

**КОМПЛЕКСНЫЕ КОРНИ КВАДРАТНЫХ
УРАВНЕНИЙ**
ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ

ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ

- 12.2.2.1 находить комплексные корни квадратных уравнений



КРИТЕРИЙ УСПЕХА

- решает квадратные уравнения с комплексными корнями

ФРОНТАЛЬНАЯ РАБОТА (1,3,5,7,9)

ДОМАШНЯЯ РАБОТА (2,4,6,8,10)

Exercise 2

Solve the following quadratics with complex numbers:

1. $2x^2 - 6x + 5 = 0$

2. $8x^2 - 4x + 5 = 0$

3. $-5x^2 + 12x - 8 = 0$

4. $-x^2 + 4x - 5 = 0$

5. $5x^2 + 8x + 5 = 0$

6. $5x^2 + 12x + 8 = 0$

7. $-6x^2 + 12x - 7 = 0$

8. $2x^2 - 6x + 7 = 0$

9. $-7x^2 + 12x = 10$

10. $5x^2 + 8x = -4$

Factorise the following over the complex number field.

(a) $x^2 - 6x + 10$

(b) $x^2 + 4x + 13$

(c) $x^2 - 2x + 2$

(d) $z^2 + 4z + 5$

(e) $z^2 - 3z + 4$

(f) $z^2 + 10z + 30$

(g) $4w^2 + 4w + 17$

(h) $3w^2 - 6w + 6$

(i) $-2w^2 + 8w - 11$

Solutions

1. (a) $(x - 3 + i)(x - 3 - i)$ (b) $(x + 2 + 3i)(x + 2 - 3i)$ (c) $(x - 1 + i)(x - 1 - i)$

(d) $(z + 2 + i)(z + 2 - i)$ (e) $\left(z - \frac{(3 + \sqrt{7}i)}{2}\right)\left(z - \frac{(3 - \sqrt{7}i)}{2}\right)$ (f) $(z + 5 + \sqrt{5}i)(z + 5 - \sqrt{5}i)$

(g) $4\left(w + \frac{1 - 4i}{2}\right)\left(w + \frac{1 + 4i}{2}\right)$ (h) $3(w - 1 + i)(w - 1 - i)$ (i) $-2\left(w - 2 - \frac{\sqrt{6}i}{2}\right)\left(w - 2 + \frac{\sqrt{6}i}{2}\right)$

ИНДИВИДУАЛЬНАЯ РАБОТА

Solve the following quadratic equations without using the discriminant.

i. $z^2 + 4iz - 13 = 0$

Solve the following equations.

i. $z^2 - z - 1 + 3i = 0$

Solve the following equations.

i. $z^2 - (1 - 4i)z - (5 - i) = 0$

Основная теорема алгебры и ее следствия

Основная теорема алгебры. Всякий многочлен, степень которого не меньше единицы, имеет хотя бы один корень, в общем случае комплексный.

Следствие 1. Любой многочлен $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ степени $n > 1$ с комплексными коэффициентами $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \neq 0$ можно представить в виде произведения линейных двучленов:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (z - z_s)^{k_s}, \quad (\text{B.13})$$

Следствие 2. Если многочлены $p(z)$ и $q(z)$, степени которых не превосходят n , имеют равные значения более чем при n различных значениях переменной z , то эти многочлены равны: $p(z) = q(z)$.

Следствие 3. Если комплексное (но не действительное) число c — корень многочлена $p(c)$ с действительными коэффициентами, то сопряженное число $\bar{c}$ является его корнем той же кратности.

Следствие 4. Всякий многочлен $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ с действительными коэффициентами представляется в виде произведения линейных двучленов и квадратных трехчленов (с отрицательными дискриминантами):

$$\begin{aligned} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = & a_n \cdot (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - x_s)^{k_s} \cdot \\ & \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \cdot (x^2 + p_2 x + q_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_r x + q_r)^{m_r}, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

где $x_1, x_2, \dots, x_s$ — действительные корни кратности $k_1, k_2, \dots, k_s$, причем $k_1 + k_2 + \dots + k_s + 2m_1 + 2m_2 + \dots + 2m_r = n$.

Следствие 5. Многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами всегда имеет хотя бы один действительный корень.

Многочлен четной степени с действительными коэффициентами может не иметь действительных корней (при этом в разложении (B. 14) отсутствуют линейные двучлены $(x - x_1), (x - x_2), \dots, (x - x_s)$).

Пример В.14. Многочлен $p(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 21x - 10$

а) представить в виде (В.14);

б) представить в виде (В.13).

COMPLEX NUMBERS

You can solve some types of polynomial equation with real coefficients

Given that -1 is a root of the equation:

$$x^3 - x^2 + 3x + k = 0$$

Find the other two roots of the equation.

(level C)

6. Given that 2 and $5 + 2i$ are roots of the equation

$$x^3 - 12x^2 + cx + d = 0, \quad c, d \in \mathbb{R},$$

- (a) write down the other complex root of the equation. (1)
- (b) Find the value of c and the value of d . (5)
- (c) Show the three roots of this equation on a single Argand diagram. (2)
- (Total 8 marks)