рисунке граф.



Как же обойти все вершины додекаэдра, причём в точности по одному разу? Найди несколько маршрутов. Кстати, все эти маршруты представляют собой цикл. Но не обыкновенный, а гамильтонов цикл.

# ЦИКЛЫ И ПУТИ

- Гамильтоновым циклом в графе называют цикл, проходящий через каждую вершину графа в точности по одному разу.
- Гамильтоновым путём в графе называют путь, проходящий через каждую вершину графа в точности по одному разу.
- Граф, обладающий гамильтоновым циклом, называется гамильтоновым графом.
- Эйлеровы и гамильтоновы пути и циклы сходны по способу задания. Первые содержат все рёбра, и при том по одному разу каждое, вторые – все вершины, по одному разу каждую. Чтобы определить, обладает ли граф эйлеровым путем или циклом, достаточно определить степень каждой из его вершин. Но пока не найден способ, который бы позволил определить заранее, обладает ли граф гамильтоновым путем или циклом.

Граф, который содержит простой путь, проходящий через каждую его вершину, называется полугамильтоновым. Это определение можно распространить на ориентированные графы, если путь считать ориентированным.

Гамильтонов цикл не обязательно содержит все ребра графа. Ясно, что гамильтоновым может быть только связный граф и, что всякий гамильтонов граф является полугамильтоновым. Заметим, что гамильтонов цикл существует далеко не в каждом графе.

### **Замечание.**

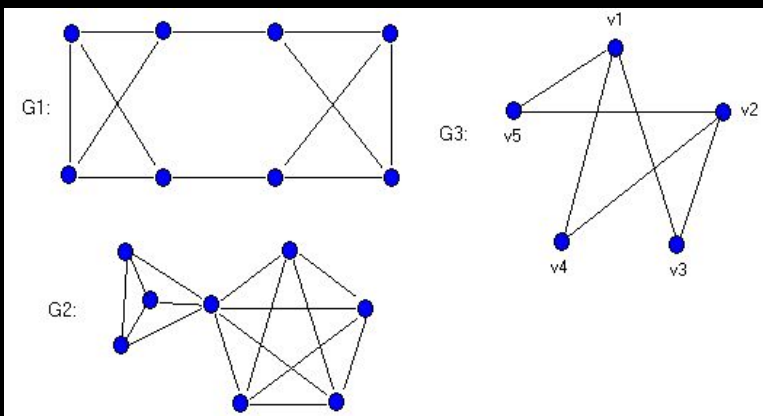
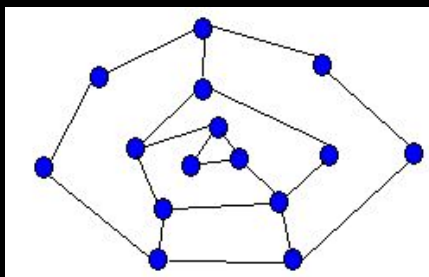
Любой граф  $G$  можно превратить в гамильтонов граф, добавив достаточное количество вершин. Для этого, например, достаточно к вершинам  $v_1, \dots, v_r$  графа  $G$  добавить вершины  $u_1, \dots, u_r$  и множество ребер  $\{(v_i, u_i)\} \{(u_i, v_{i+1})\}$ .

Степенью вершины  $v$  называется число ребер  $d(v)$ , инцидентных ей, при этом петля учитывается дважды. В случае ориентированного графа различают степень  $d_o(v)$  по выходящим дугам и  $d_i(v)$  -- по входящим.

В отличие от эйлеровых графов, где имеется критерий для графа быть эйлеровым, для гамильтоновых графов такого критерия нет. Более того, задача проверки существования гамильтонова цикла оказывается NP-полной. Большинство известных теорем имеет вид: «если граф  $G$  имеет достаточное количество ребер, то граф является гамильтоновым». Приведем несколько таких теорем.

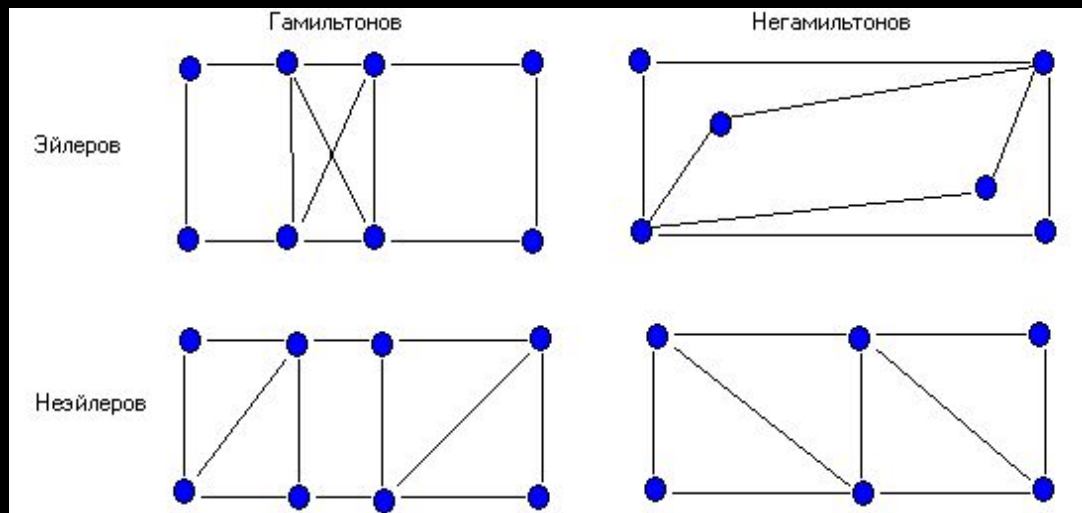
# ТЕОРЕМА

- Теорема. Каждый гамильтонов граф двусвязен. Каждый негамильтонов двусвязный граф содержит тэта-подграф.
- Легко найти тэта-подграф в негамильтоновом блоке, приведенном на рисунке



- Следующая теорема, доказанная Паша, дает достаточное условие того, что граф гамильтонов. Она обобщает результаты, полученные ранее Оре и Дираком, которые приводятся здесь в виде следствий.
- Теорема. Пусть  $G$  имеет  $p > 3$  вершин. Если для всякого  $n$ ,  $1 < n < (p-1)/2$ , число вершин со степенями, не превосходящими  $n$ , меньше чем  $n$ , и для нечетного  $p$  число вершин степени  $(p-1)/2$  не превосходит  $(p-1)/2$ , то  $G$  — гамильтонов граф.
- Следствие (a). Если  $p > 3$  и  $\deg u + \deg v > p$  для любой пары  $u$  и  $v$  несмежных вершин графа  $G$ , то  $G$  — гамильтонов граф.

Наименьший известный в настоящее время негамильтонов трехсвязный плоский граф, имеющий 38 вершин, был построен независимо Ледербергом, Босаком и Барнеттом; эти результаты можно найти в монографии Грюнбаума .



Кажущееся отсутствие взаимосвязи между эйлеровыми и гамильтоновыми графами иллюстрируется рис; здесь каждый граф - это блок с 8 вершинами. Однако в следующей главе мы свяжем эйлеровы и гамильтоновы графы с помощью так называемых «реберных графов».

Кстати, Пламмер высказал предположение, что квадрат любого двусвязного графа есть гамильтонов граф

# ГАМИЛЬТОНОВЫ ЛИНИИ

- Некоторые головоломки типа как перевезти волка, козу и капусту тоже сводятся к поиску гамильтоновой линии на некотором графе, изображающем все возможные перевозки. Известна также задача о нахождении пути коня на шахматной доске, при котором он побывает на каждом поле по одному разу (вариант – и вернется на исходное поле последним ходом), которая тоже является частным случаем задачи о нахождении гамильтоновой линии.