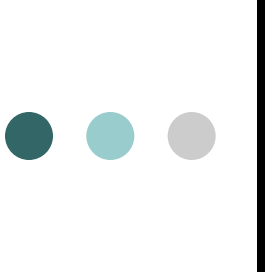




Теория вероятности

Независимые повторные испытания



Содержание презентации

- Независимые повторные испытания.
- Формула Бернулли.
- Наивероятнейшее число появлений события.
- Локальная теорема Лапласа.
- Интегральная теорема Лапласа.
- Формула Пуассона.
- Независимые повторные испытания. Схема.



Независимые повторные испытания.

- Если производится несколько испытаний, причем вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют **независимыми повторными испытаниями**.
- В разных независимых испытаниях событие A может иметь либо различные вероятности, либо одну и ту же вероятность. Будем далее рассматривать лишь такие независимые испытания, в которых событие A имеет **одну и ту же вероятность**.



Независимые повторные испытания.

Примеры:

1. Подбрасываем игральный кубик n раз. Выпадение числа очков от 1 до 6 происходит с вероятностью $1/6$ в каждом из испытаний;
2. Приобретаем n лотерейных билетов. Для каждого из лотерейных билетов вероятность выигрыша есть величина постоянная;
3. Подбрасывается n раз монета. Выпадение орла или решки происходит с вероятностью $1/2$ в каждом испытании.

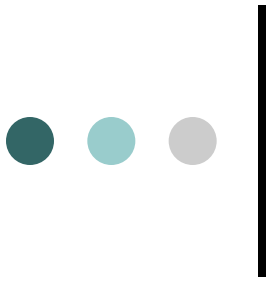
Пример 1 и примеры 2,3 отличаются друг от друга тем, что в первом примере возможно появление 6-ти событий, а во втором и третьем – появление только 2-х событий: выиграл - не выиграл, орел – решка, т.е. условно можно назвать такие исходы «успех – неуспех». Такие испытания называются **испытаниями Бернулли**.

Независимые повторные испытания.

Независимые повторные испытания, в каждом из которых возможно появление события A (успех) с постоянной вероятностью p или непоявление события A (неуспех) с постоянной вероятностью $q=1-p$, называются **испытаниями Бернулли** или **схемой Бернулли**.

Швейцарский математик
Якоб Бернулли (1654-1705).





Независимые повторные испытания

Формула Бернулли





Формула Бернулли.

Пусть производится n испытаний Бернулли. Вероятность того, что в этих испытаниях событие A произойдет ровно m раз можно найти по **формуле Бернулли**:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

n – число испытаний

p – вероятность появления события A в одном испытании

q - вероятность неоявления события A в одном испытании

$P_n(m)$ – вероятность того, что событие A появится ровно m раз в n испытаниях





Формула Бернулли.

Пример. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжении суток не превысит установленной нормы, равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшую неделю расход электроэнергии в течении четырех суток не превысит норму.

Решение. Обозначим А- расход не превысит норму.

По условию $n = 7$, $m = 4$, $p = P(A) = 0.75$.

По формуле Бернулли: $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$

$$P_7(4) = C_7^4 \cdot p^4 \cdot q^{7-4} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot 0,75^4 \cdot 0,25^3 = 35 \cdot 0,316 \cdot 0,0156 \approx 0,172$$

Ответ: вероятность того, что в ближайшую неделю расход электроэнергии в течении четырех суток не превысит норму равна 0,1969





Формула Бернулли

Пример. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть одному из них 2 партии из 4-х или 3 партии из 6-ти?

Решение.

1) Найдем вероятность выиграть одному из них 2 партии из 4-х:
 $n=4$, $m=2$, $p=1/2$, $q=1/2$. По формуле Бернулли:

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^{4-2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

2) Найдем вероятность выиграть одному из них 3 партии из 6-ти:
 $n=6$, $m=3$, $p=1/2$, $q=1/2$. По формуле Бернулли:

$$P_6(3) = C_6^3 \cdot p^3 \cdot q^{6-3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 20 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{16}$$

Сравним полученные результаты: т.к. $3/8 > 5/16$, то вероятнее выиграть ⁹одному из них 2 партии из 4-х.



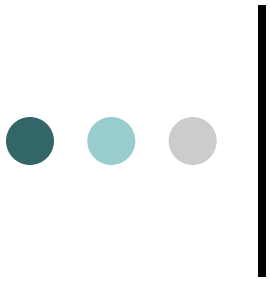


Формула Бернулли

Пример. Исследование инкубации яиц яичного кросса Беларусь-9 показало, что цыплята выводятся в среднем из 70% заложенных в инкубатор яиц. Из общего количества заложенных в инкубатор яиц случайным образом отобраны и помечены 6. Найти вероятность того, что из помеченных яиц выведутся:

- a) менее трех цыплят $P_6(m < 3)$; (0,07047)
- b) более трех цыплят $P_6(m > 3)$; (0,74431)
- c) не менее трех цыплят $P_6(m \geq 3)$; (0,92953)
- d) не более трех цыплят $P_6(m \leq 3)$; (0,25569)

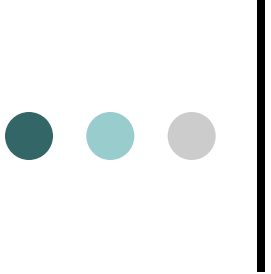




Независимые повторные испытания.

Локальная теорема Лапласа.





Локальная теорема Лапласа.

Пользоваться формулой Бернулли при больших значениях n достаточно трудно, так как формула требует выполнения действий над громадными числами. Например, если $n = 50$, $m = 30$, $p=0,1$, то для отыскания вероятности $P_{30}(50)$ надо вычислить выражение

$$P_{50}(30) = C_{50}^{30} \cdot 0,1^{30} \cdot 0,9^{20}$$

Нельзя ли вычислить интересующую нас вероятность, не прибегая к формуле Бернулли? Оказывается, можно. **Локальная теорема Лапласа** и дает асимптотическую формулу, которая позволяет приближенно найти вероятность появления события ровно m раз в n испытаниях, если число испытаний достаточно велико.



Локальная теорема Лапласа.



Лаплас Пьер Симон

(23.03.1749 - 05.03.1827), Нормандия

"То, что мы знаем, так ничтожно по сравнению с тем, что мы не знаем".



Локальная теорема Лапласа.

Локальная теорема Лапласа. Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно m раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n)

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}, \quad \text{где}$$

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, \quad x = \frac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$



Локальная теорема Лапласа.

Замечание. Для частного случая, а именно для $p=1/2$, асимптотическая формула была найдена в 1730 г. Муавром.

В 1783 г. Лаплас обобщил формулу Муавра для произвольного p , отличного от 0 и 1. Поэтому теорему, о которой здесь идет речь, иногда называют теоремой Муавра—Лапласа.



Абрахам де Муавр

(26.05.1667 – 27.11.1754), Франция.

По легенде, Муавр точно предсказал день собственной смерти. Обнаружив, что продолжительность его сна стала увеличиваться в арифметической прогрессии, он легко вычислил, когда она достигнет 24 часов, и, как всегда, не ошибся.



Локальная теорема Лапласа.

Для упрощения расчетов, связанных с применением формулы

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}},$$

составлена таблица значений функции $\varphi(x)$.

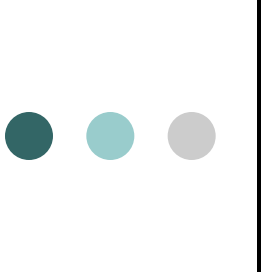
Пользуясь этой таблицей, необходимо иметь в виду **свойства функции $\varphi(x)$** :

1. Функция $\varphi(x)$ является четной, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$
2. Функция $\varphi(x)$ — монотонно убывающая при положительных значениях x , причем при $x \rightarrow \infty, \varphi(x) \rightarrow 0$.

(Практически можно считать, что уже при $x > 5$ $\varphi(x) \approx 0$).

Теорему Муавра-Лапласа применяют при $n \cdot p \cdot q \geq 10$.





Локальная теорема Лапласа. Алгоритм решения

1. Находим $n \cdot p \cdot q$. Если $n \cdot p \cdot q \geq 10$, то можно применять теорему Муавра-Лапласа.

2. Вычисляем x по формуле

$$x = \frac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

3. По таблице находим

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}},$$

4. Вычисляем вероятность

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}},$$

Локальная теорема Лапласа.

Пример. Вероятность выхода из строя кодового замка в течение месяца равна 2%. Какова вероятность того, что в партии из 600 замков, установленных фирмой, 20 замков выйдут из строя в течение месяца.

Решение. По условию $n=600$, $m=20$, $p=0.02$, $q=0.98$. Нужно найти $P_{600}(20)$. $n \cdot p \cdot q = 600 \cdot 0.02 \cdot 0.98 = 11.76$, следовательно, локальную теорему Лапласа можно применять.

1. $\sqrt{npq} = \sqrt{11.76} \approx 3.43$;

2. $x = \frac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \frac{20 - 600 \cdot 0.02}{3.43} \approx 2.33$;

3. $\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$, $\rightarrow$ по таблице найдем $\varphi(2.33) \approx 0.026$;

4. $P_{600}(20) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} \approx \frac{0.026}{3.43} \approx 0.00758$.

Локальная теорема Лапласа.

Задача. Найти вероятность того, что событие А наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

$$(npq=64, x=80, \varphi(x) \approx 0,3989, P_{400}(80) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} \approx \frac{0,3989}{8} \approx 0.04986)$$

Задача. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле $p = 0,75$. Найти вероятность того, что при 10 выстрелах стрелок поразит мишень 8 раз.

$$(npq=1.875, x=8, \varphi(8) \approx 0,3739, P_{10}(8) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} \approx \frac{0,3739}{1.37} \approx 0.2729)$$

Если решать эту задачу с помощью формулы Бернулли, то результат будет несколько иным: $P_{10}(8) \approx 0,282$. Такое расхождение ответов объясняется тем, что в настоящем примере n имеет малое значение (формула Лапласа дает достаточно хорошие приближения лишь при достаточно больших значениях n).

Локальная теорема Лапласа.

Пример. В некоторой местности из каждых 100 семей 80 имеют холодильники. Найти вероятность того, что из 400 семей 300 имеют холодильники.

Решение. Вероятность того, что семья имеет холодильник, равна $p = 80/100 = 0,8$; $n = 400$, $m = 300$, $q = 0,2$.

1. $npq = 400 \cdot 0,8 \cdot (1 - 0,8) = 64 > 10$, следовательно можно применять локальную формулу Муавра—Лапласа.

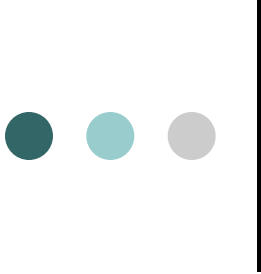
2. $\sqrt{npq} = \sqrt{64} = 8$;

3.
$$x = \frac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \frac{300 - 400 \cdot 0,8}{8} \approx -2,5 ;$$

4. По таблице найдем $\varphi(-2,5) = \varphi(2,5) \approx 0,0175$;

5.
$$P_{400}(300) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} \approx \frac{0,0175}{8} \approx 0,0022 .$$



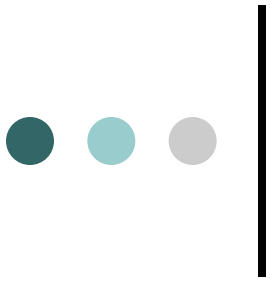


Локальная теорема Лапласа.

Пусть в условиях предыдущего примера необходимо найти вероятность того, что от 300 до 360 семей (включительно) имеют холодильники. В этом случае по теореме сложения вероятность искомого события:

$$P_{400}(300 \leq m \leq 360) = P_{400}(300) + P_{400}(301) + \dots + P_{400}(360)$$

В принципе вычислить каждое слагаемое можно по локальной формуле Муавра—Лапласа, но большое количество слагаемых делает расчет весьма громоздким. В таких случаях используется **интегральная теорема Лапласа**.



Независимые повторные испытания.

Формула Пуассона.



Формула Пуассона.

- Если число независимых испытаний n достаточно велико, а вероятность появления события в каждом испытании отлична от 0 и 1 и мала (p – близка к 0), так что $n \cdot p \leq 10$, то для вычисления вероятности появления события k раз применяют **формулу Пуассона**.



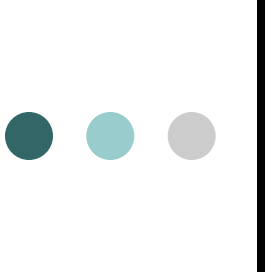
Пуассон Симеон

(21.06.1781 - 25.04.1840)

Французский учёный, член Парижской АН, почётный член Петербургской АН.

Труды Пуассона относятся к теоретической и небесной механике, математике и математической физике.





Формула Пуассона.

Теорема. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянно близка к нулю, число независимых испытаний n достаточно велико, то вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит m раз приближенно равна

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}, \quad \text{где} \quad \lambda = n \cdot p$$

Формулу Пуассона можно применять при $\lambda \leq 10$.

Существуют статистико-математические таблицы для распределения Пуассона.



Формула Пуассона.

Пример. На факультете насчитывается 1825 студентов. Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно четырех студентов факультета?

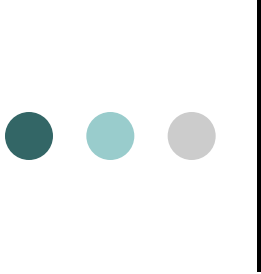
Решение. Вероятность того, что день рождения студента 1 сентября, равна $p = 1/365$. Так как $p = 1/365$ — мала, $n = 1825$ — велико и $\lambda = np = 1825 \cdot (1/365) = 5 < 10$, то применяем формулу Пуассона:

$$P_{1825}(4) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{5^4}{4!} \cdot e^{-5} = \frac{625}{24 \cdot e^5} = \frac{625}{24 \cdot 2.7^5} \approx \frac{625}{3443.7377} \approx 0.18$$

По таблицам можно точнее и быстрее найти $P(m, \lambda)$. Так для данного примера $P_{1825}(4) = P(m, \lambda) = P(4, 5) \approx 0.17547$.

Ответ: вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно четырех студентов факультета равна 0,17547.





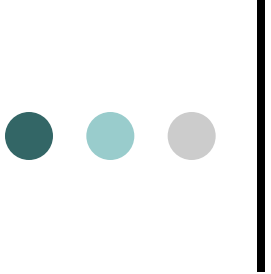
Независимые повторные испытания. Решение задач.

Задача 3. По результатам проверок налоговыми инспекциями установлено, что в среднем каждое второе малое предприятие региона имеет нарушение финансовой дисциплины. Найти вероятность того, что из 1000 зарегистрированных в регионе малых предприятий имеют нарушения финансовой дисциплины:

- а) 480 предприятий; б) наивероятнейшее число предприятий;
- в) не менее 480; г) от 480 до 520.

Задача 4. Вероятность малому предприятию быть банкротом за время t равна 0,2. Найти вероятность того, что из шести малых предприятий за время t сохранятся: а) два; б) более двух.

Задача 5. В банк отправлено 4000 пакетов денежных знаков. Вероятность того, что пакет содержит недостаточное или избыточное число денежных знаков, равна 0,0001. Найти вероятность того, что при проверке будет обнаружено: а) три ошибочно укомплектованных пакета; б) не более трех пакетов.



Домашняя работа

- 1) С помощью зенитной установки обстреливают мишень. Вероятность попадания в цель составляет 0,7. Какова вероятность того, что из 80 произведенных на штабных учениях выстрелов достигнут цели: а) 75 выстрелов; б) не менее 75 выстрелов; в) менее 75 выстрелов; г) не более 75 выстрелов; д) более 75 выстрелов; е) все выстрелы?
- 2) Известно, что вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,02. Сверла укладывают в коробки по 100 штук. Какое наименьшее количество сверл нужно класть в коробку для того, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, в ней было не менее 1000 исправных?
- 3) Сколько изюма в среднем должны содержать калорийные булочки для того, чтобы вероятность иметь в булочке хотя бы одну изюминку была не менее 0,99?