

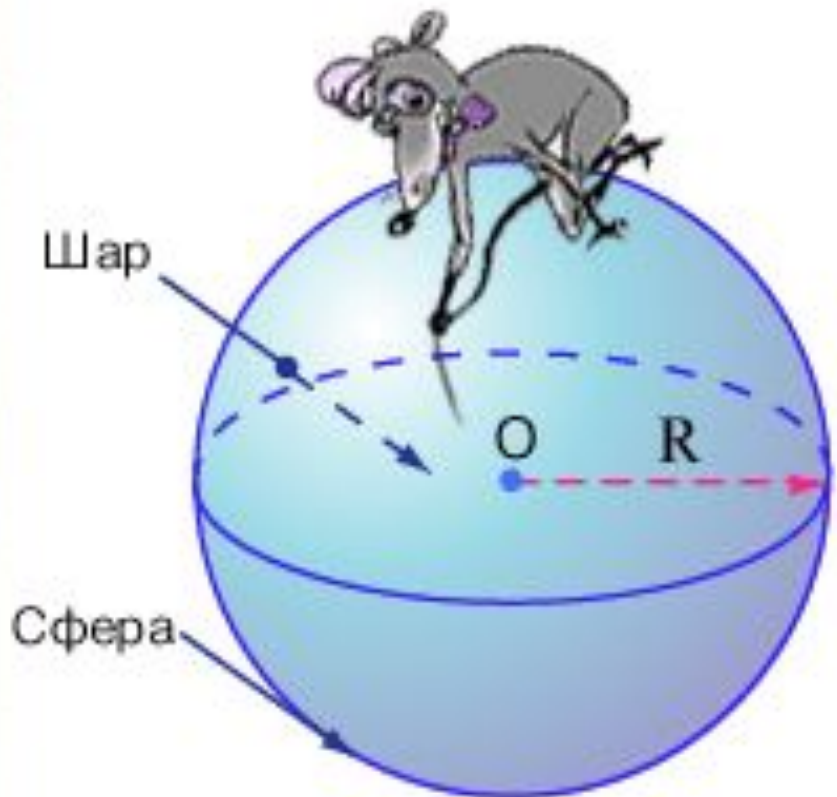
Шар. Сфера.

Основные вопросы:

- Определение *шаровой поверхности* или *сферы*.
- Определение *шара, центра шара, радиуса шара*.
- Уравнение сферы.
- Взаимное расположение сферы и плоскости.
- Касательная плоскость к сфере. Сечения шара и сферы плоскостями.
- Площадь сферы.

Шар или
сфера?

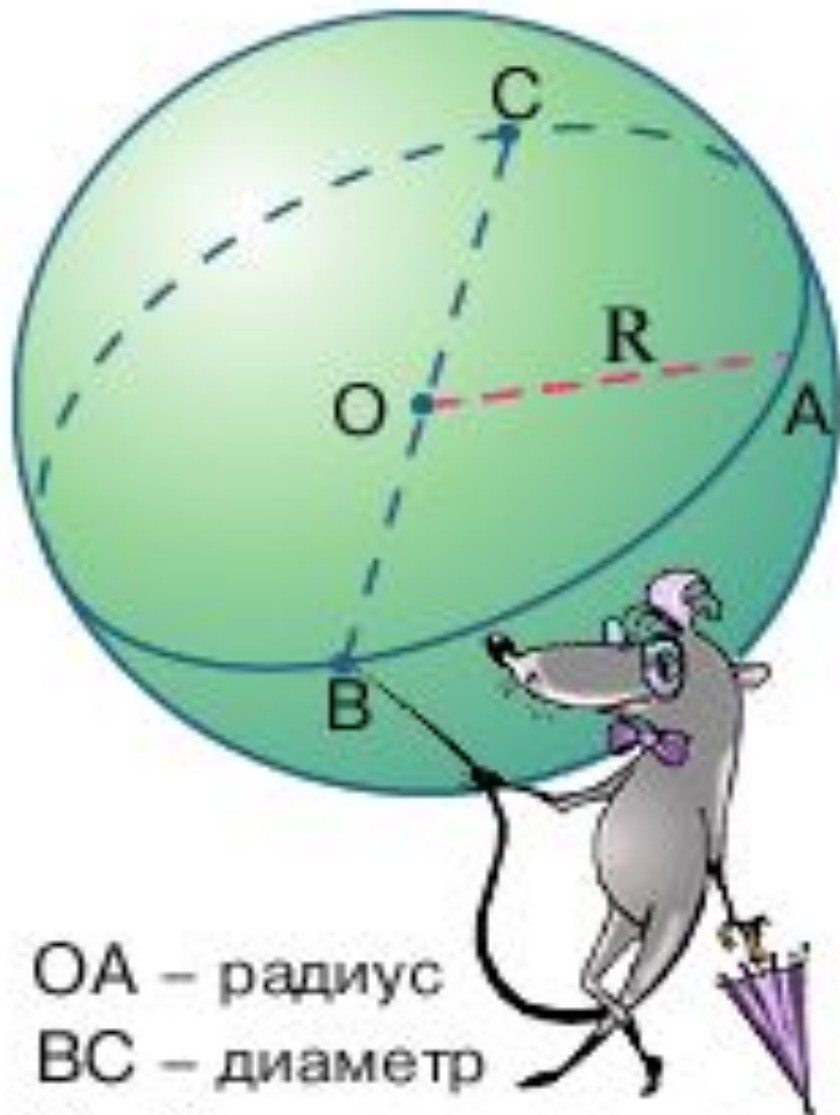




O – центр сферы и шара
R – радиус сферы и шара

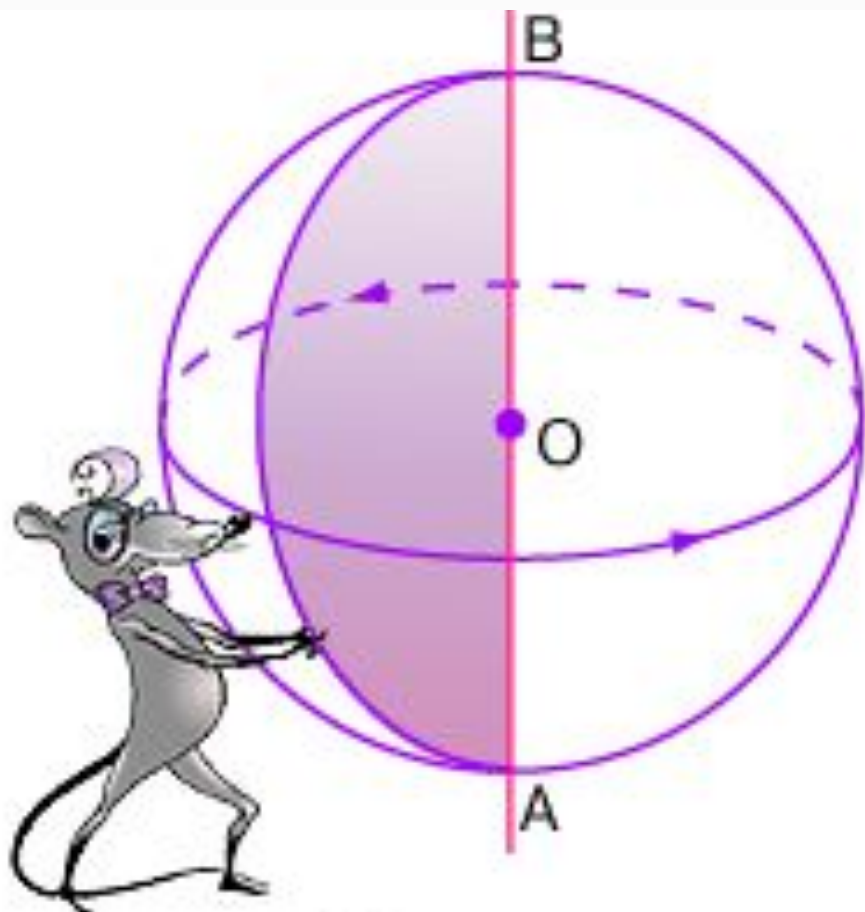
$\omega(O, R)$

- **Сферой** называется поверхность, которая состоит из всех точек пространства, находящихся **на заданном расстоянии от данной точки**. Эта точка называется **центром O**, а заданное расстояние – **радиусом сферы R**, или шара – тела, ограниченного сферой.
- **Шар** состоит из всех точек пространства, находящихся на **расстоянии не более заданного от данной точки**.



OA – радиус
BC – диаметр
B и C – диаметрально
противоположные точки

- Отрезок, соединяющий центр шара с точкой на его поверхности, называется **радиусом шара**.
- Отрезок, соединяющий две точки на поверхности шара и проходящий через центр, называется **диаметром шара**, а концы этого отрезка – **диаметрально противоположными точками шара**.



AB – диаметр

**Шар можно
рассматривать как
тело, полученное от
*вращения полукруга
вокруг диаметра как
оси.***

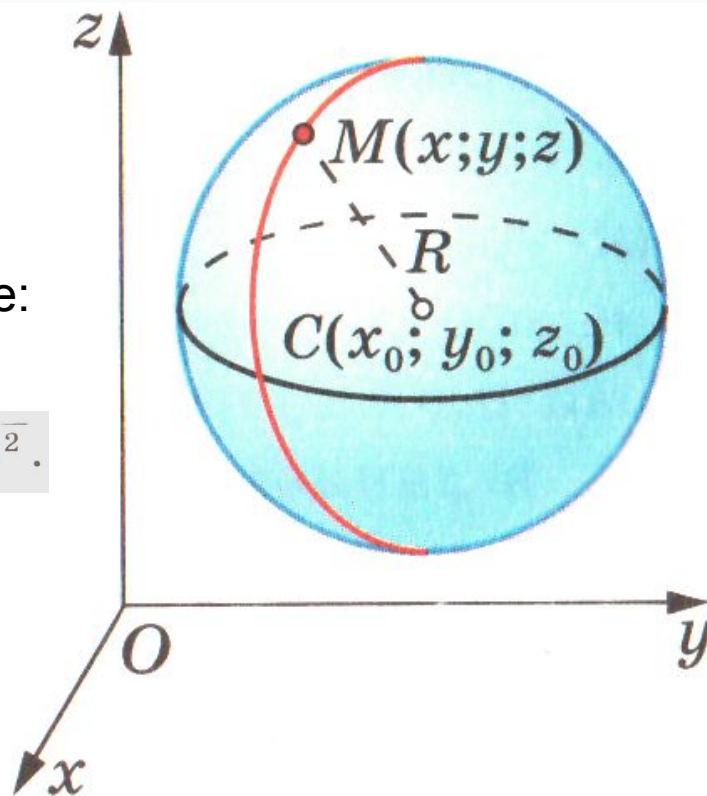
Уравнение сферы.

- Выведем уравнение сферы радиуса R с центром $C(x_0; y_0; z_0)$
- Расстояние от произвольной точки $M(x; y; z)$ до точки C вычисляется по формуле:

$$MC = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

- В прямоугольной системе координат уравнение сферы радиуса R с центром $C(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$



Уравнение сферы

Центр

 r

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z -$$

$$C(3;2;1)$$

$$r = 4$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+5)^2 =$$

$$C(1;-2;-5)$$

$$r = 2$$

$$(x+5)^2 + (y-3)^2 + z^2 =$$

$$C(-5;3;0)$$

$$r = 5$$

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 =$$

$$C(1;0;0)$$

$$r = \sqrt{8}$$

$$x^2 + (y+2)^2 + (z+8)^2 =$$

$$C(0;-2;-8)$$

$$r = \sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 =$$

$$C(0;0;0)$$

$$r = 3$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 =$$

$$C(3; 2;0)$$

$$r = 0,3$$

$$(x+7)^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 =$$

$$C(-7; 5;-1)$$

$$r = \sqrt{2,5}$$

$$x^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 6\frac{1}{4}$$

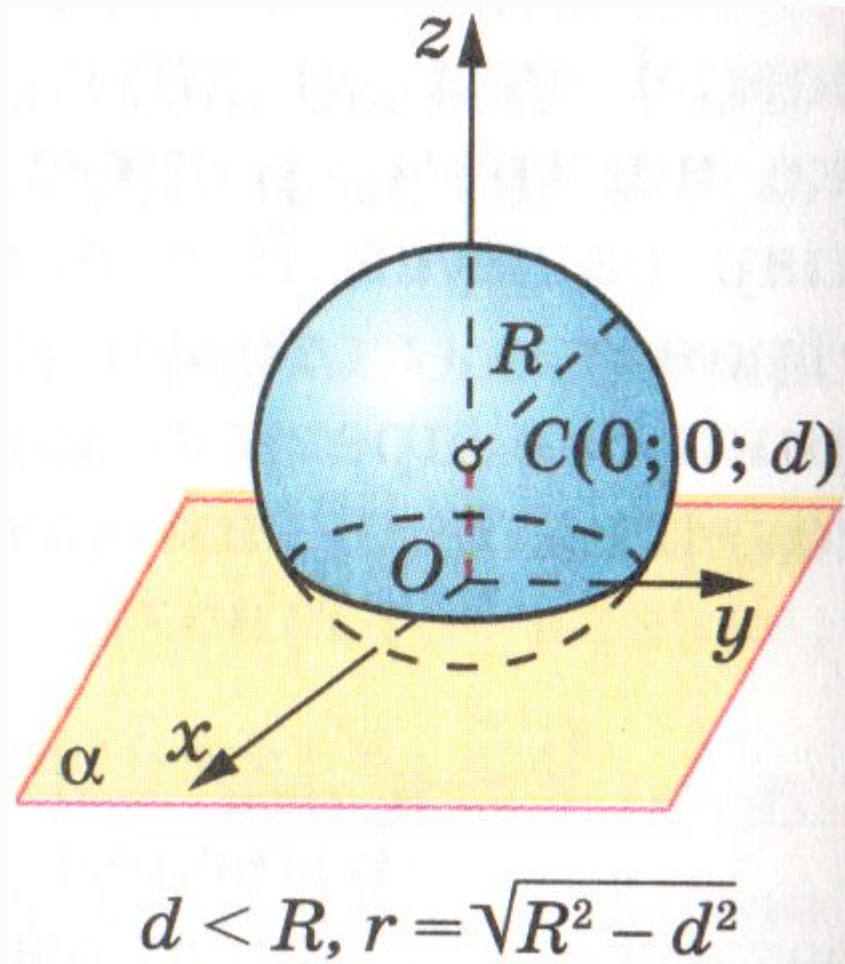
$$C(0;-4;9)$$

$$r = \frac{5}{2}$$

Взаимное расположение сферы и плоскости

- Если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы, то сечение сферы плоскостью есть окружность.

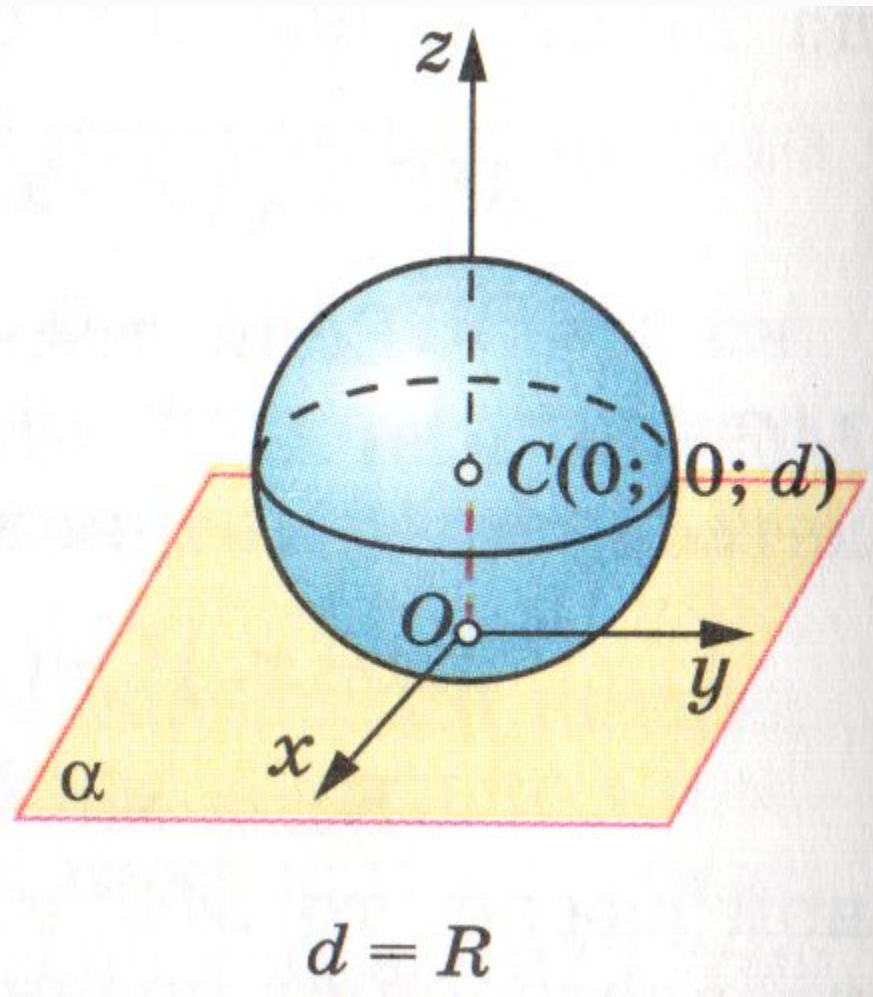
$$d < R$$



Взаимное расположение сферы и плоскости

- Если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы, то сфера и плоскость имеют только одну общую точку.

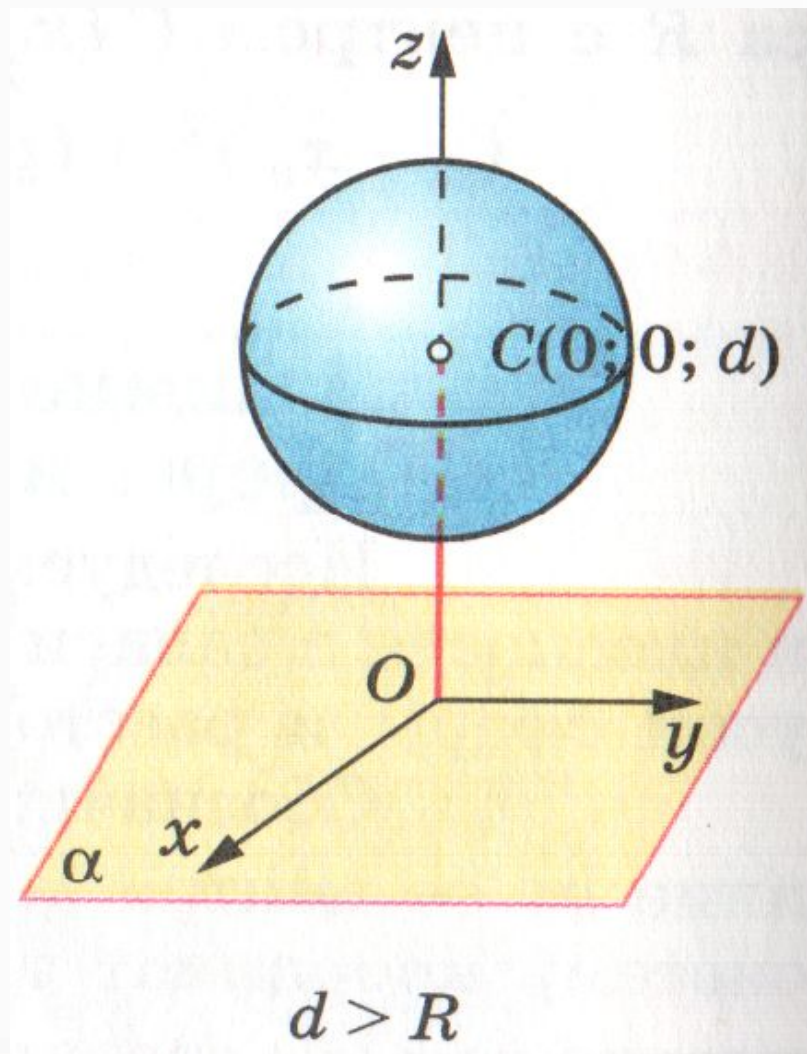
$$d=R$$



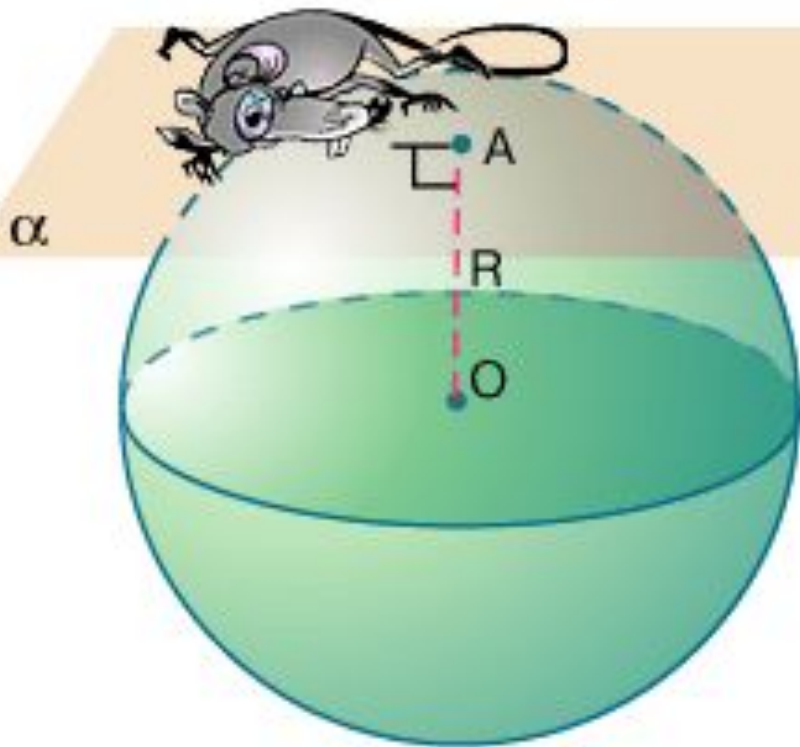
Взаимное расположение сферы и плоскости

- Если расстояние от центра сферы до плоскости **больше** радиуса сферы, то сфера и плоскость **не имеют общих точек.**

$$d > R$$



Плоскость и прямая, касательные к сфере.

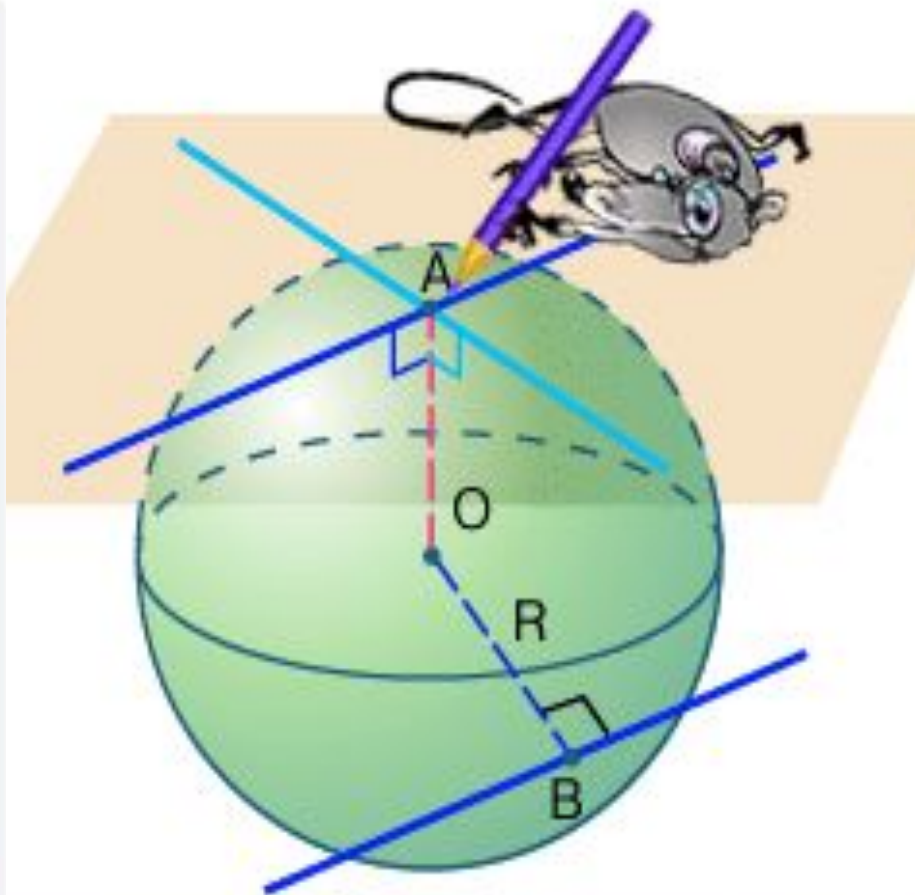


α – касательная плоскость

$OA \perp \alpha$

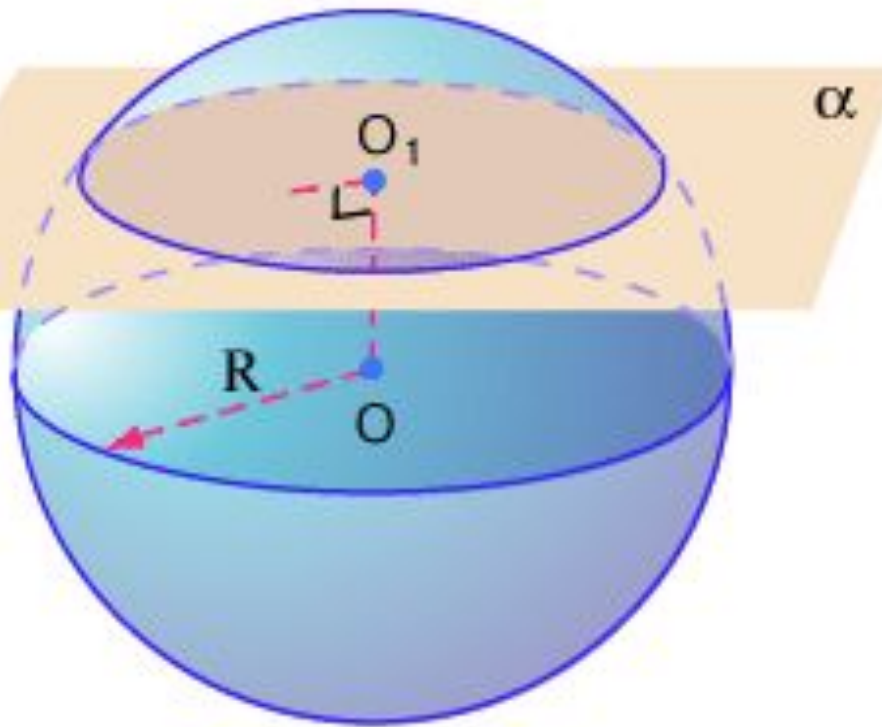
Плоскость, *имеющая со сферой только одну общую точку*, называется **касательной плоскостью**.

Касательная плоскость перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.



- Прямая называется **касательной**, если она имеет со сферой ровно *одну общую точку*. Такая прямая перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.
- **Через любую точку сферы можно провести бесчисленное множество касательных прямых.**

Теорема. Любое сечение шара плоскостью есть **круг**. Перпендикуляр, опущенный из центра шара на секущую плоскость, попадает в центр этого круга.



Дано:

шар (O, R)

α – секущая плоскость

$OO_1 \perp \alpha$

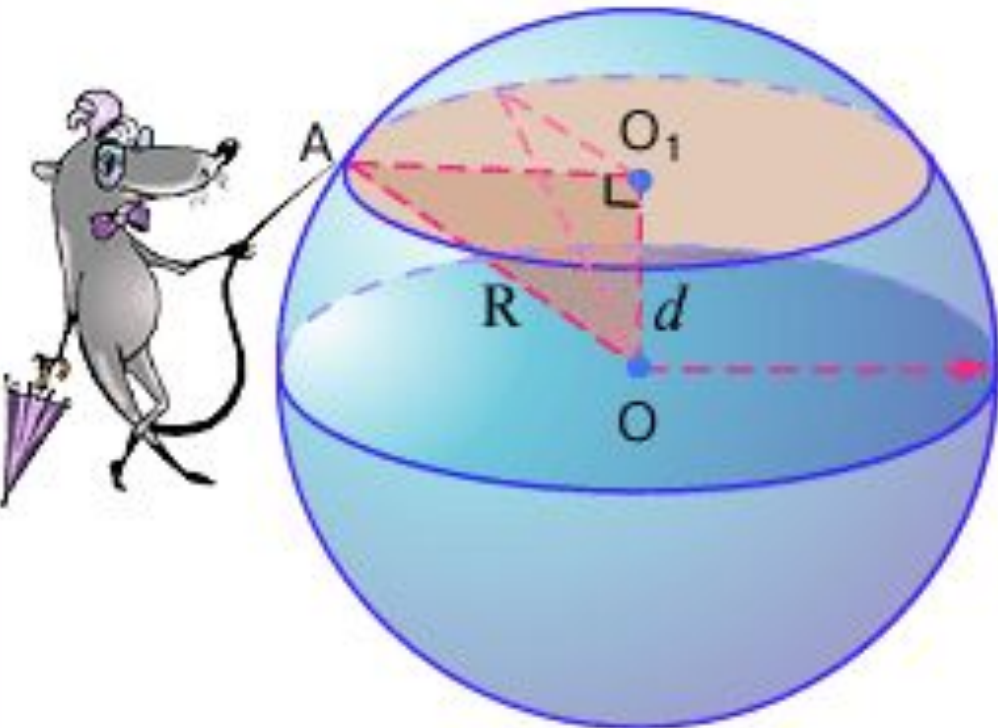
Доказать:

сечение – круг

O_1 – центр круга

Доказательство:

Рассмотрим прямоугольный треугольник, вершинами которого являются центр шара, основание перпендикуляра, опущенного из центра на плоскость, и произвольная точка сечения.



$$OA = R \quad OO_1 = d$$

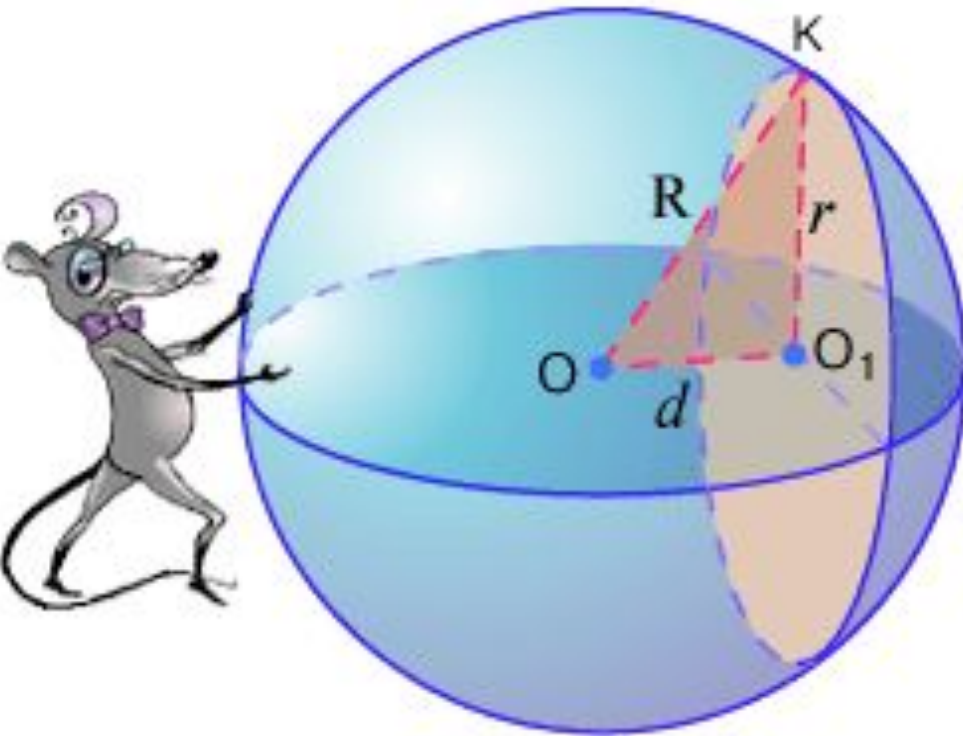
$$AO^2 = OO_1^2 + AO_1^2$$

$$R^2 = d^2 + AO_1^2$$

$$AO_1 = \sqrt{R^2 - d^2}$$

$$AO_1 = \text{const}$$

Следствие. Если известны радиус шара и расстояние от центра шара до плоскости сечения, то радиус сечения вычисляется по теореме Пифагора.

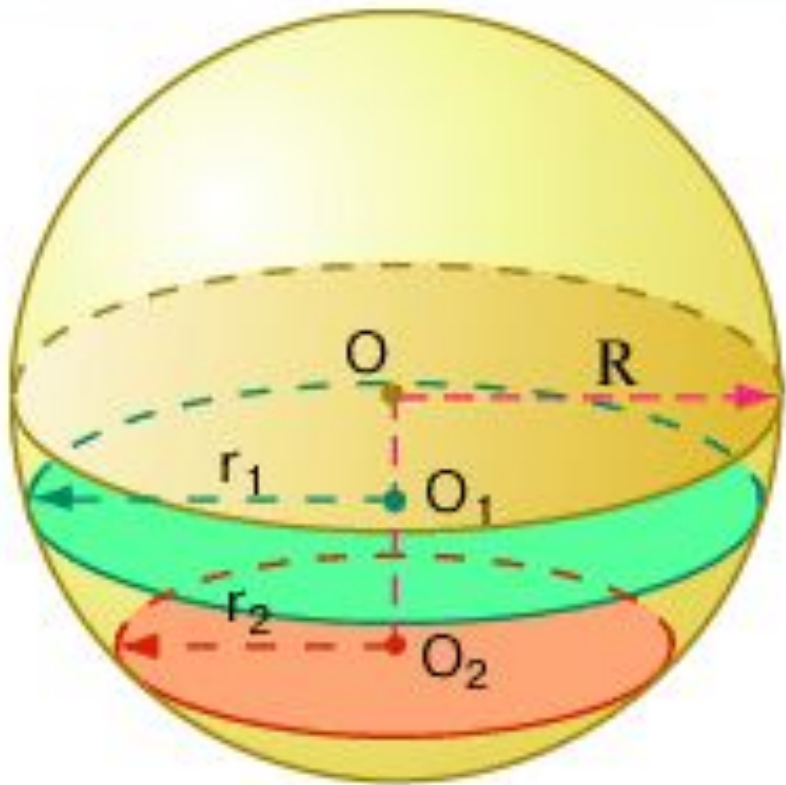


$$O_1K^2 + d^2 = R^2$$

$$O_1K = \sqrt{R^2 - d^2} = r$$

r – радиус сечения

Чем меньше расстояние от центра шара до плоскости, тем больше радиус сечения.



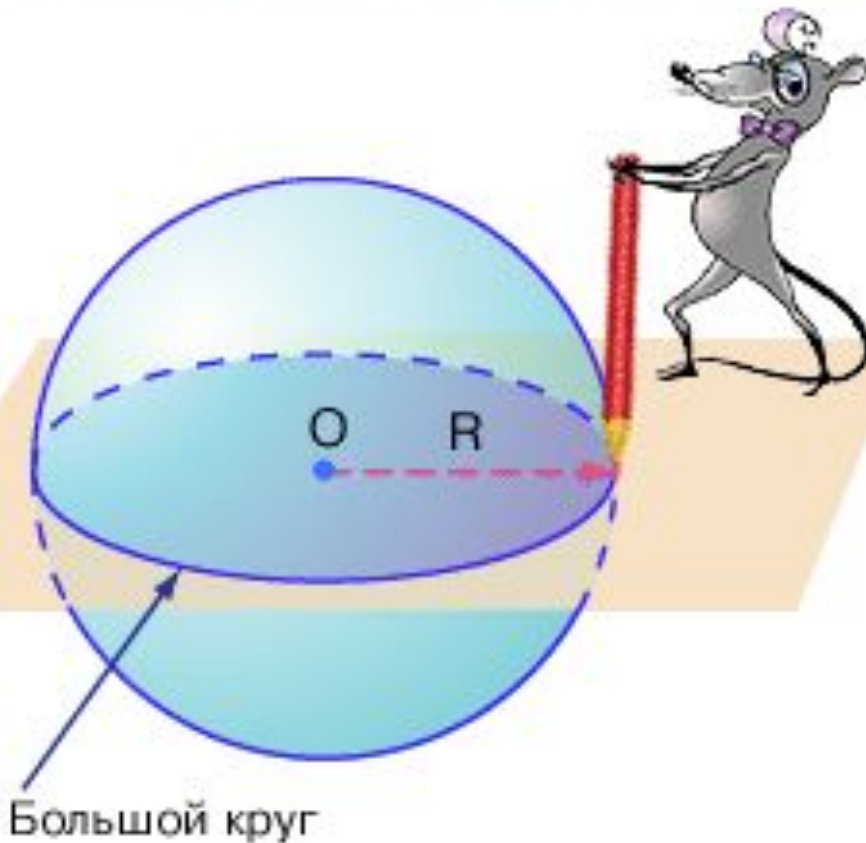
$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

$$d_1 = OO_1$$

$$d_2 = OO_2$$

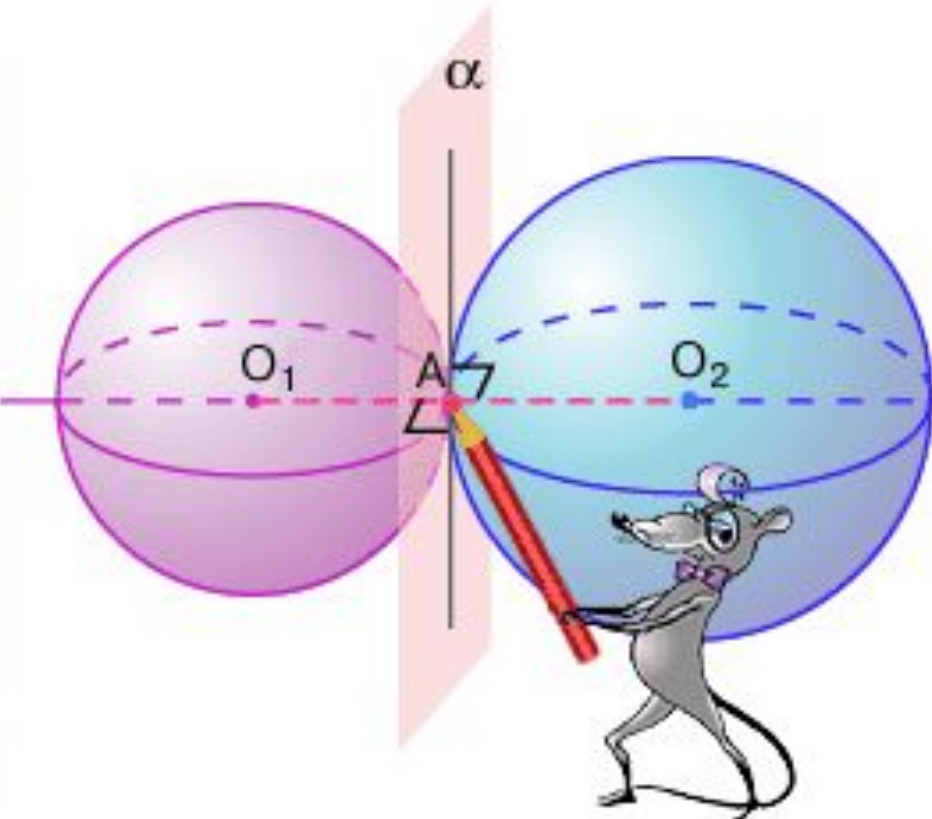
$$r_1 > r_2 \longrightarrow d_1 < d_2$$

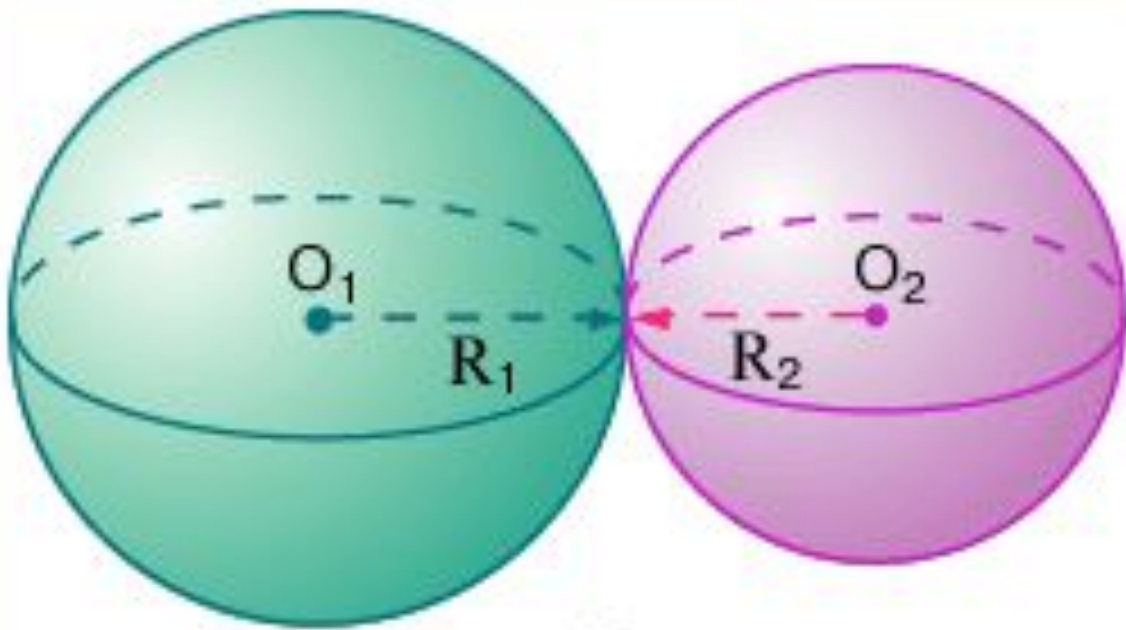
- *Наибольший радиус сечения* получается, когда плоскость проходит через *центр шара*.
- **Круг, получаемый в этом случае, называется *большим кругом*.**
- **Большой круг делит шар на два *полушара*.**



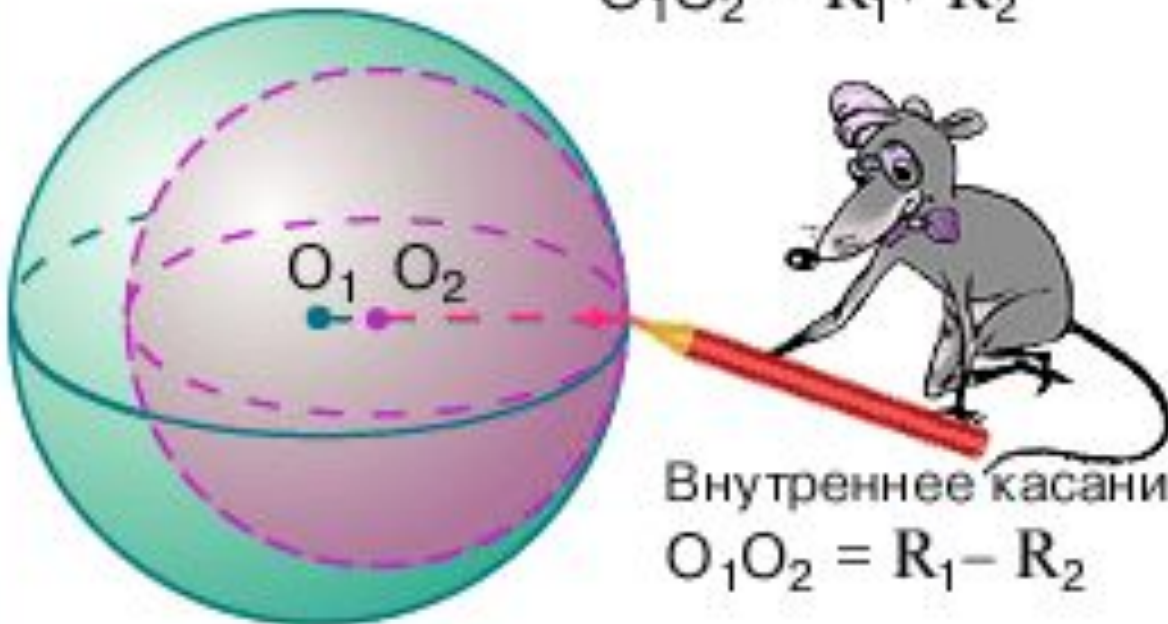
Взаимное расположение двух шаров.

Если два шара или сферы имеют только одну общую точку, то говорят, что они касаются. *Их общая касательная плоскость перпендикулярна линии центров (прямой, соединяющей центры обоих шаров).*





Внешнее касание:
 $O_1O_2 = R_1 + R_2$

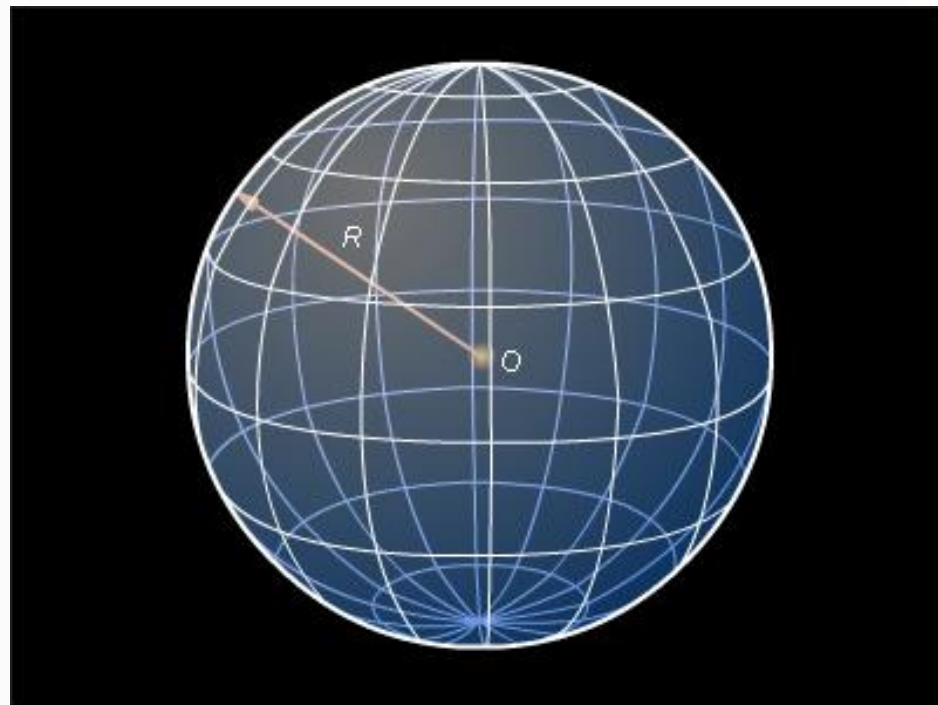


Внутреннее касание:
 $O_1O_2 = R_1 - R_2$

**Касание шаров
может быть
внутренним и
внешним.**

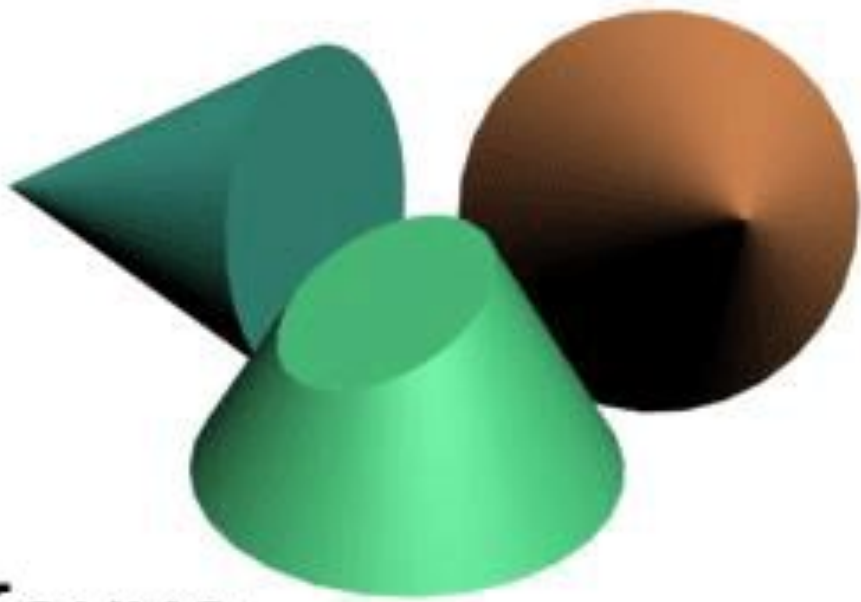
Площадь сферы

- Площадь S сферы радиуса R вычисляется по формуле:



$$S = 4\pi R^2$$

Решение задач



Конус



Задача 1.

Зная координаты центра $C(2;-3;0)$ и радиус сферы $R=5$, записать уравнение сферы.

Решение:

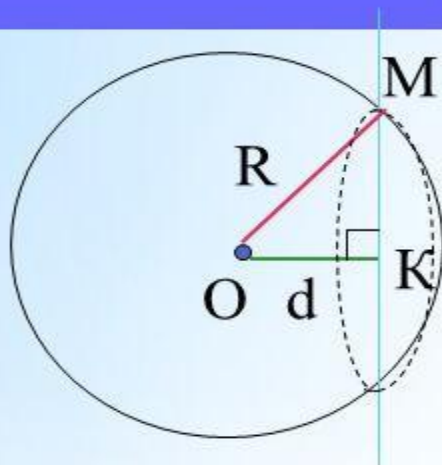
так как уравнение сферы с радиусом R и центром в точке $C(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2=R^2$, а координаты центра данной сферы $C(2;-3;0)$ и радиус $R=5$, то уравнение данной сферы

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2=25$$

Ответ: $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2=25$

Задача 2.

Шар радиусом 41 дм пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 9 дм от центра. Найти радиус сечения.



Дано:

Шар с центром в т.О

$R=41$ дм

α - секущая плоскость

$d = 9$ дм

Найти: $r_{\text{сеч}} = ?$

Решение:

Рассмотрим $\triangle OMK$ – прямоугольный

$OM = 41$ дм; $OK = 9$ дм; $MK = r$, $r^2 = R^2 - d^2$

по теореме Пифагора: $MK^2 = r^2 = 41^2 - 9^2 = 1681 - 81 = 1600$,
отсюда $r_{\text{сеч}} = 40$ дм

Ответ: $r_{\text{сеч}} = 40$ дм

Задача 3.

Найти площадь поверхности сферы,
радиус которой равен 6 см.

Дано:

сфера

$$R = 6 \text{ см}$$

Найти:

$$S_{\text{сф}} = ?$$

Решение:

1. $S_{\text{сф}} = 4\pi R^2$

2. $S_{\text{сф}} = 4\pi 6^2 = 144\pi \text{ см}^2$

Ответ: $S_{\text{сф}} = 144\pi \text{ см}^2$

Стороны треугольника 13см, 14см и 15см. Найти расстояние от плоскости треугольника до центра шара, касающегося сторон треугольника. Радиус шара равен 5 см.

Задача.

Дано:

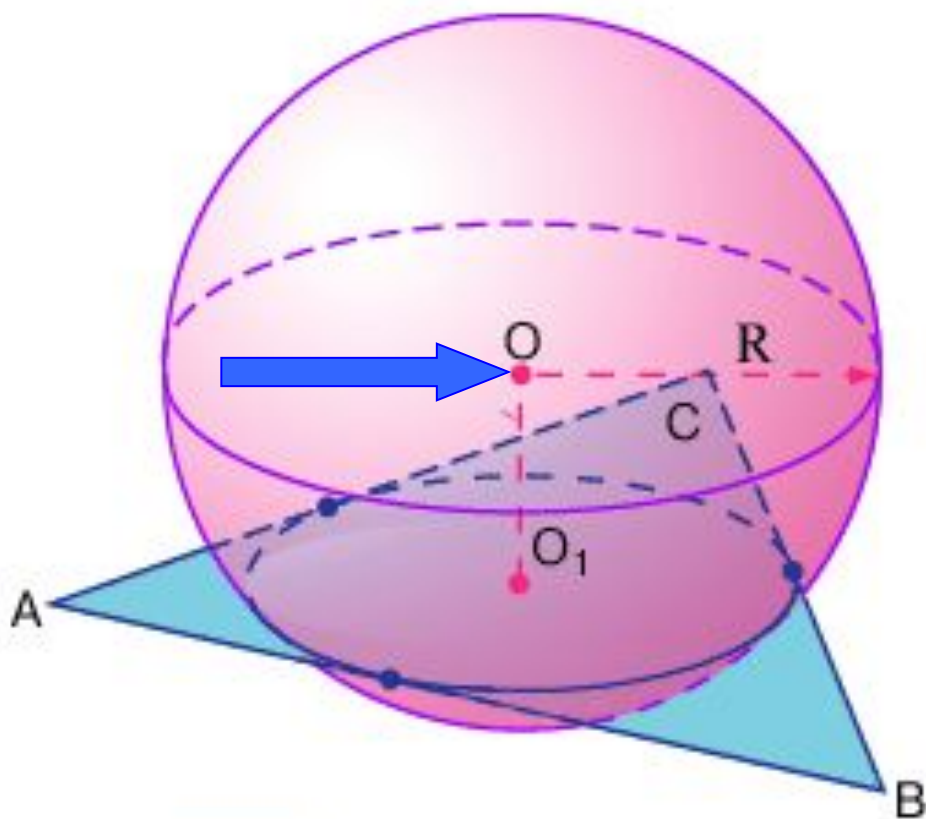
$$AB = 15\text{см}$$

$$AC = 14\text{см}$$

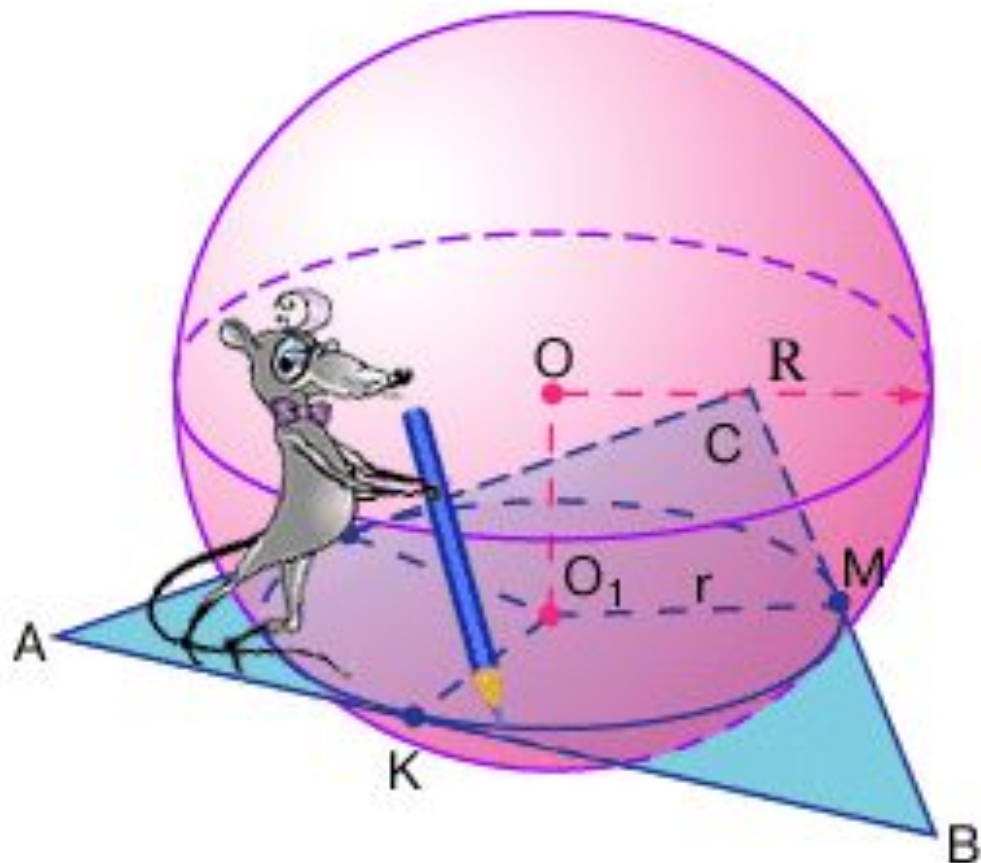
$$BC = 13\text{см}$$

Найти:

$$d(O, FDC)$$



Решение:



Окружность (O_1, r) вписана
в $\triangle ABC$.

Сечение сферы, проходящее через точки касания, - это вписанная в треугольник ABC окружность.

Решение:

Вычислим радиус окружности, вписанной в треугольник.

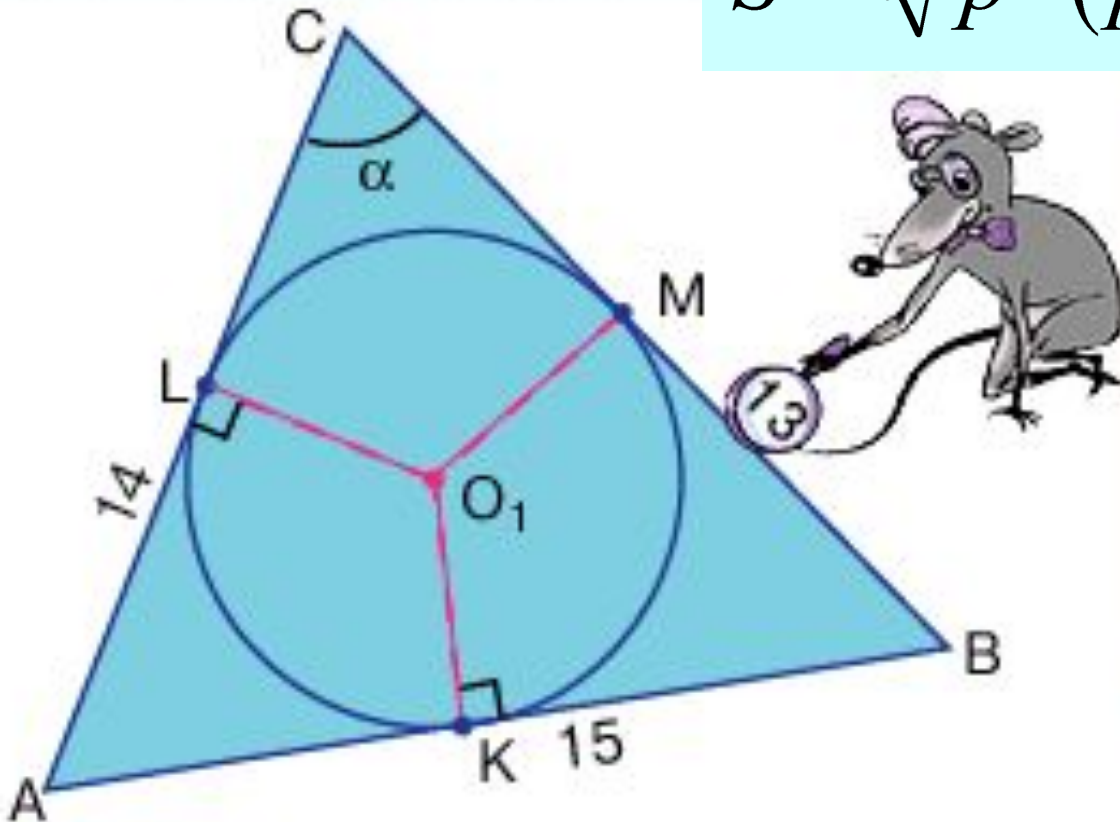
$$S = \sqrt{p \cdot (p - a)(p - b)(p - c)}$$

$$p = \frac{14 + 15 + 13}{2} = 21$$

$$S = 84$$

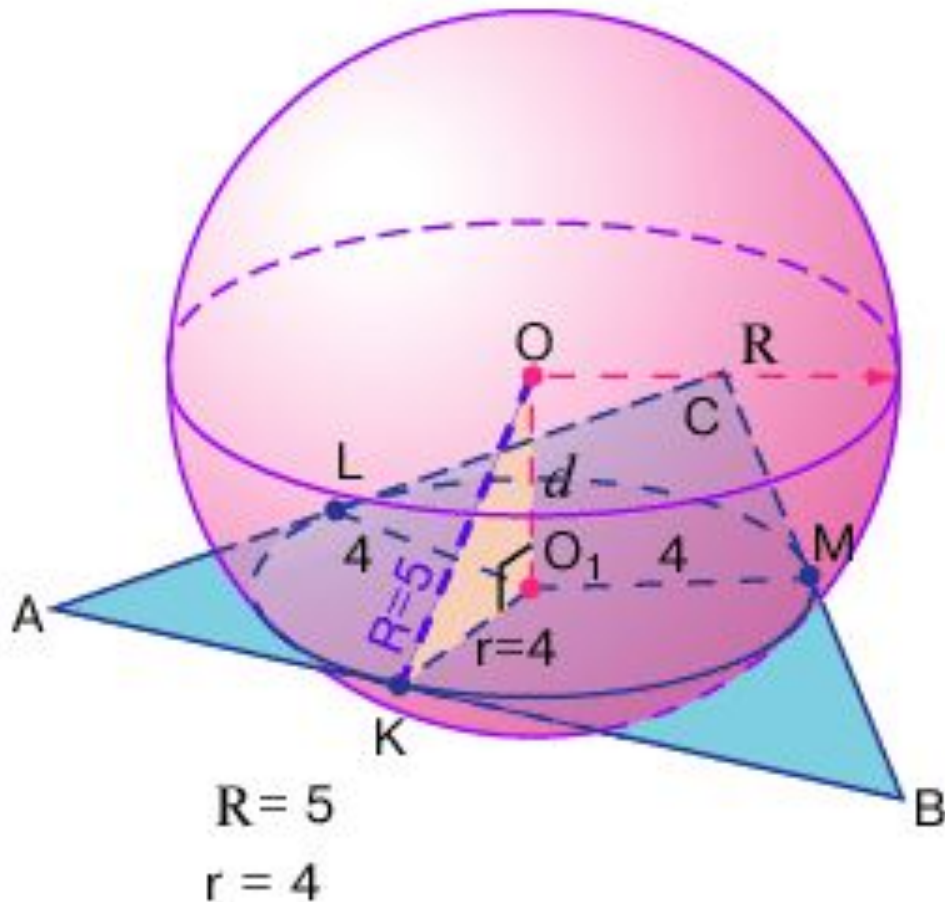
$$S = r \cdot p$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{84}{21} = 4$$



Решение:

*Зная радиус сечения и радиус шара, найдем
искомое расстояние.*



Из $\triangle OO_1K$:

$$R^2 = r^2 + d^2$$

$$d = \sqrt{R^2 - r^2} = 3$$

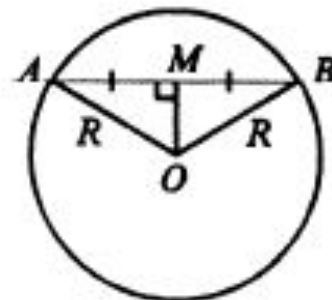
$$d(O, ABC) = 3 \text{ см}$$

Задача

574 Точка M — середина отрезка AB , концы которого лежат на сфере радиуса R с центром O . Найдите: а) OM , если $R = 50$ см, $AB = 40$ см; б) OM , если $R = 15$ мм, $AB = 18$ мм; в) AB , если $R = 10$ дм, $OM = 60$ см; г) AM , если $R = a$, $OM = b$.

Решение:

574. Проведем секущую плоскость через точки А, В и О. Сечение серы этой плоскостью будет окружностью радиуса R с центром в точке О. ОМ — медиана в равнобедренном $\triangle AOB$, поэтому $OM \perp AB$.



а) $R=50$ см, $AB=40$ см.

$$AM = \frac{1}{2} AB = 20 \text{ см.}$$

$$\text{Из } \triangle AOM: OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{R^2 - AM^2} = \sqrt{50^2 - 20^2} =$$

$$OM = \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ мм;}$$

в) $R=10$ дм, $OM=60$ см, найти AB . $OM=60$ см=6 дм.

$$AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ дм, } AB = 2AM = 16 \text{ дм;}$$

г) $R=a$, $OM=b$.

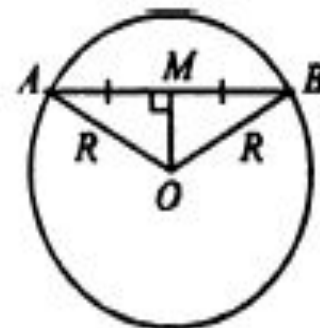
$$AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - OM^2} = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Задача

575 Точки A и B лежат на сфере радиуса R . Найдите расстояние от центра сферы до прямой AB , если $AB = m$.

Решение:

575. Проведем плоскость через точки A , B и точку O — центр сферы. В сечении получим окружность радиуса R , проходящая через центр сферы. В равнобедренном $\triangle OAB$ проведем $OM \perp AB$. OM — высота в равнобедренном треугольнике, таким образом, OM — медиана, $MA = MB = \frac{m}{2}$. OM — искомое расстояние.



$$OM = \sqrt{OA^2 - MA^2} = \sqrt{R^2 - \frac{m^2}{4}} = \frac{\sqrt{4R^2 - m^2}}{2}.$$

Задача

**Стороны треугольника 13 см, 14 см, 15 см.
Найти расстояние от плоскости
треугольника до центра шара,
касательного к сторонам треугольника.
Радиус шара 5 см.**

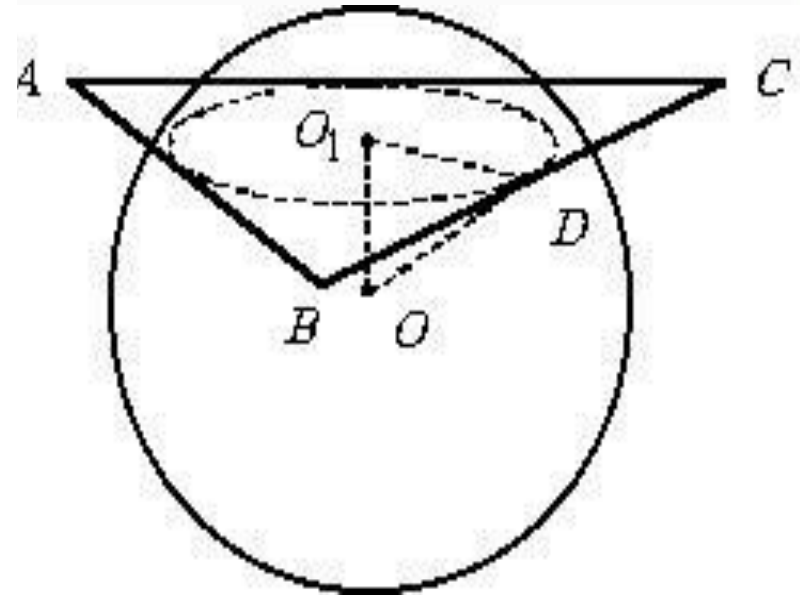
Решение:

Плоскость треугольника ABC пересекает поверхность шара по окружности, вписанной в треугольник ABC . Искомое расстояние – это расстояние между центром этой окружности O_1 и центром шара O .
Найдем радиус этой окружности O_1D по формуле

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$

где $p = \frac{AB + BC + AC}{2} = 21$

(см), $r = \frac{\sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}}{21} = 4$ (см).



Решение:

Треугольник O_1DO – прямоугольный, так как OO_1 перпендикулярно плоскости треугольника ABC , следовательно и любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Тогда $OO_1 = \sqrt{OD^2 - O_1D^2}$, где OD – радиус шара. $OO_1 = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см).

Ответ: 3 см.

Задача

578 Найдите координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением: а) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$; б) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 2$.

Решение:

578. а) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$.

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$, где R — радиус сферы, $(x_0; y_0; z_0)$ — координаты точки C , центра сферы. В нашем случае $x - x_0 = x$; $y - y_0 = y$; $z - z_0 = z$, поэтому $x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $z_0 = 0$,

а $R = \sqrt{49} = 7$. Координаты центра $(0; 0; 0)$, радиус: 7.

б) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 = 2$.

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$, $x - 3 = x - x_0$, $x_0 = 3$;

$y + 2 = y - y_0$, $y_0 = -2$; $z - z_0 = z$, $z_0 = 0$; $2 = R^2$, $R = \sqrt{2}$.

Координаты центра: $(3; -2; 0)$, радиус: $\sqrt{2}$.

Задача

579 Докажите, что каждое из следующих уравнений является уравнением сферы. Найдите координаты центра и радиус этой сферы: а) $x^2 - 4x + y^2 + z^2 = 0$; б) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 24$; в) $x^2 + 2x + y^2 + z^2 = 3$; г) $x^2 - x + y^2 + 3y + z^2 - 2z = 2,5$.

Решение:

$$579. \text{ а) } x^2 - 4x + y^2 + z^2 = 0,$$

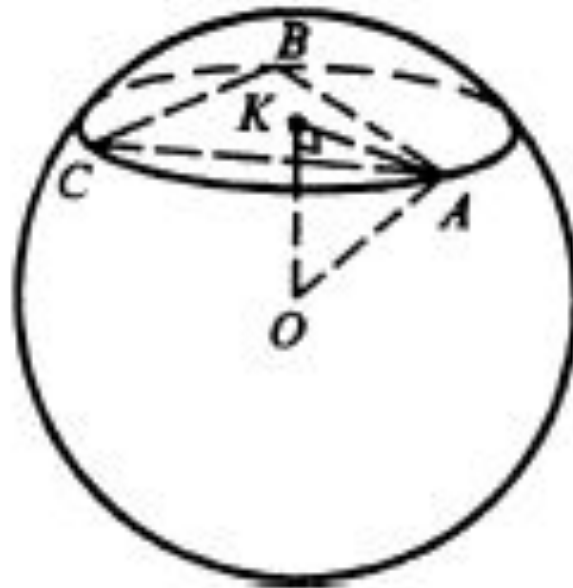
$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4 = (x^2 - 4x + 4) + y^2 + z^2 - 4 = 0,$$

$$(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 2^2 - \text{уравнение сферы.}$$

Координаты центра (2; 0; 0), радиус: 2;

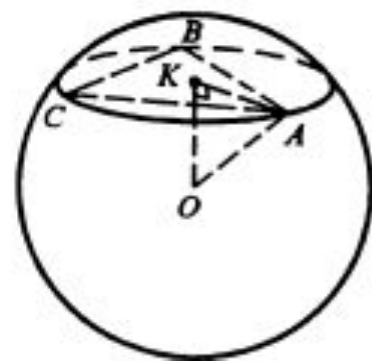
Задача

581 Вершины треугольника ABC лежат на сфере радиуса 13 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $AC = 10$ см.



Решение:

581. Плоскость треугольника ABC пересекает сферу с центром в точке O по окружности, которая описана около $\triangle ABC$. Из точки O проведем OK перпендикулярно плоскости ABC , OK — искомое расстояние, точка K — центр описанной около $\triangle ABC$ окружности. Соединим точку K с одной из вершин $\triangle ABC$, например, с A , проведем радиус в точку A .



$\triangle OKA$ — прямоугольный, тогда по теореме Пифагора:

$$OK = \sqrt{OA^2 - KA^2} = \sqrt{13^2 - AK^2}.$$

Найдем длину AK .

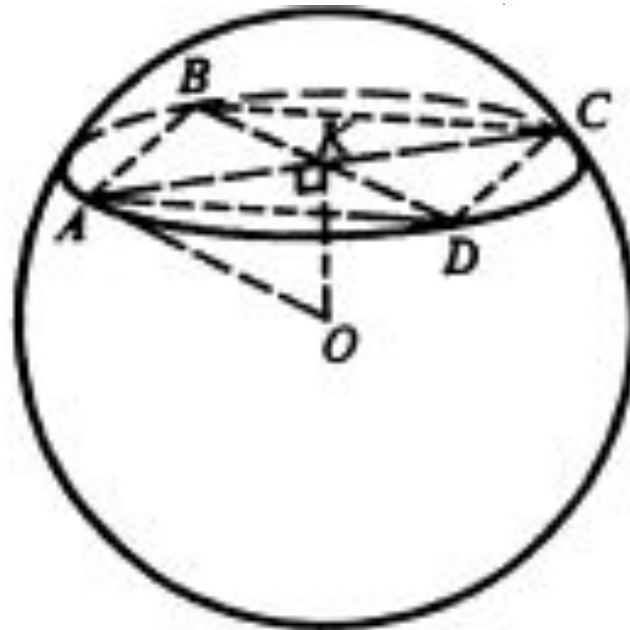
$$AK = \frac{AB \cdot CB \cdot CA}{4 \cdot S_{\triangle ABC}}, \quad S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - CA)},$$

$$p = \frac{6 + 8 + 10}{2} = 12, \quad S = \sqrt{12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} = \sqrt{6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} = 6 \cdot 2 \cdot 2 = 24 \text{ см}^2,$$

$$AK = \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{4 \cdot 24} = \frac{24 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5}{24 \cdot 4} = 5 \text{ см}, \quad OK = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ см}.$$

Задача

582 Вершины прямоугольника лежат на сфере радиуса 10 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости прямоугольника, если его диагональ равна 16 см.



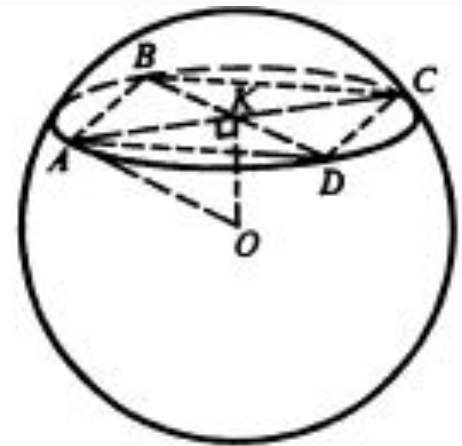
Решение:

582. Плоскость прямоугольника пересекает сферу по окружности, которая будет описанной около прямоугольника $ABCD$. Центр окружности находится в точке пересечения диагоналей прямоугольника. Пусть O — центр сферы, следовательно $OK \perp$ плоскости $ABCD$, OK — искомое расстояние.

Из прямоугольного $\triangle OKA$ вычислим OK :

$$OK = \sqrt{OA^2 - AK^2} = \sqrt{R^2 - AK^2}.$$

$$AK = \frac{16}{2} = 8 \text{ см}, \quad OK = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = 6 \text{ см}.$$





ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ:

- *Учебник Геометрия /Атанасян/
гл.6 §3 (п.58 – 60, 62) ,вопросы: 7 – 10
(стр.135 - 136)*
- Написать конспект с выполненными чертежами. Выучить определения всех основных понятий данного занятия.
- Все разобранные задачи в конспект.
- Решить прилагаемые задачи



ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ СТУДЕНТАМИ:



№	<i>Решите следующие задачи</i>
1.	Радиус сферы равен 2,6 дм. <i>Найдите длину линии пересечения сферы плоскостью, находящейся на расстоянии 2,4 дм от ее центра.</i>
2.	Сфера проходит через точку А (-3; 4; -2), а её центр находится в начале координат. <i>Составьте уравнение сферы.</i>
3.	Радиус шара 10 см. На расстоянии 8 см от его центра проведена плоскость. Вычислите площадь фигуры, являющейся их пересечением.