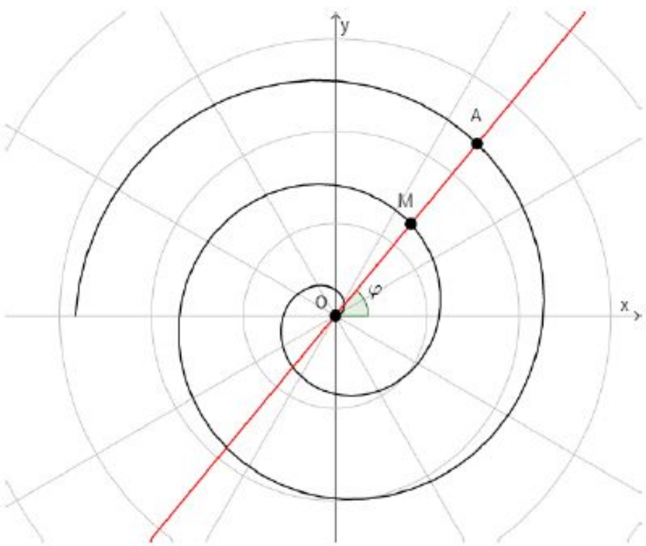
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

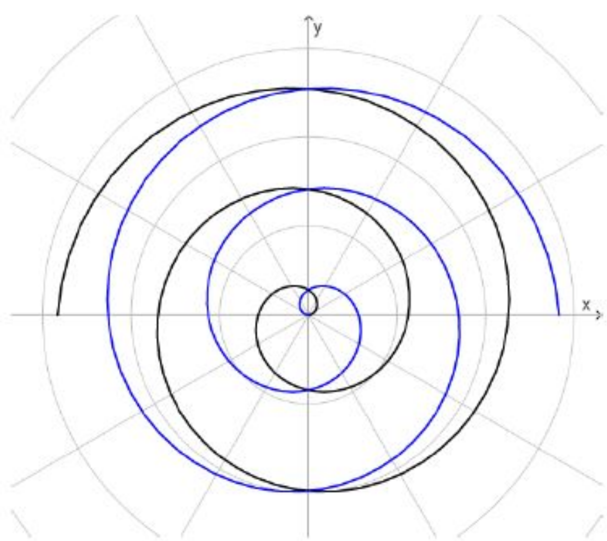
Специальные (замечательные) кривые

Санкт-Петербург, 2017

СПИРАЛИ: СПИРАЛЬ АРХИМЕДА (ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО)

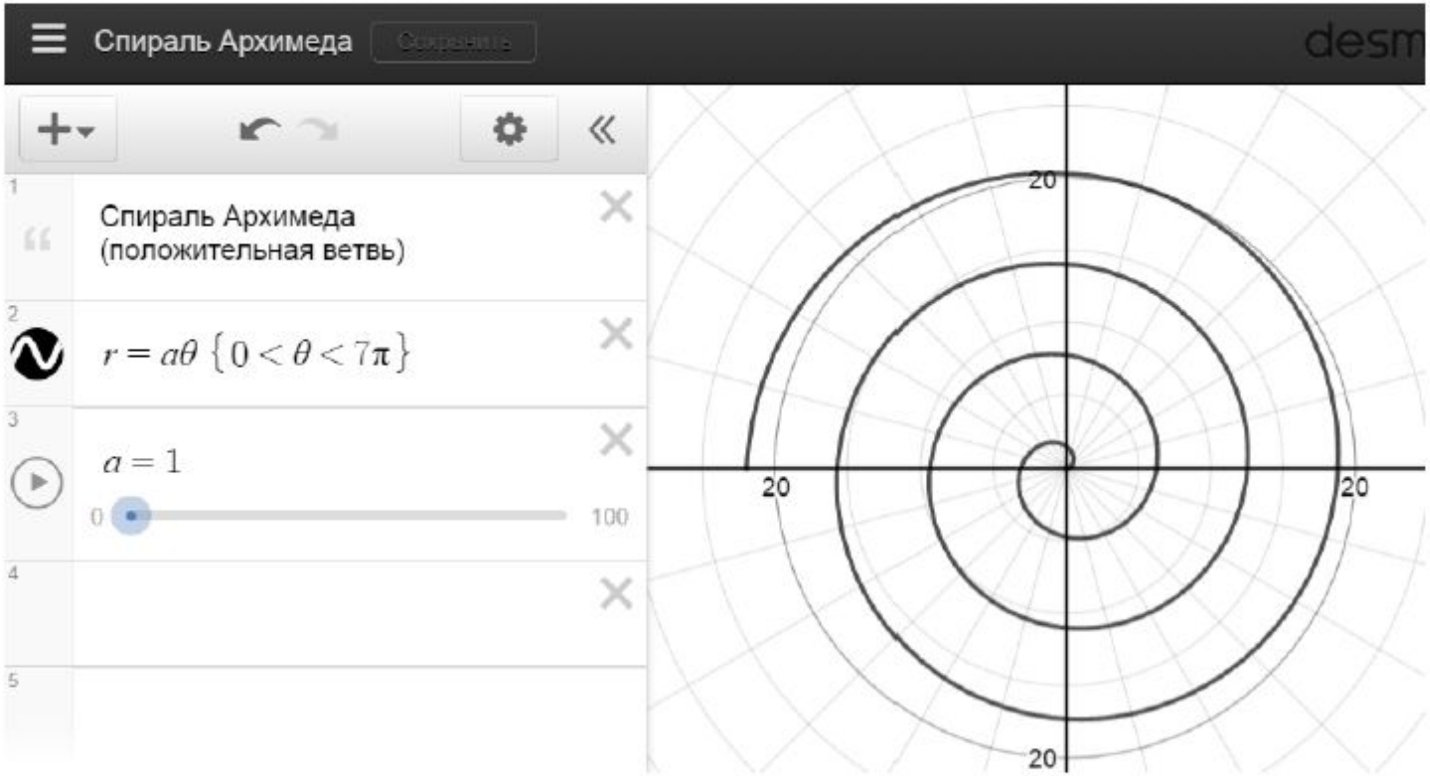
Это траектория точки M, равномерно движущейся по лучу OA в направлении от т. O к т. A. Сам луч OA при этом равномерно вращается вокруг т. O по часовой или против часовой стрелки (поэтому спираль Архимеда состоит из двух ветвей, симметричных относительно оси Oy - одна ветвь получается при $\varphi > 0$, вторая - при $\varphi < 0$ (кривая чёрного и синего цвета соответственно). Расстояние между двумя соседними точками, лежащими на одном полярном луче, постоянно и равно $2\pi a$ ($AM = 2\pi a$).





https://www.desmos.com/calculator/qkketvoanb

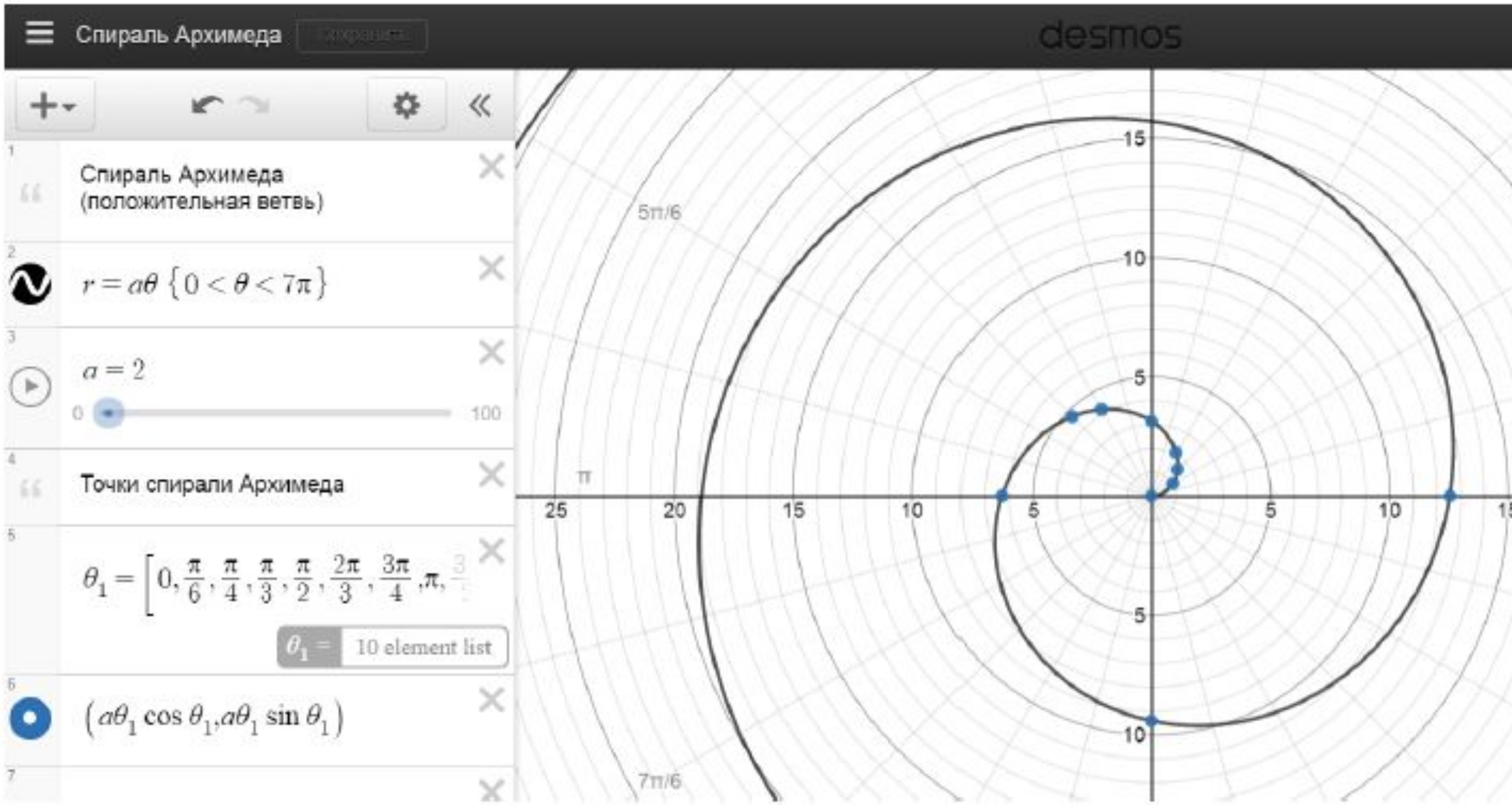
график спирали Архимеда (положительной ветви), заданной уравнением $r = a\varphi, a > 0$:



СПИРАЛИ: СПИРАЛЬ АРХИМЕДА

https://www.desmos.com/calculator/bl6xjpnfhg

построение спирали Архимеда по точкам.



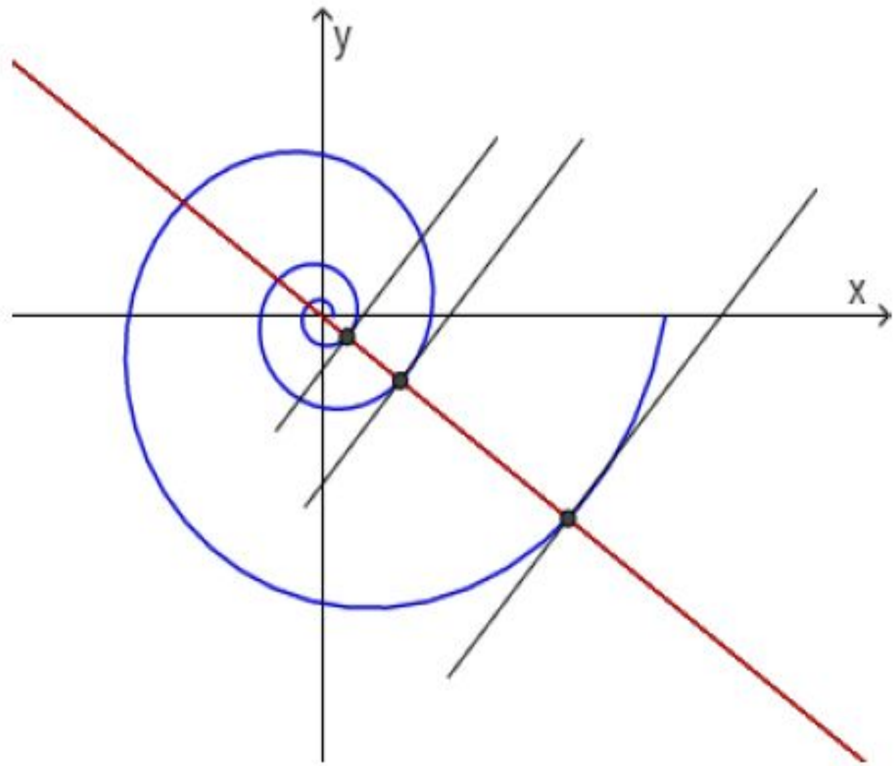
СПИРАЛИ: ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ СПИРАЛЬ

Я. Бернулли (1655-1705) – он назвал её **spira mirabilis** («дивная спираль») и открыл её свойство оставаться неизменной при различных преобразованиях. Это свойство настолько его поразило, что на своей могильной плите он приказал нарисовать spira mirabilis с надписью **Eadem mutata resurgo** - **«Изменённая, воскресаю прежней»**.

СПИРАЛИ: ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ СПИРАЛЬ (ПРИМЕРЫ В ПРИРОДЕ)

СПИРАЛИ: ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ СПИРАЛЬ (ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО)

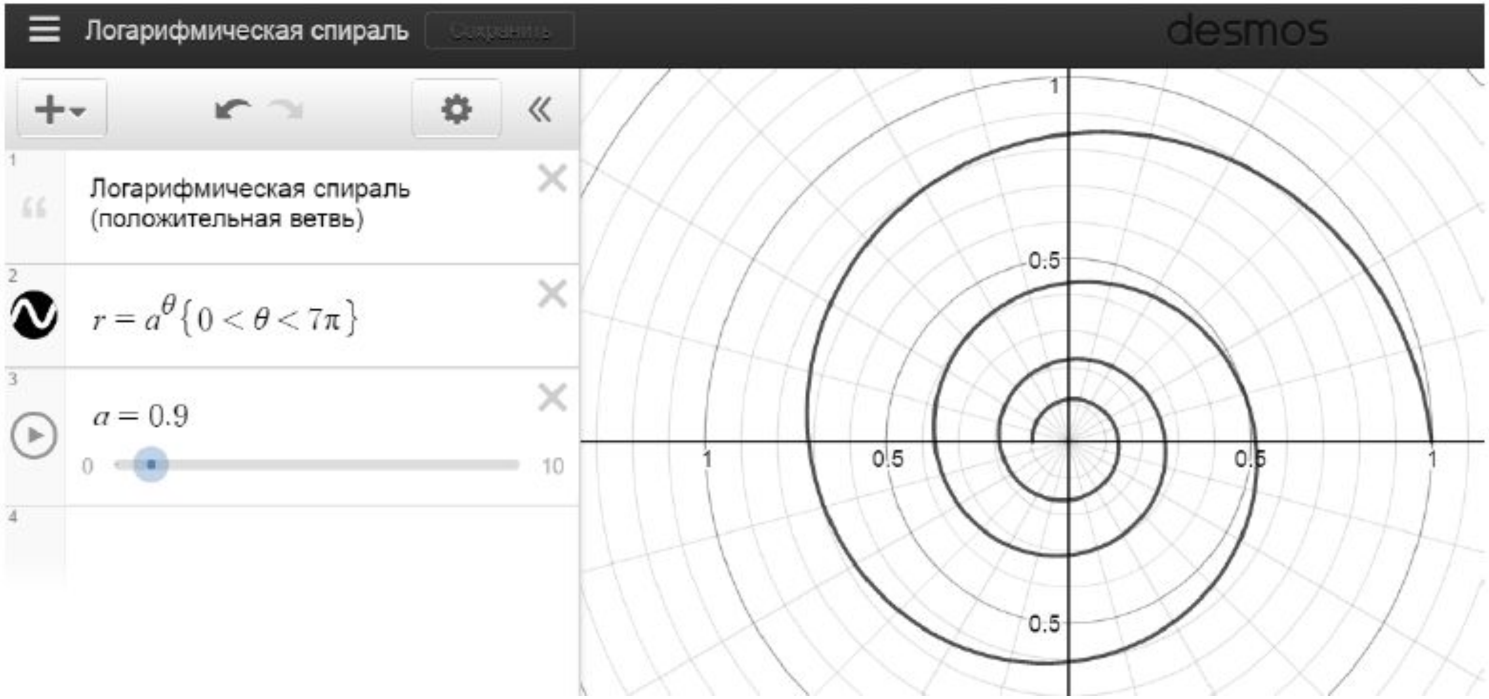
Это кривая, пересекающая все лучи, выходящие из полюса т.О под некоторым постоянным углом α. Радиус-векторы последовательных точек спирали, находящихся на одном и том же полярном луче φ, образуют геометрическую прогрессию.



СПИРАЛИ: ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ СПИРАЛЬ

https://www.desmos.com/calculator/wdb4t8irny

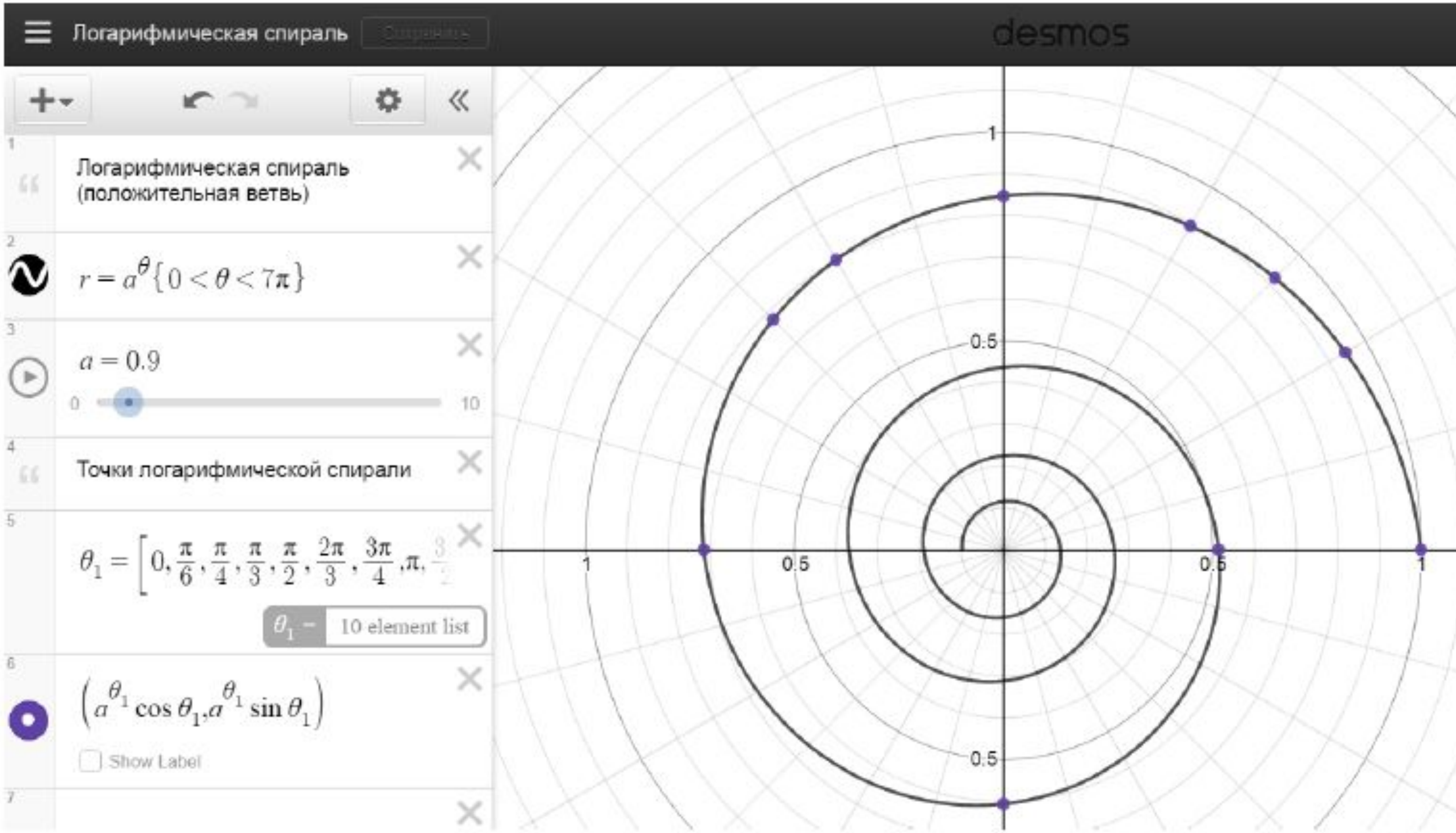
график логарифмической спирали (положительной ветви), заданной уравнением $r = a^{\varphi}, a > 0$



СПИРАЛИ: ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ СПИРАЛЬ

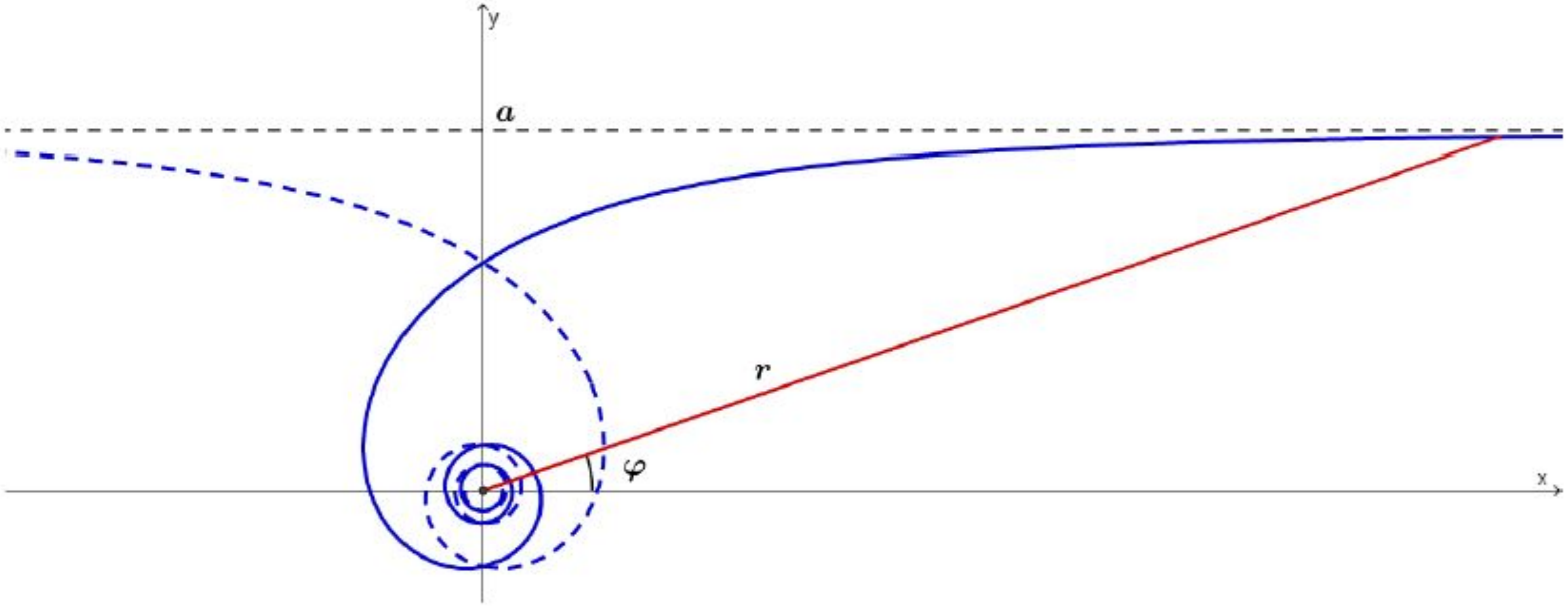
https://www.desmos.com/calculator/4xkwxzeorh

построение логарифмической спирали по точкам.



СПИРАЛИ: ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ СПИРАЛЬ (ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО)

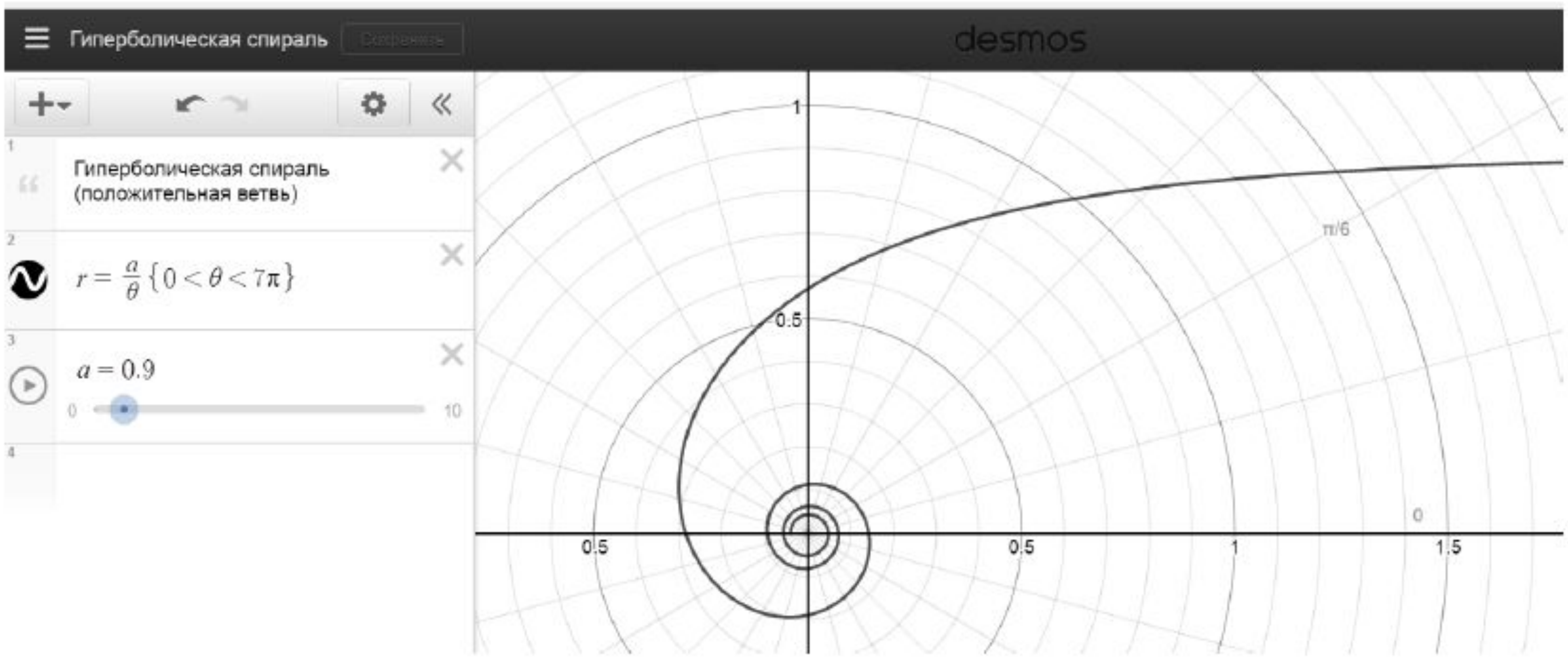
Это траектория точки, движущейся с постоянной скоростью v к полюсу т.О по лучу, вращающемуся вокруг полюса с постоянной угловой скоростью ω ($a = \frac{v}{\omega}$). Кривая состоит из 2-х ветвей, симметричных относительно оси Oy - одна ветвь получается при $\varphi > 0$, вторая - при $\varphi < 0$ (сплошная и пунктирная линии соответственно). Гиперболическая спираль имеет асимптоту $y = a$ и асимптотическую точку – полюс.



СПИРАЛИ: ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ СПИРАЛЬ

https://www.desmos.com/calculator/dqwsooneit

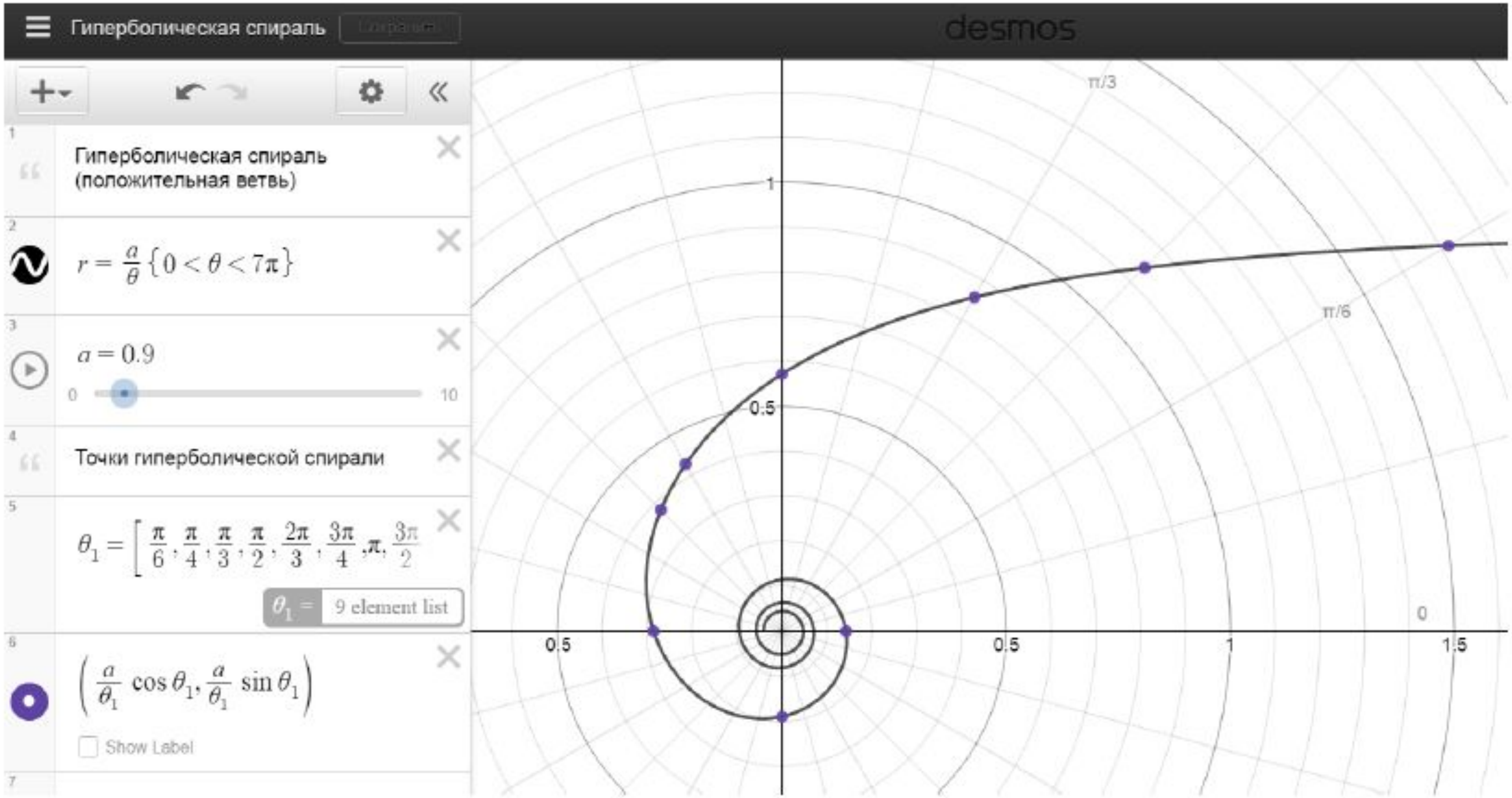
график гиперболической спирали (положительной ветви), заданной уравнением $r = \dfrac{a}{\varphi}, a > 0$.



СПИРАЛИ: ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ СПИРАЛЬ

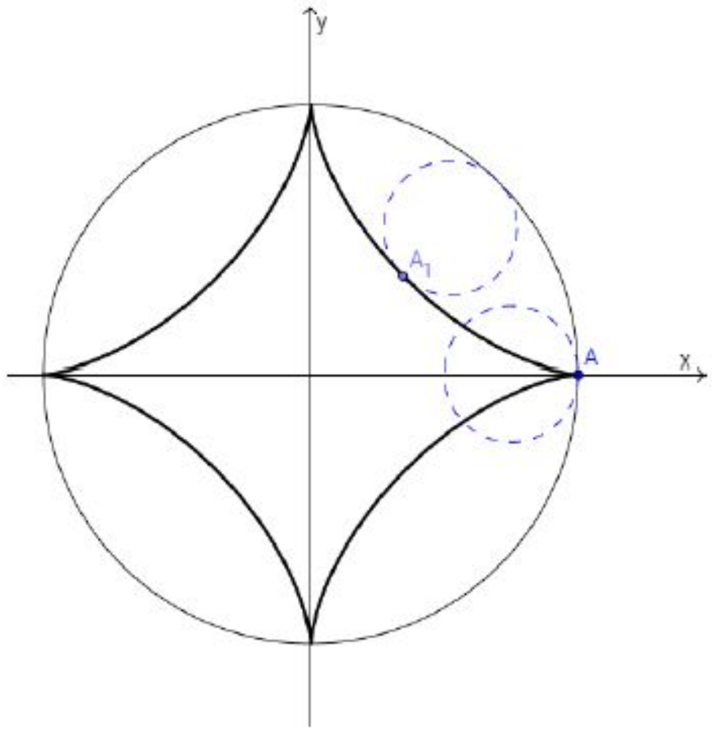
https://www.desmos.com/calculator/dwutsctmh9

построение гиперболической спирали по точкам



АСТРОИДА (ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО)

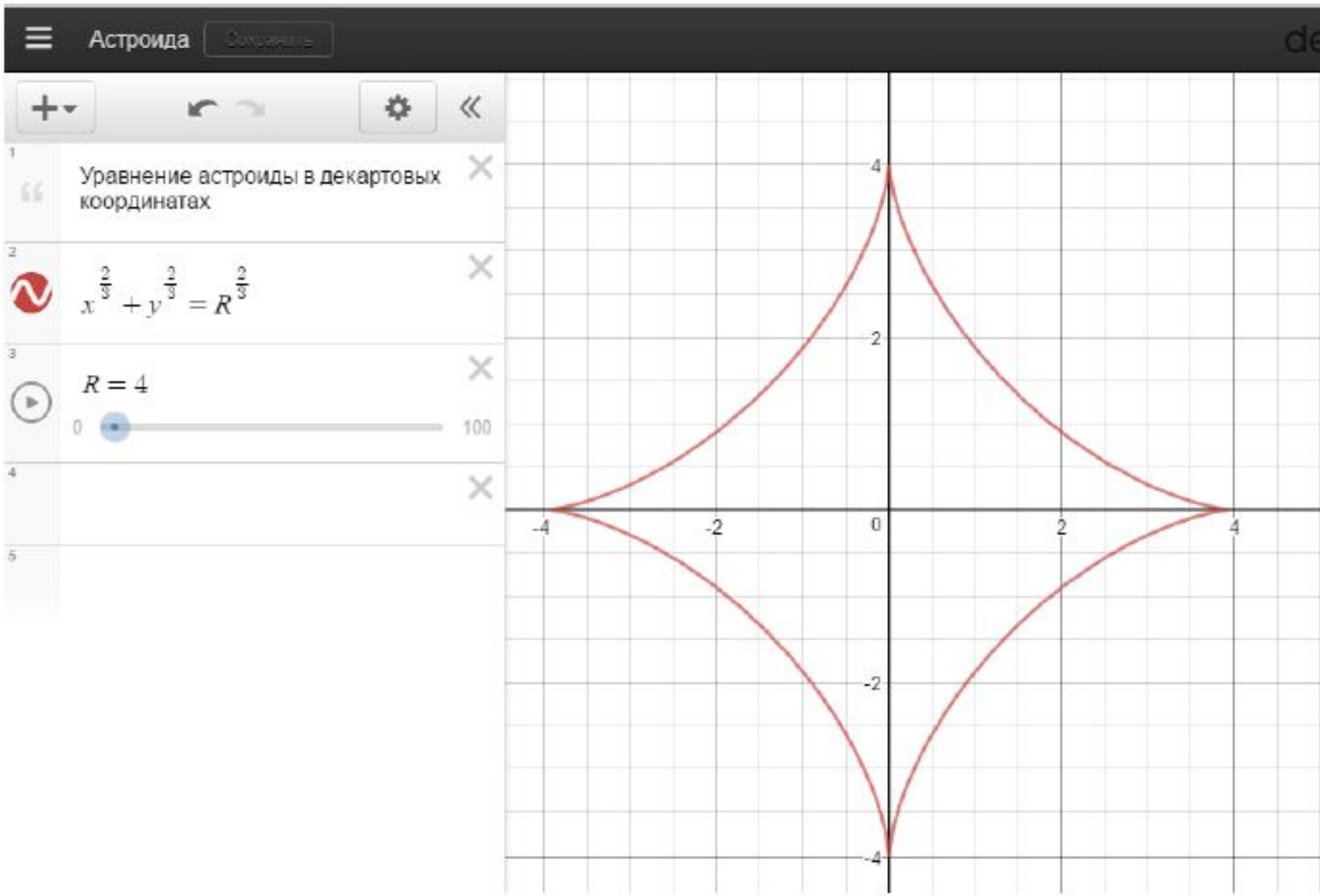
Астроида - это траектория точки, лежащей на окружности круга радиуса $r = a$, который катится по внутренней стороне другого, неподвижного круга радиуса $R = 4a$:



АСТРОИДА

https://www.desmos.com/calculator/ozlhamoh95

график уравнения астроиды, заданной уравнением $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$:

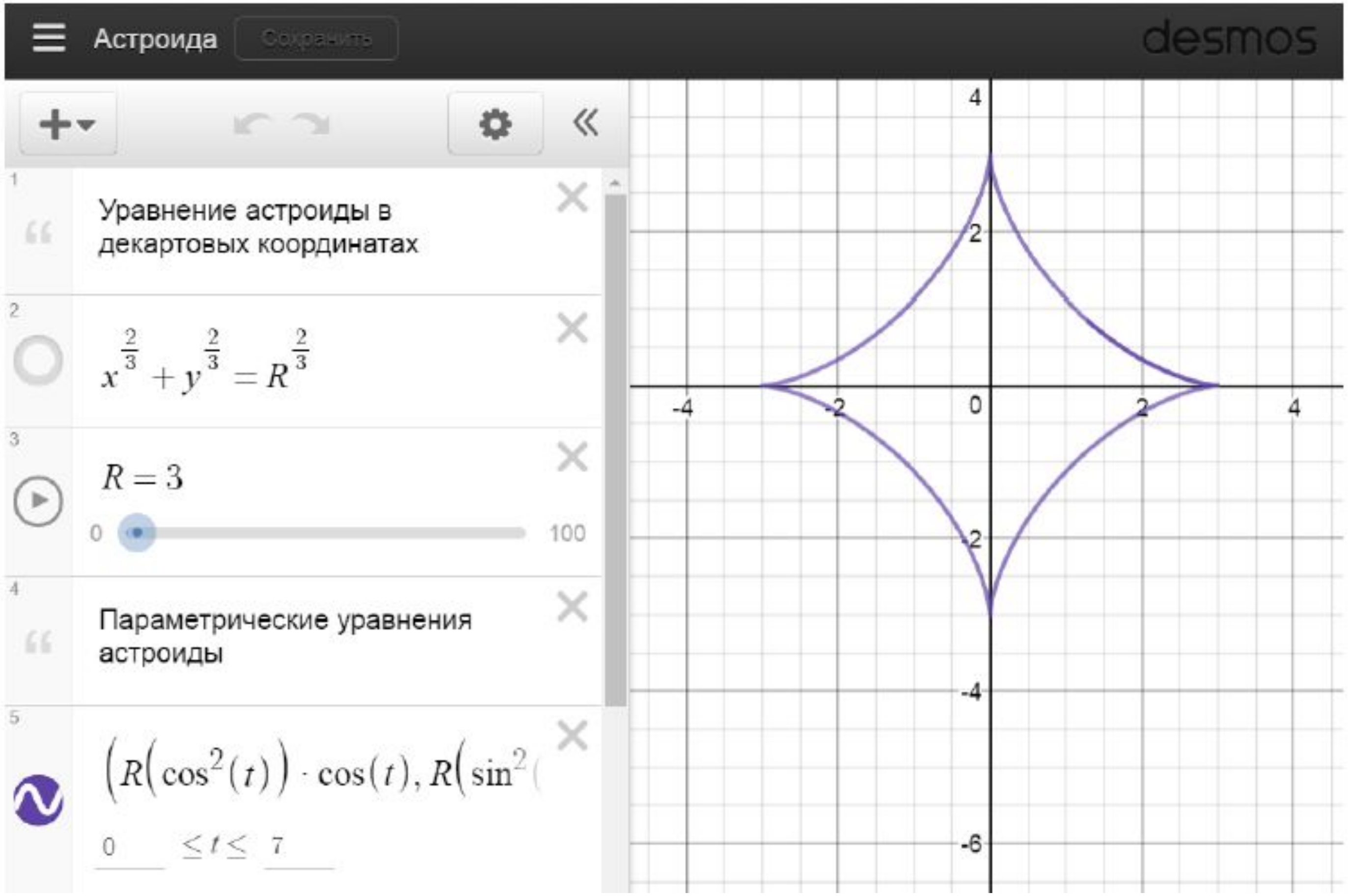


АСТРОИДА

https://www.desmos.com/calculator/s4ju6ojgyn

график астроиды, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = R\cos^3 t \\ y = R\sin^3 t \end{cases}, \quad R \in (0,+\infty), t \in [0,2\pi]$$

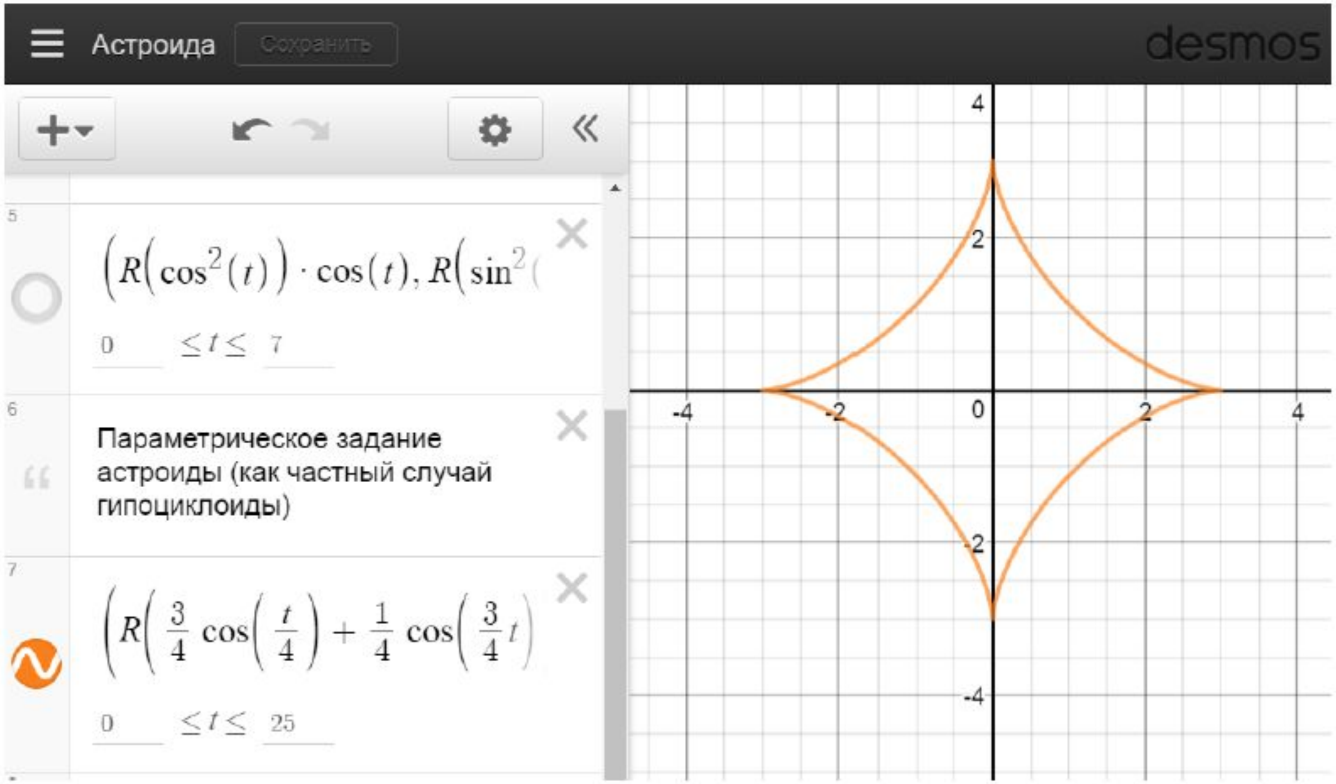


АСТРОИДА

https://www.desmos.com/calculator/io3rtegl0k

При $a=1$ и $b=\dfrac{1}{4}$ мы получаем параметрическое уравнение астроиды как частный случай ***гипоциклоиды:***

$$\begin{cases} x = R\left(\dfrac{3}{4}\cos\dfrac{t}{4} + \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{3t}{4}\right) \\ y = R\left(\dfrac{3}{4}\sin\dfrac{t}{4} - \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{3t}{4}\right) \end{cases},$$



ГИПОЦИКЛОИДА (ВИДЫ)

Задаётся параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = R\left[(1-\mathrm{b})\cos(bt) + ab\cdot\cos\left((1-b)t\right)\right] \\ y = R\left[(1-b)\sin(bt) - ab\cdot\sin\left((1-b)t\right)\right] \end{cases}; a,b \in (0,+\infty).$$

При этом при различных значениях параметра a получаем различные виды гипоциклоид.

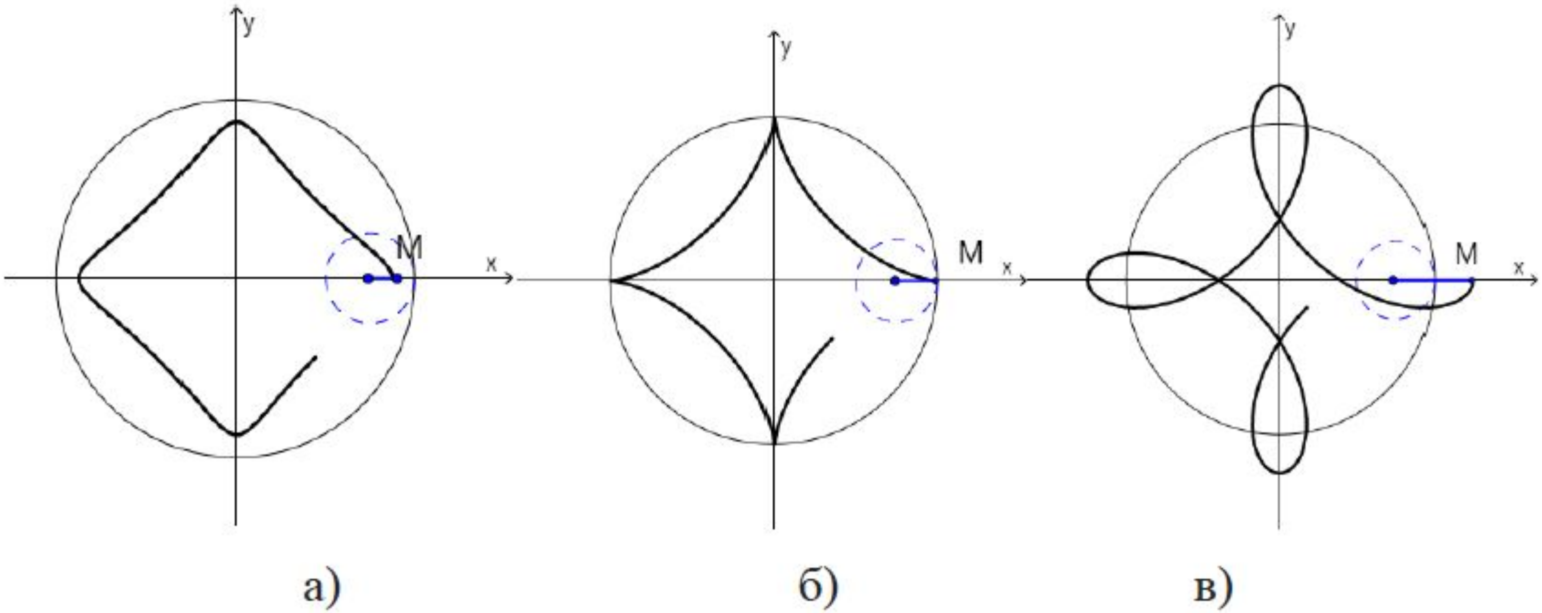
При $a=1$ - это просто ***гипоциклоида***, при $0<a<1$ - ***укороченная гипоциклоида,*** при $a>1$ - ***удлинённая гипоциклоида.*** Различия в получаемых кривых связаны с их характеристическим свойством.

Замечание: Укороченную и удлинённую гипоциклоиды называют ***гипотрохоидами.*** При определённых значениях параметров a и b гипоциклоиды вырождаются в известные специальные кривые.

ГИПОЦИКЛОИДА (ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО)

Это траектория точки M, жёстко связанной с производящей окружностью радиуса $r = bR$, которая катится по внутренней стороне неподвижной окружности радиуса R. Точка M находится на расстоянии $l = abR$ от центра производящей окружности - от этого зависит вид гипоциклоиды.

В частности, при $a = 1$ точка M лежит на производящей окружности.



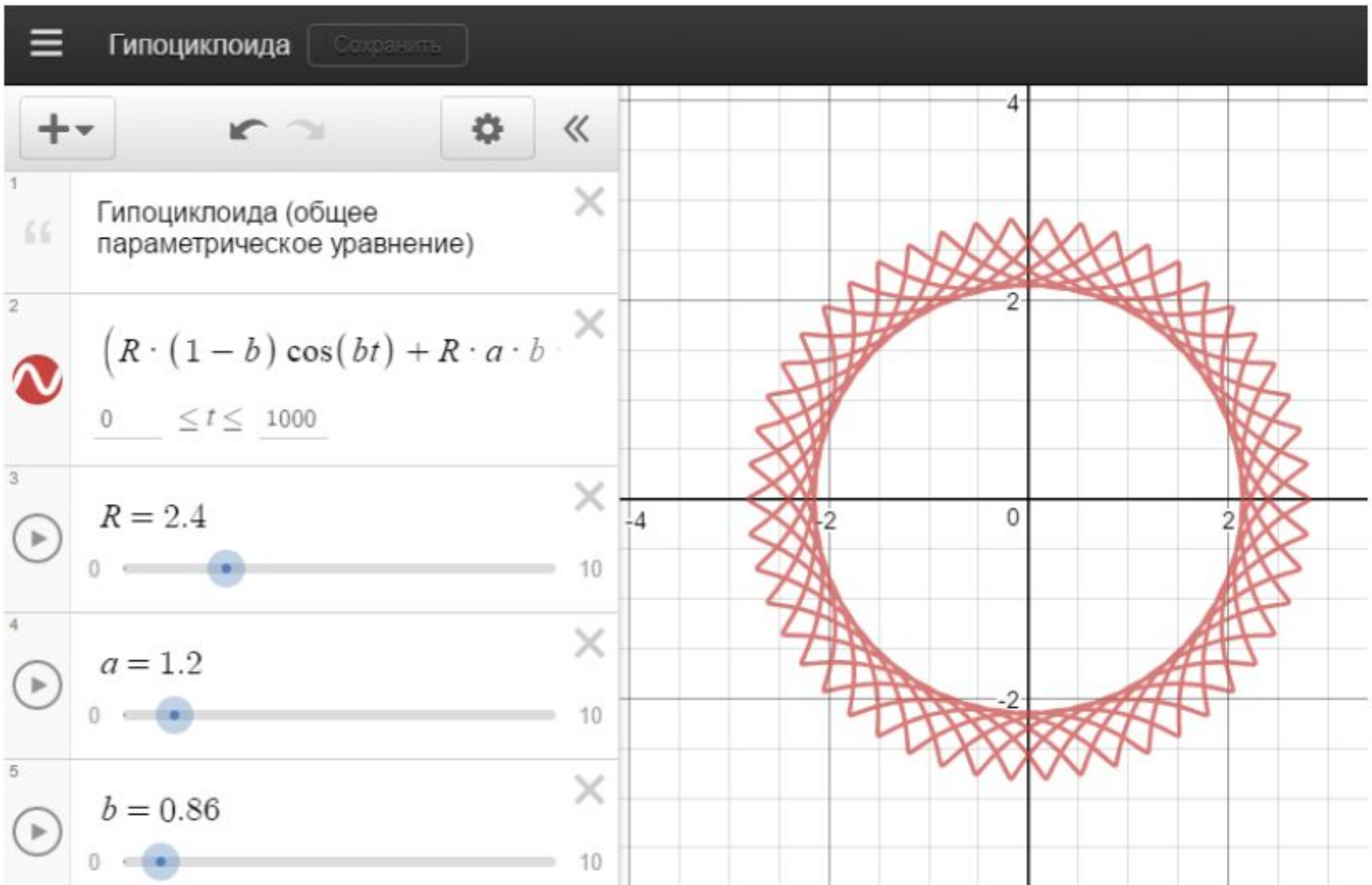
Укороченная гипоциклоида а), гипоциклоида б), удлинённая гипоциклоида в).

ГИПОЦИКЛОИДА

https://www.desmos.com/calculator/elyxqyrg7t

график гипоциклоиды, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} x = R\left[(1-b)\cos(bt) + ab\cdot\cos\left((1-b)t\right)\right] \\ y = R\left[(1-b)\sin(bt) - ab\cdot\sin\left((1-b)t\right)\right] \end{cases};\ a,b \in (0,+\infty).$$

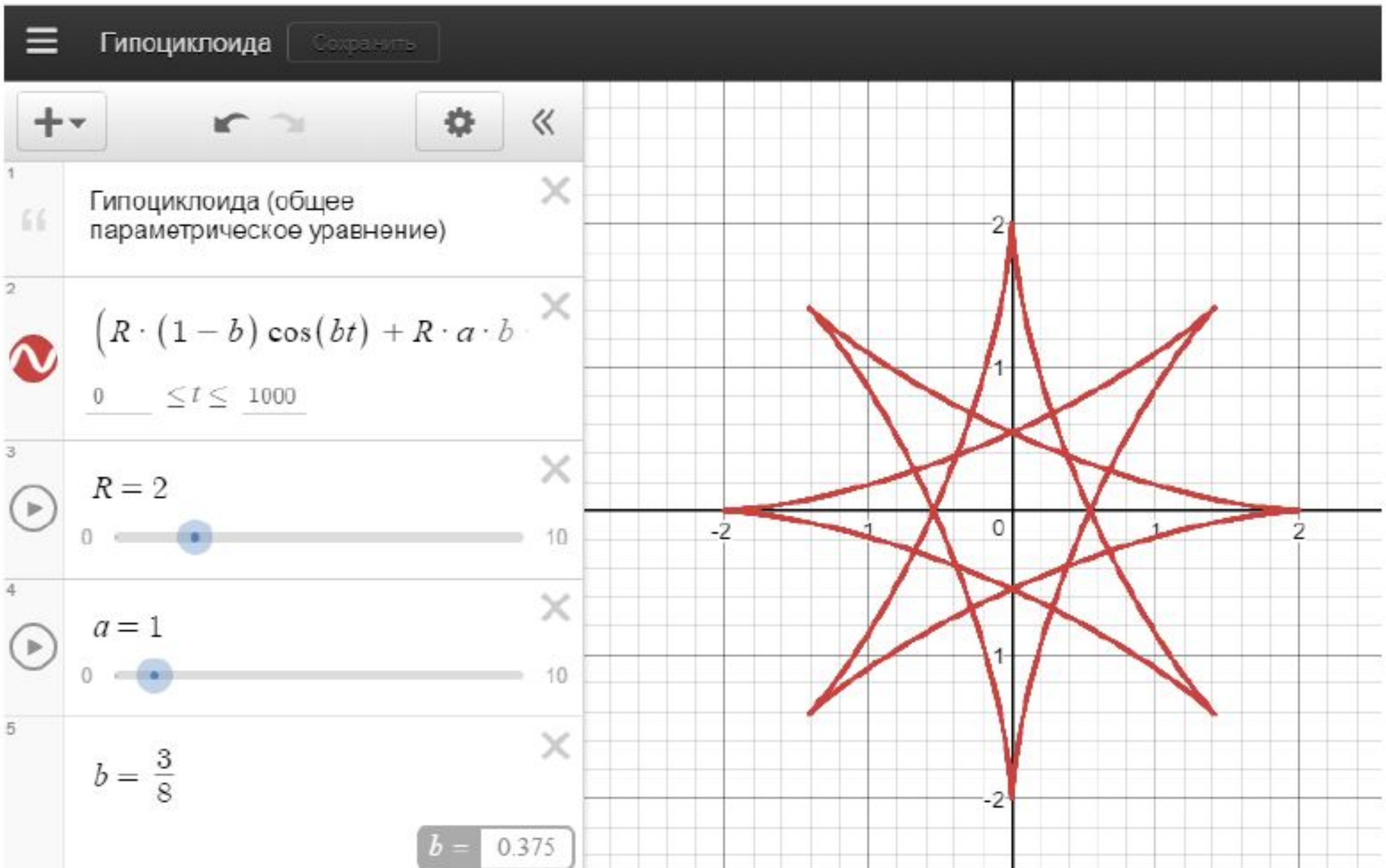


ГИПОЦИКЛОИДА

https://www.desmos.com/calculator/3yrvyiraec

график гипоциклоиды, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} x = R\left[(1-b)\cos(bt) + ab\cdot\cos\left((1-b)t\right)\right] \\ y = R\left[(1-b)\sin(bt) - ab\cdot\sin\left((1-b)t\right)\right] \end{cases}; a, b \in (0, +\infty).$$

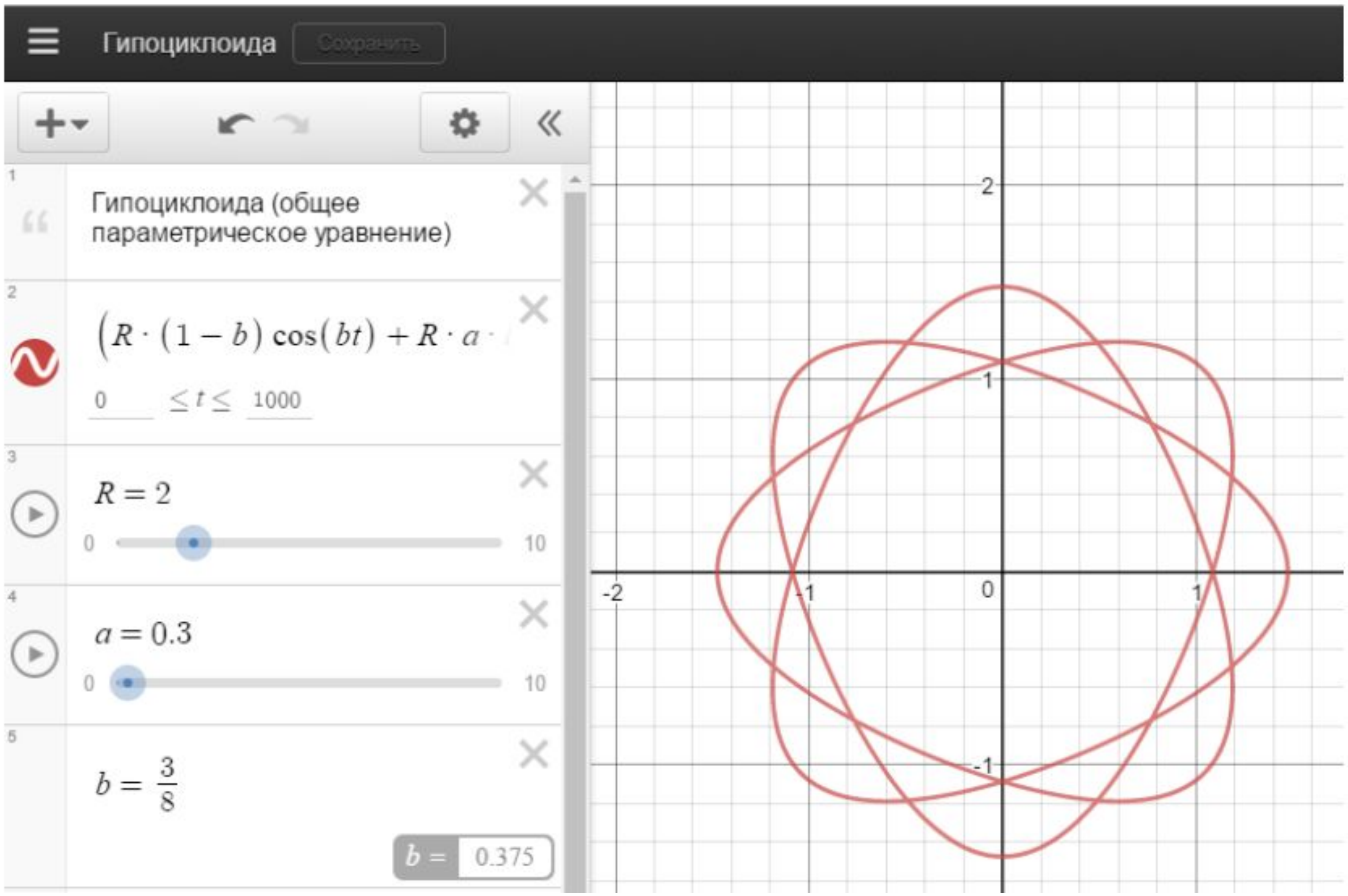


ГИПОЦИКЛОИДА

https://www.desmos.com/calculator/h9u6d1qc1n

график гипоциклоиды, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} x = R\left[(1-b)\cos(bt) + ab\cdot\cos\left((1-b)t\right)\right] \\ y = R\left[(1-b)\sin(bt) - ab\cdot\sin\left((1-b)t\right)\right] \end{cases}; a, b \in (0, +\infty).$$

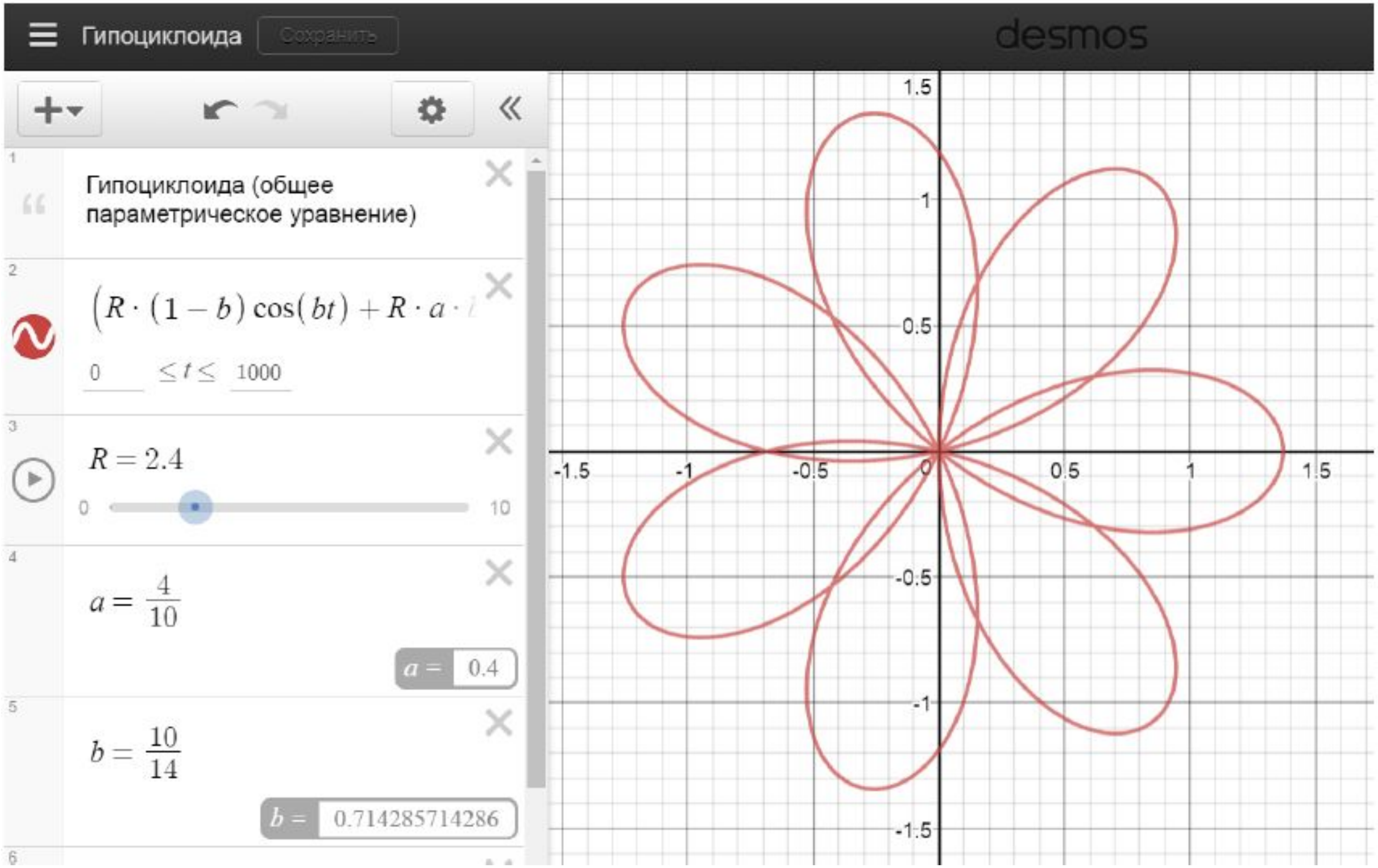


ГИПОЦИКЛОИДА

https://www.desmos.com/calculator/0ugx8gtu7w

график гипоциклоиды, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} x = R\left[(1-b)\cos(bt) + ab\cdot\cos\left((1-b)t\right)\right] \\ y = R\left[(1-b)\sin(bt) - ab\cdot\sin\left((1-b)t\right)\right] \end{cases};\ a,b\in(0,+\infty).$$

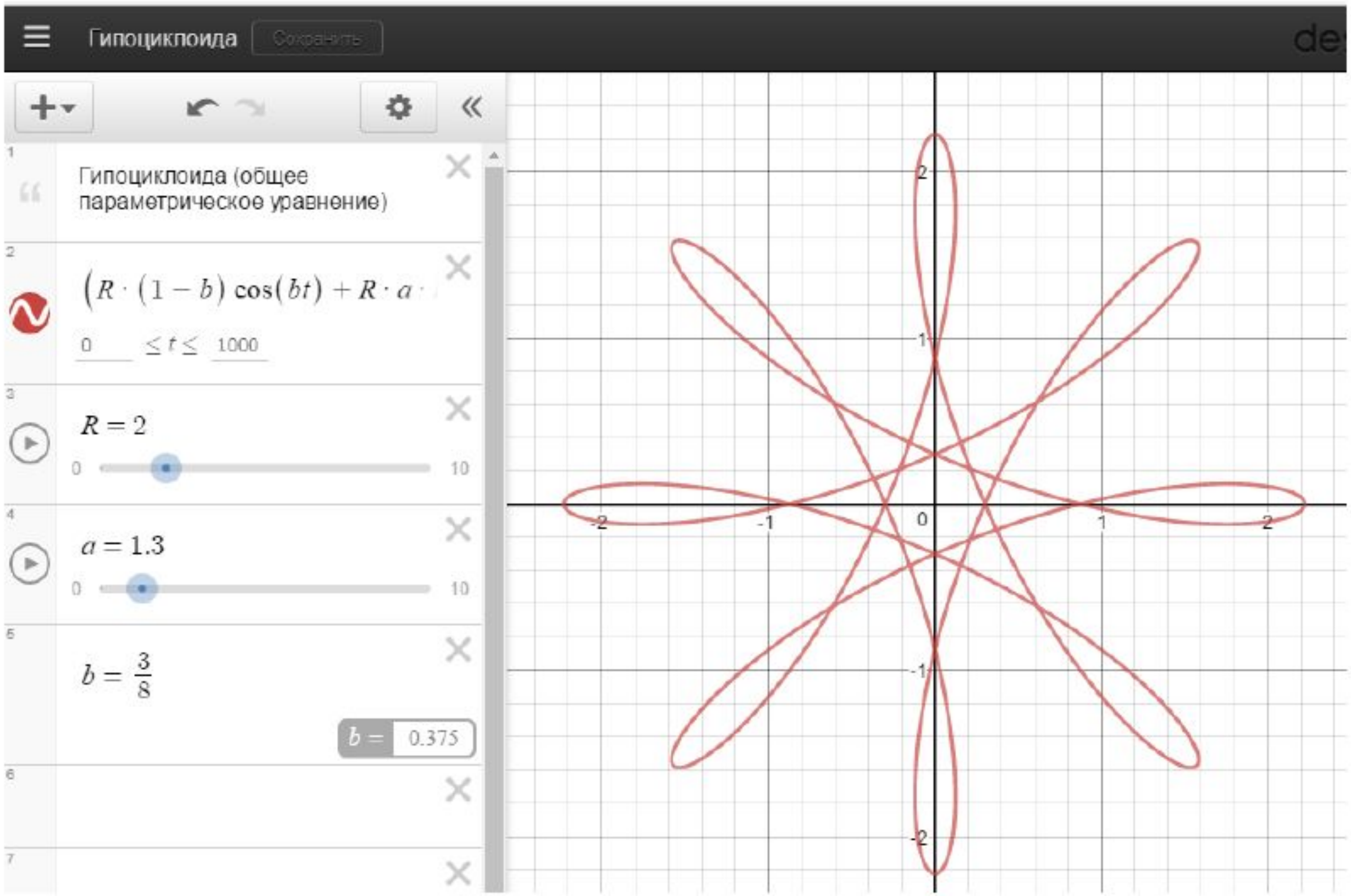


ГИПОЦИКЛОИДА

https://www.desmos.com/calculator/pbnvd3ql2x

график гипоциклоиды, заданной уравнениями:

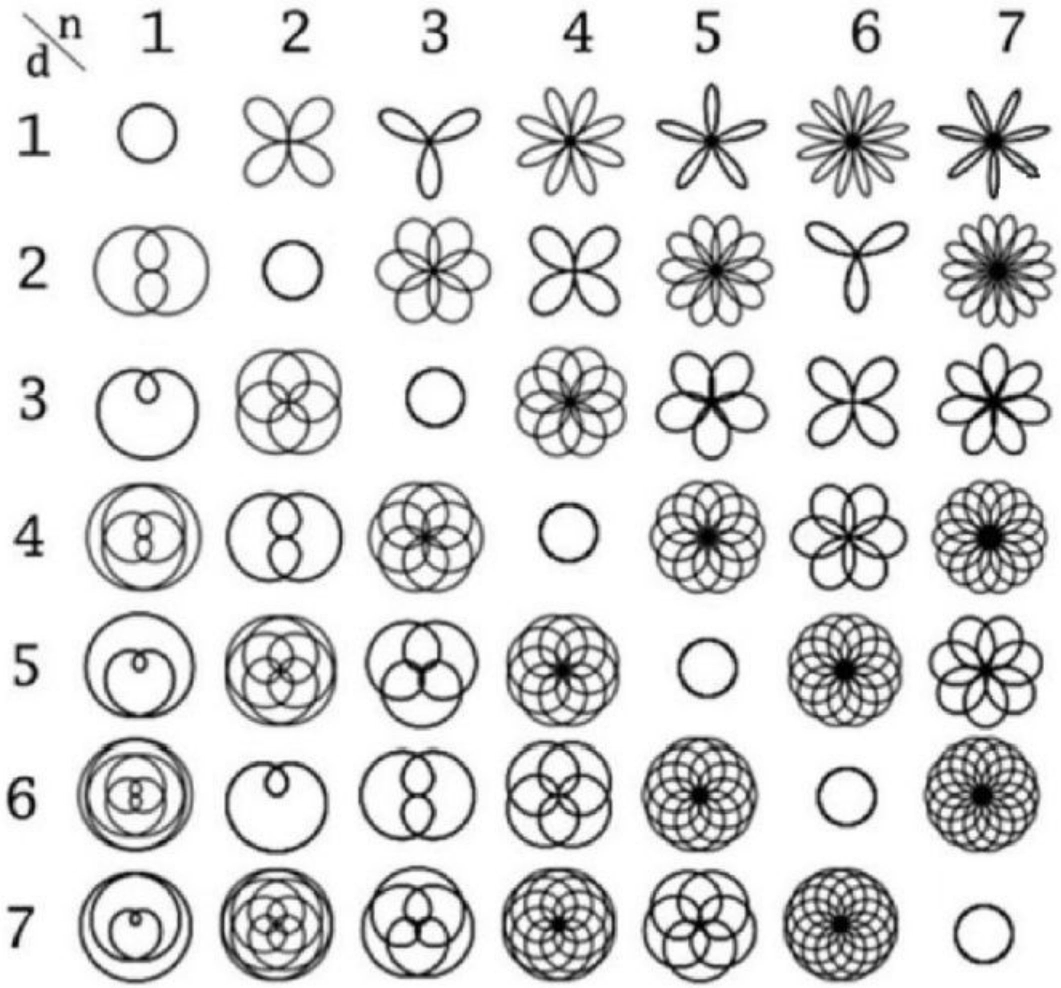
$$\begin{cases} x = R\left[(1-b)\cos(bt) + ab\cdot\cos\left((1-b)t\right)\right] \\ y = R\left[(1-b)\sin(bt) - ab\cdot\sin\left((1-b)t\right)\right] \end{cases};\ a, b \in (0, +\infty).$$



ПОЛЯРНЫЕ РОЗЫ (ВИДЫ)

Розы описываются уравнением в полярной системе координат $r = a\sin k\theta, a, k > 0$, где при различных значениях параметра k будут получаться различные виды роз, умещающиеся в круге радиуса a.

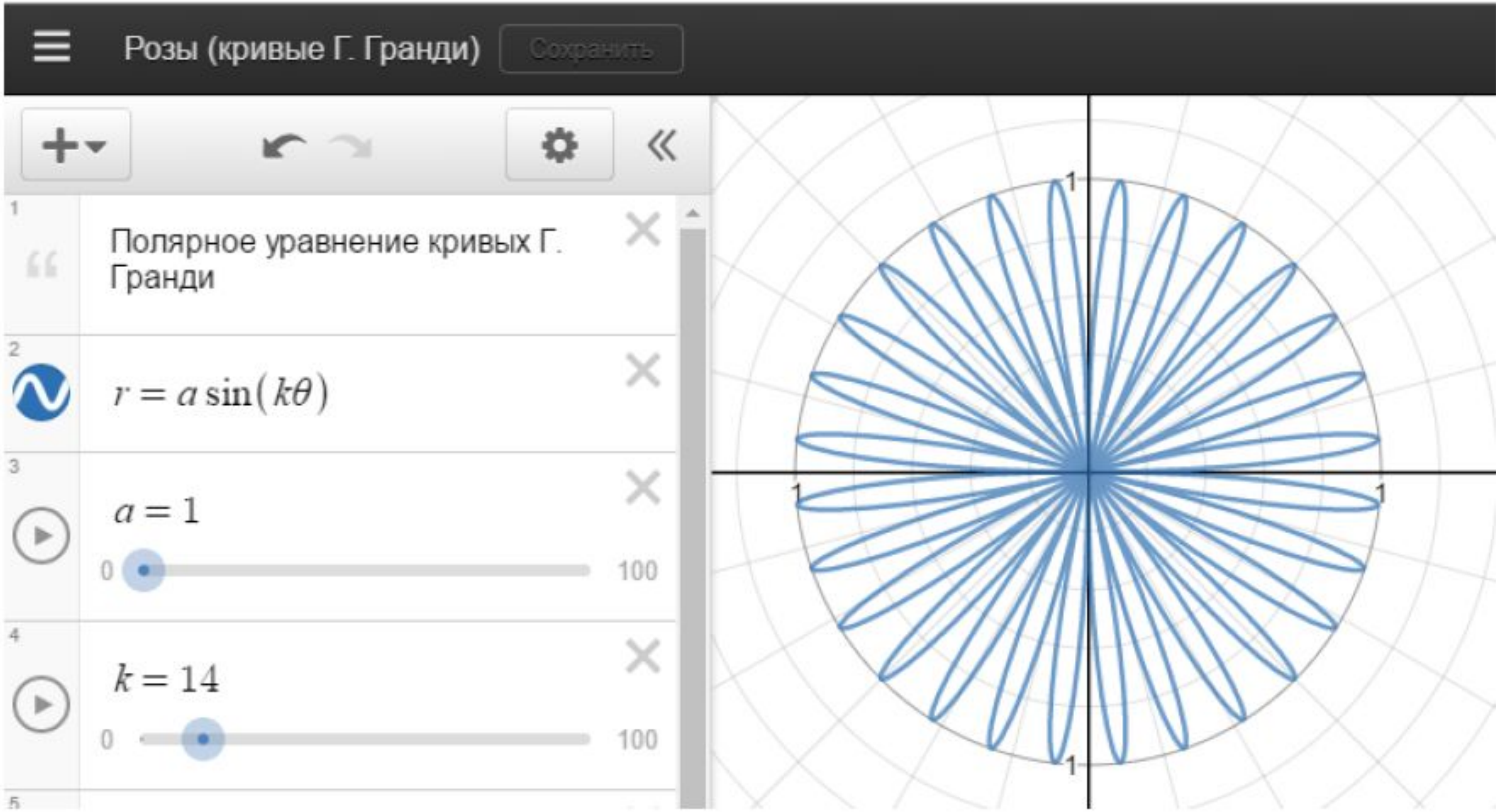
При $k = \dfrac{n}{d}$:



ПОЛЯРНЫЕ РОЗЫ

https://www.desmos.com/calculator/efdzwcc5dc

график полярной розы при различных значениях параметра $k = 14$.



ПОЛЯРНЫЕ РОЗЫ

https://www.desmos.com/calculator/rtznpoh4jw

постепенное построение графика полярной розы $r = \sin(3\theta)$ при изменении значения θ_1.

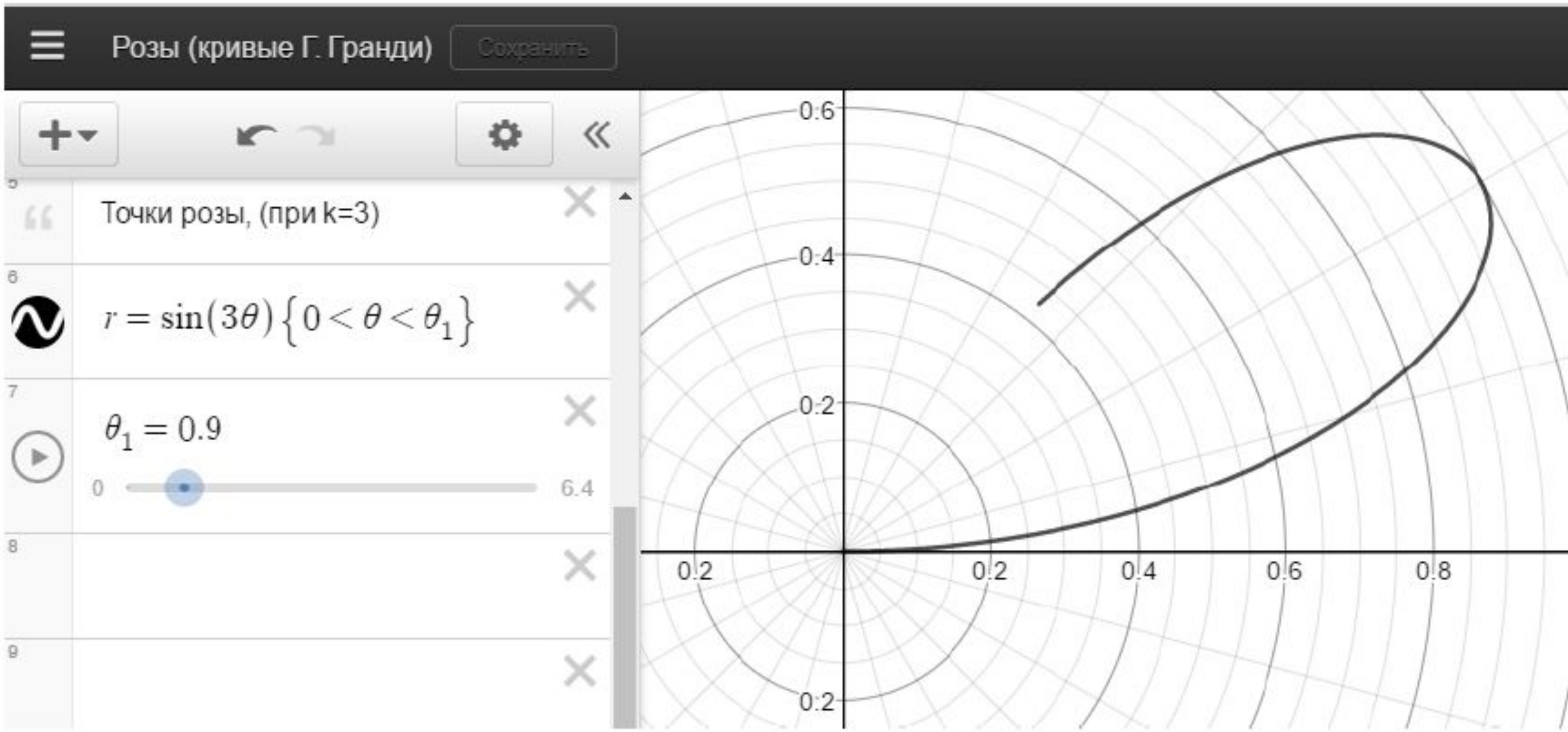
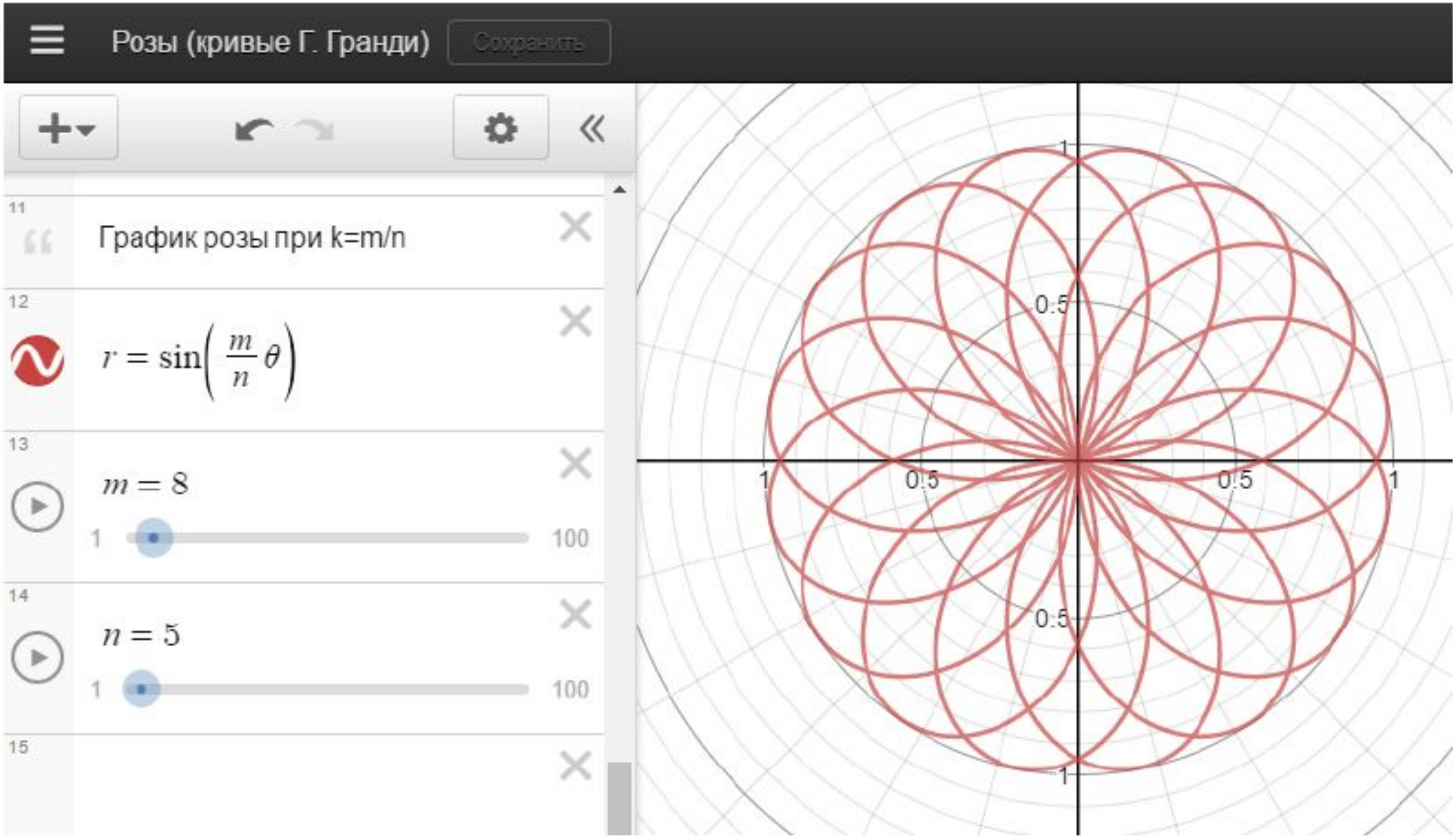


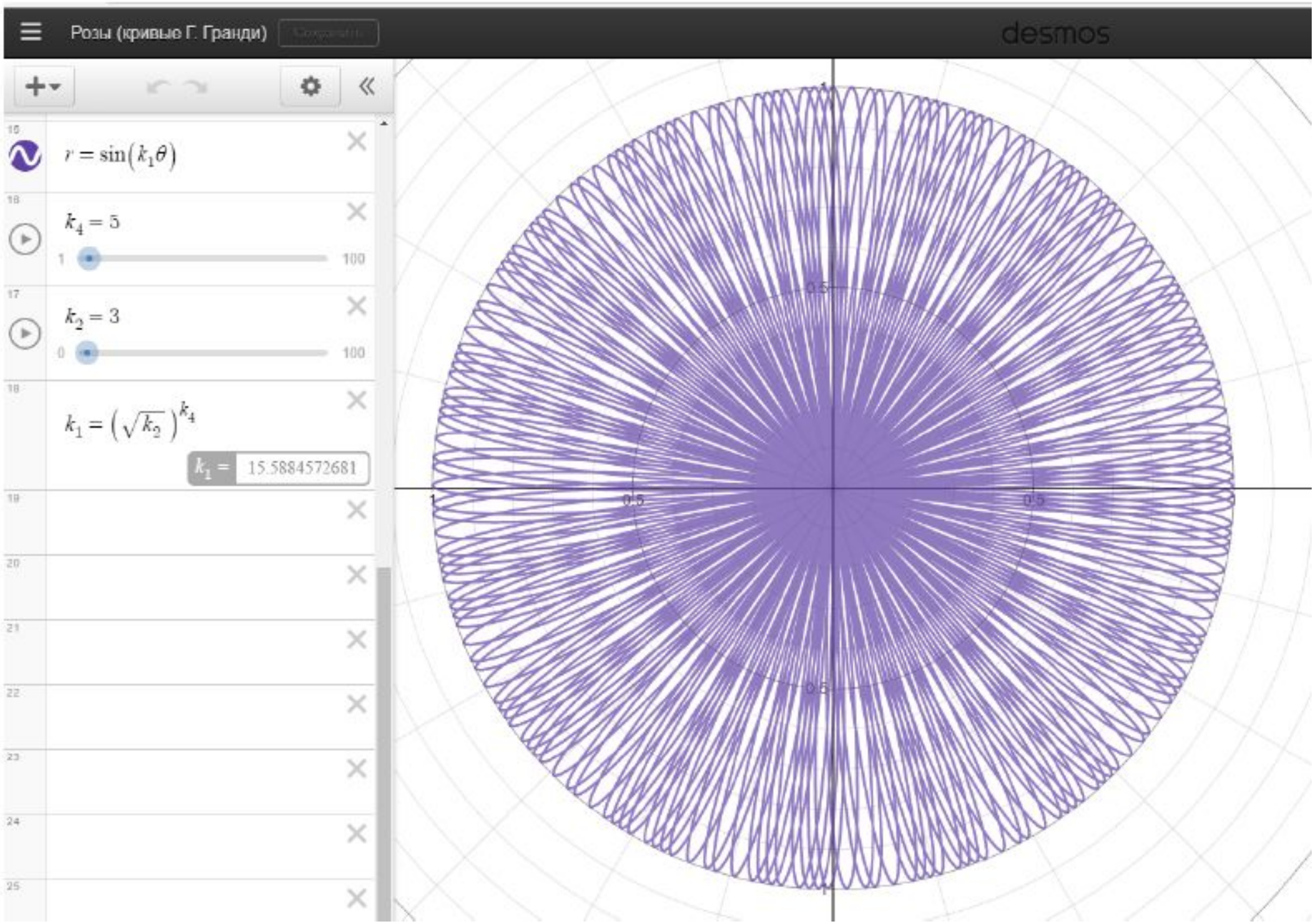
график розы при $k = \dfrac{8}{5}$



ПОЛЯРНЫЕ РОЗЫ

https://www.desmos.com/calculator/vag6pb3ld4

график розы при иррациональном значении параметра $k = \sqrt{3}^5$



ЭПИЦИКЛОИДА (ВИДЫ)

Задаётся параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = R\left[(1+b)\cos(bt) - ab\cdot\cos((1+b)t)\right] \\ y = R\left[(1+b)\sin(bt) - ab\cdot\sin((1+b)t)\right] \end{cases}, a, b(0, +\infty).$$

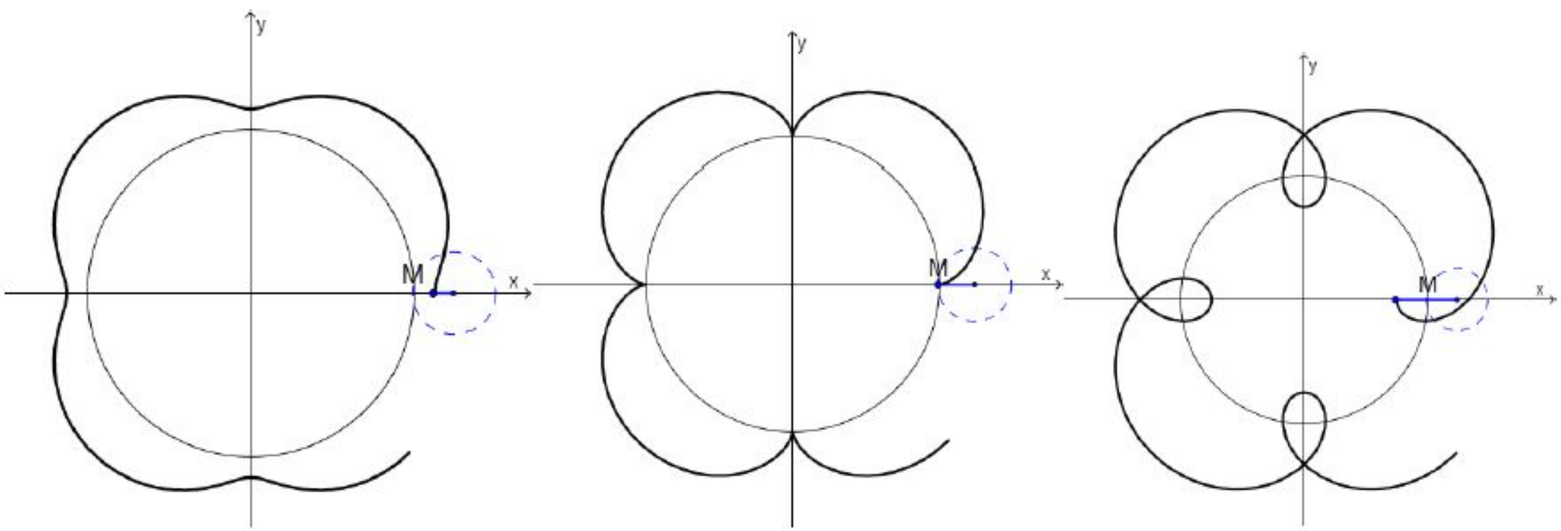
При этом при различных значениях параметра a получаем различные виды эпициклоид. При $a = 1$ - это просто ***эпициклоида***, при $0 < a < 1$ - ***укороченная эпициклоида,*** при $a > 1$ - ***удлинённая эпициклоида.*** Различия в получаемых кривых связаны с их характеристическим свойством.

Замечание: Укороченную и удлинённую эпициклоиды называют ***эпитрохоидами.*** При определённых значениях параметров a и b эпициклоиды вырождаются в известные специальные кривые.

ЭПИЦИКЛОИДА (ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО)

Это траектория точки M, жёстко связанной с производящей окружностью радиуса $r = bR$, которая катится по внешней стороне неподвижной окружности радиуса R. Точка M находится на расстоянии $l = abR$ от центра производящей окружности - от этого зависит вид эпициклоиды.

В частности, при $a = 1$ точка M лежит на производящей окружности.



а) б) в)

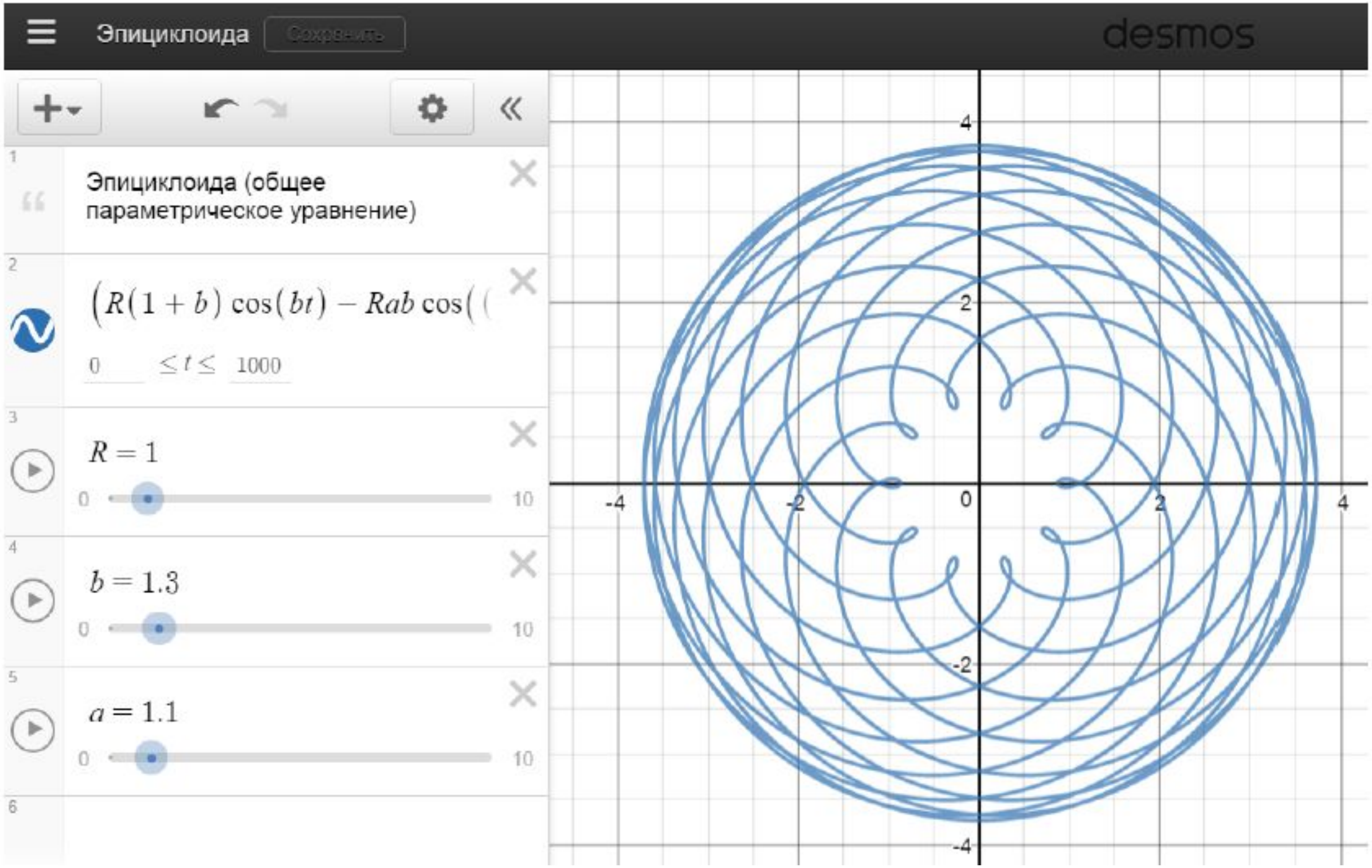
Укороченная эпициклоида а), эпициклоида б), удлинённая эпициклоида в).

ЭПИЦИКЛОИДА

https://www.desmos.com/calculator/rqvrjk1y5m

график эпициклоиды, заданной $\begin{cases} x = R[(1+b)\cos(bt) - ab \cdot \cos((1+b)t)] \\ y = R[(1+b)\sin(bt) - ab \cdot \sin((1+b)t)] \end{cases}, a, b(0, +\infty).$

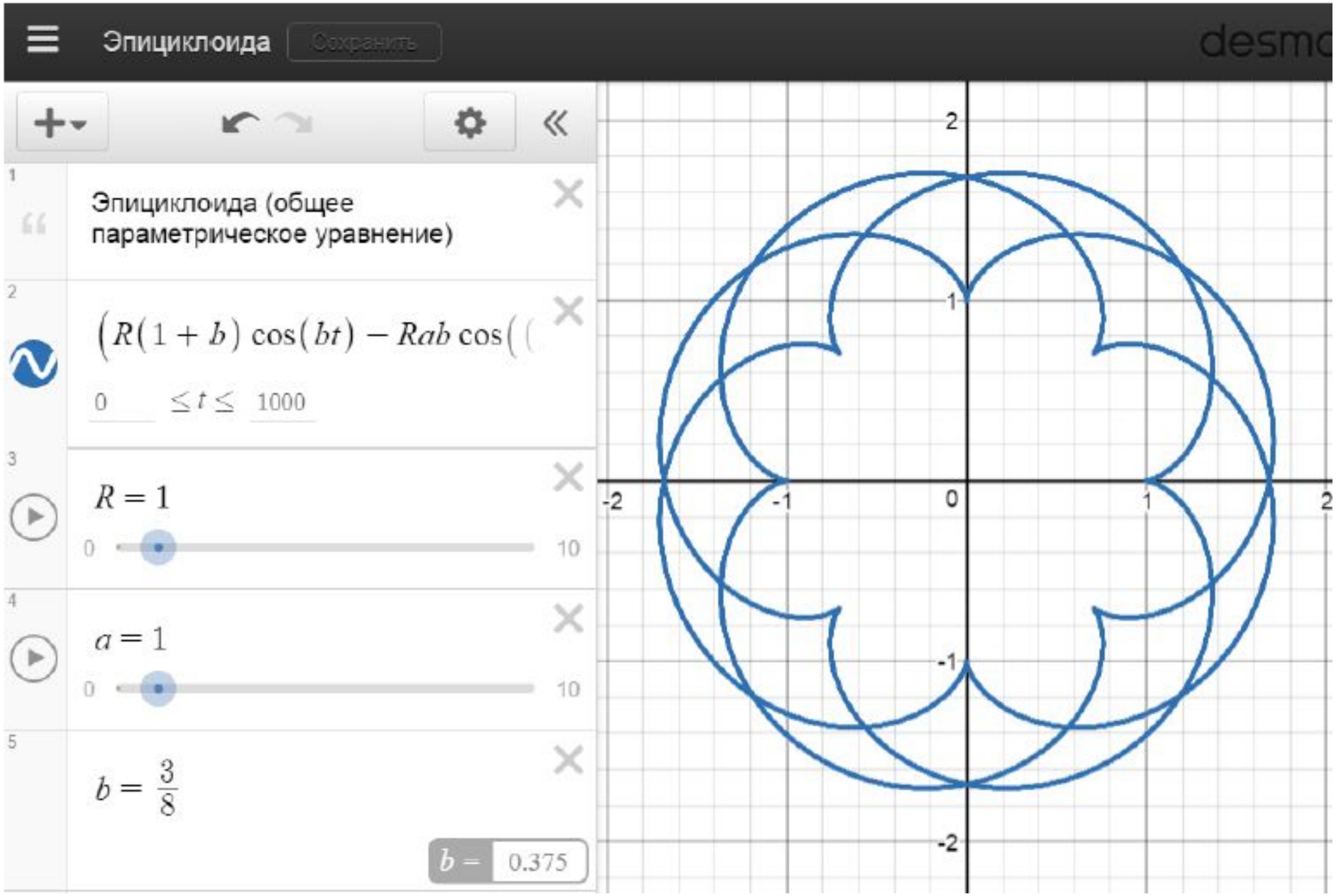
при $a = 1.1., b = 1.3$:



ЭПИЦИКЛОИДА

https://www.desmos.com/calculator/jkzjomv66r

график ***эпициклоиды*** при $a = 1, b = \dfrac{3}{8}$.



ЭПИЦИКЛОИДА

https://www.desmos.com/calculator/ijfvctagk3

график ***укороченной эпициклоиды***

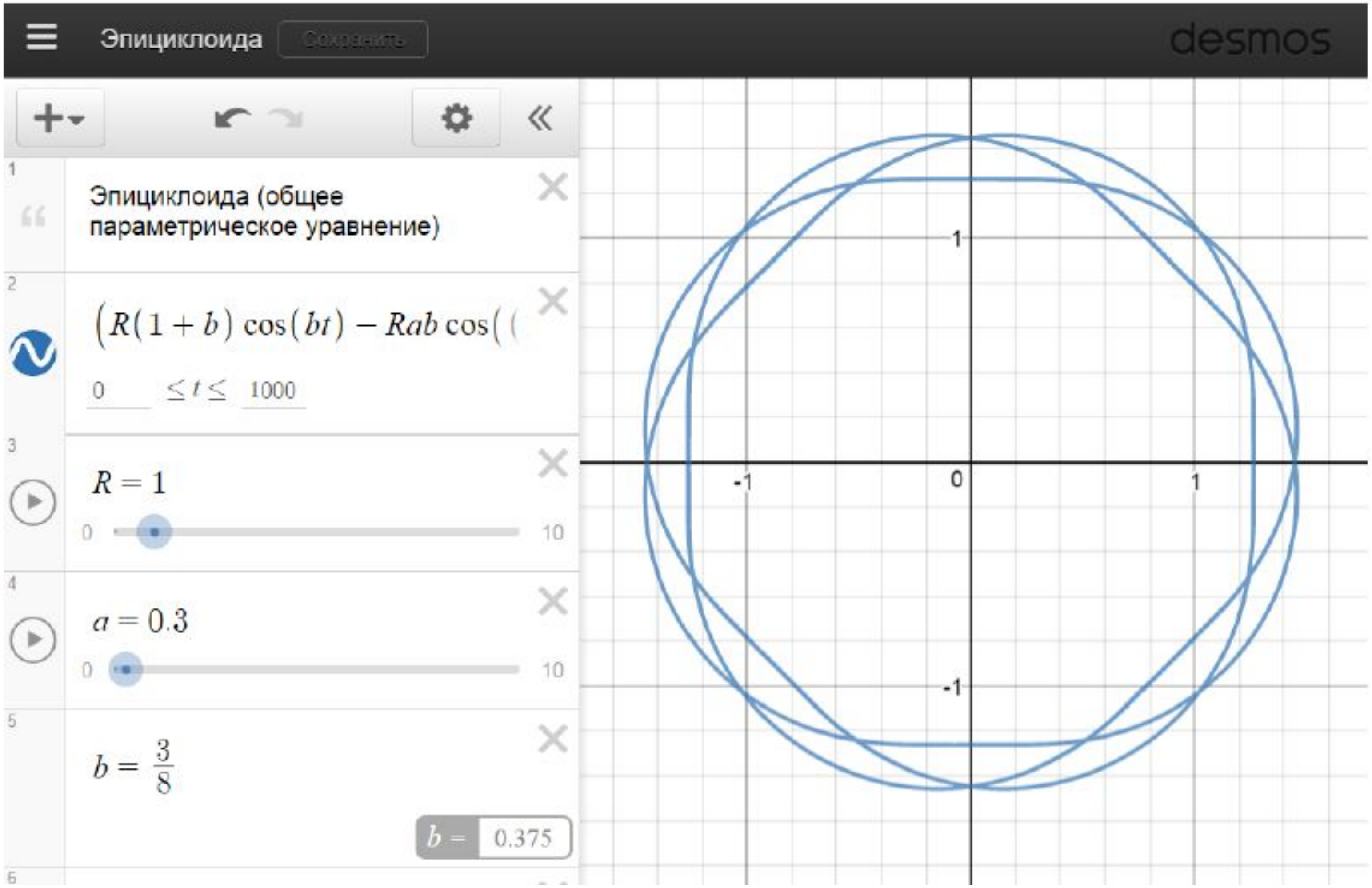
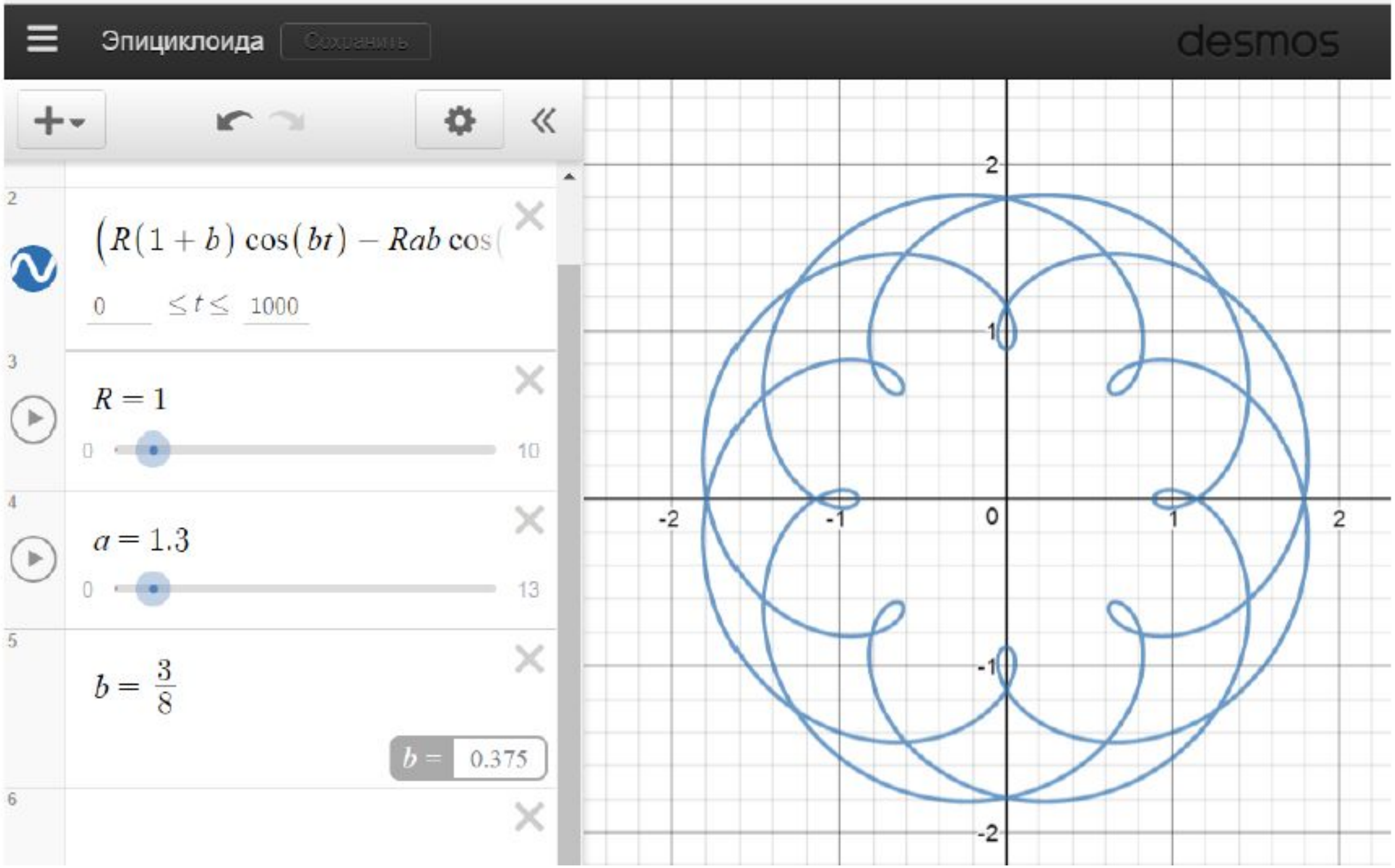


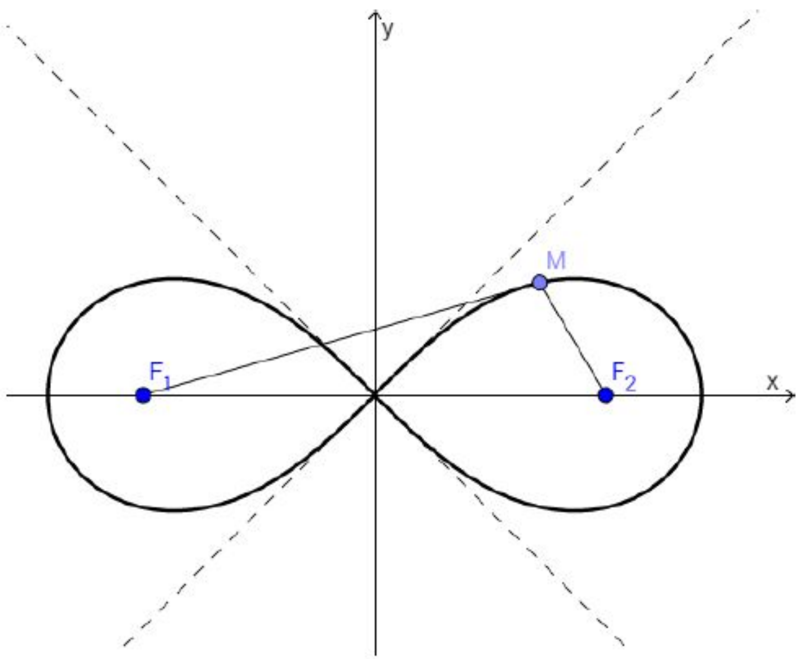
график ***удлинённой эпициклоиды***



ЛЕМНИСКАТА БЕРНУЛЛИ (ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО)

Это геометрическое место точек, расстояние от которых до двух заданных точек (называемых фокусами) постоянно и равно квадрату половины расстояния между фокусами. Так, если в декартовой системе координат $M(x, y)$ -точки лемнискаты, $F_1(-a,0), F_2(a,0)$ - фокусы этой кривой, то её характеристическое свойство выражается следующим соотношением:

$$|F_1M| \cdot |F_2M| = \text{const} = a^2$$



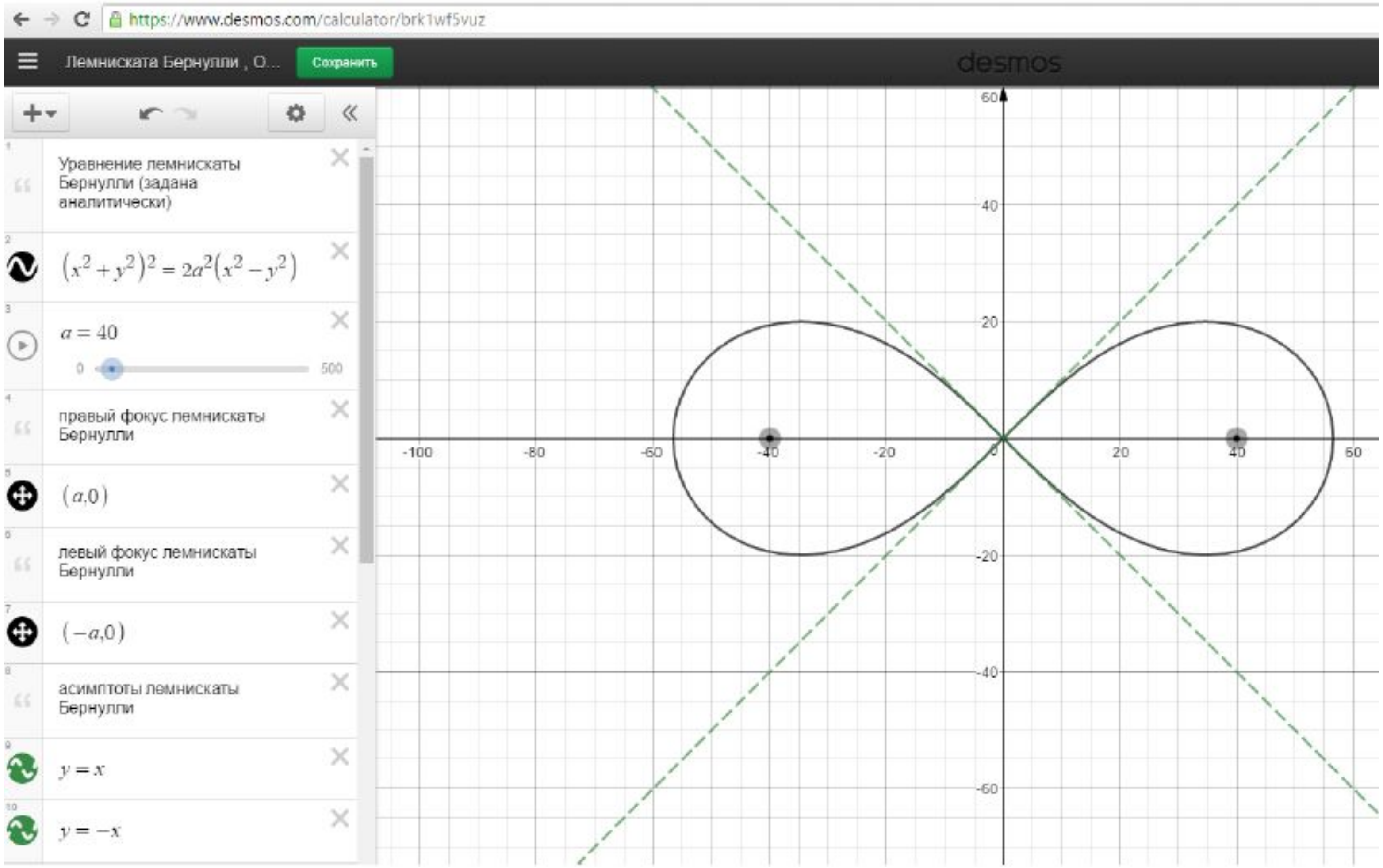
Прямые $y = \pm x$ - асимптоты кривой.

ЛЕМНИСКАТА БЕРНУЛЛИ

https://www.desmos.com/calculator/sfhbjpcxqg

график лемнискаты Бернулли, заданной уравнением

$$\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right), a>0.$$

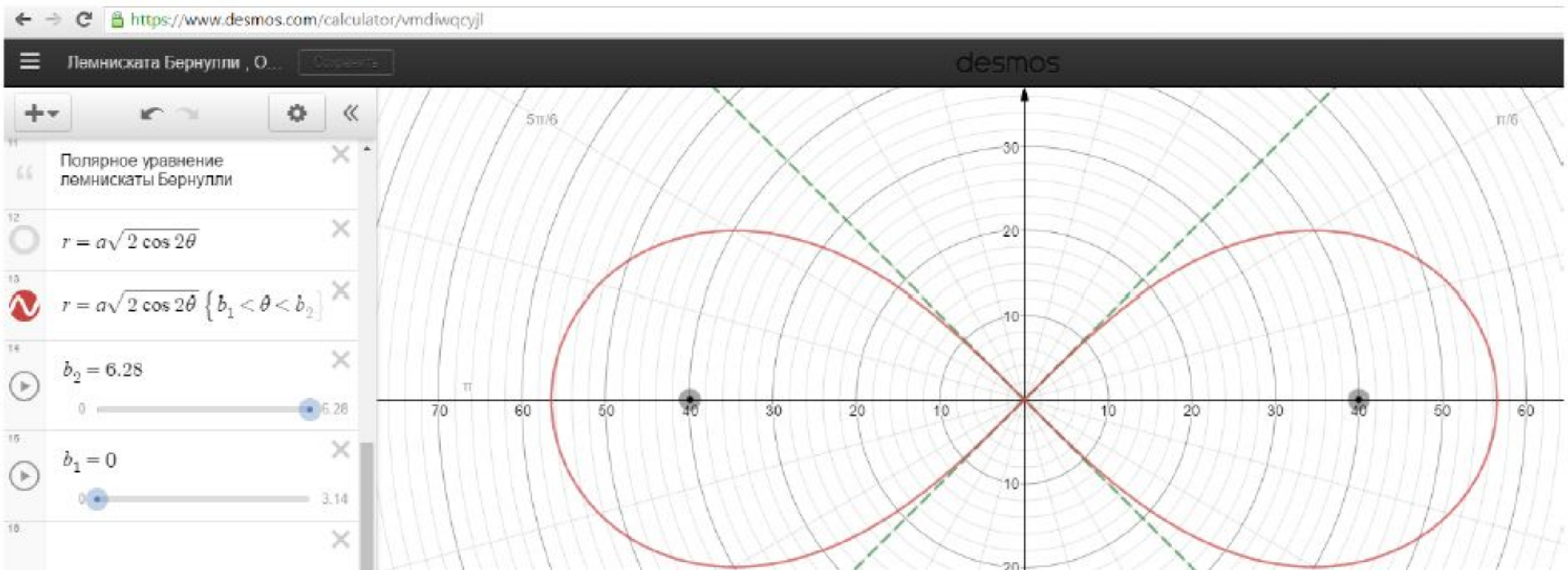


ЛЕМНИСКАТА БЕРНУЛЛИ

https://www.desmos.com/calculator/1v1gzltmx5

график лемнискаты Бернулли, заданной полярным уравнением

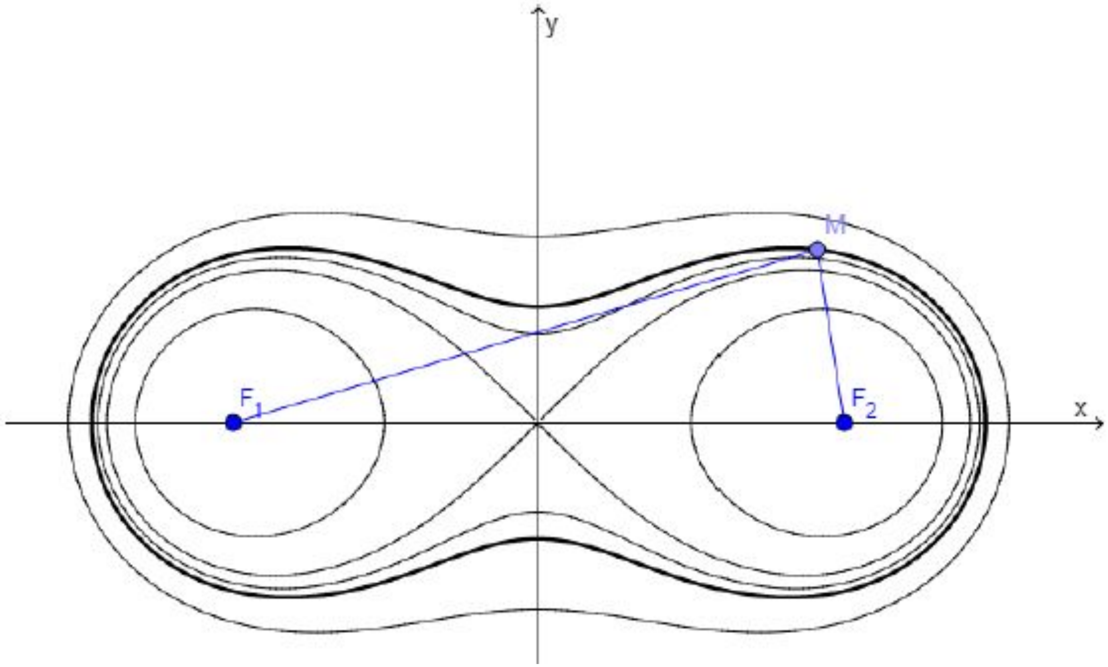
$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta, a > 0.$$



ЛЕМНИСКАТА БЕРНУЛЛИ (ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ОВАЛОВ КАССИНИ)

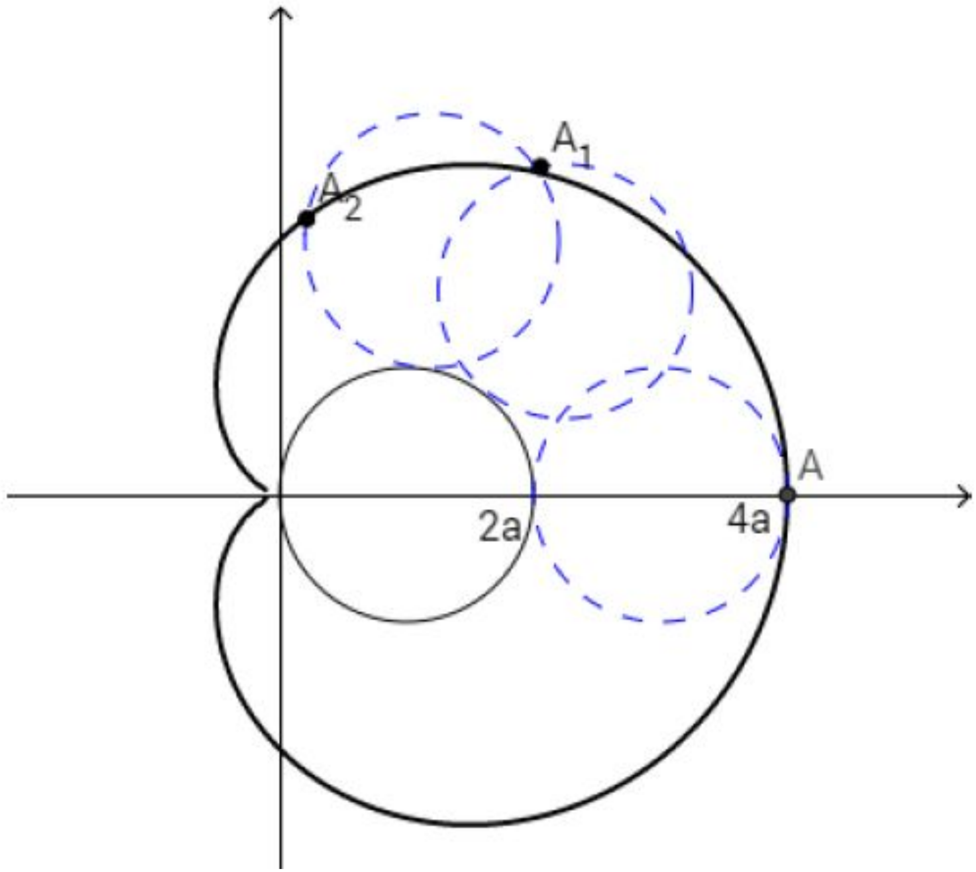
Овалы Кассини - это геометрическое место точек $M(x,y)$, произведение расстояний от которых до двух фиксированных точек $F_1(-a_1,0), F_2(a_2,0)$ есть величина постоянная:

$$|MF_1| \cdot |MF_2| = const$$



КАРДИОИДА (ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО)

Это траектория точки, лежащей на окружности круга радиуса a, который катится по окружности неподвижного круга такого же радиуса a :



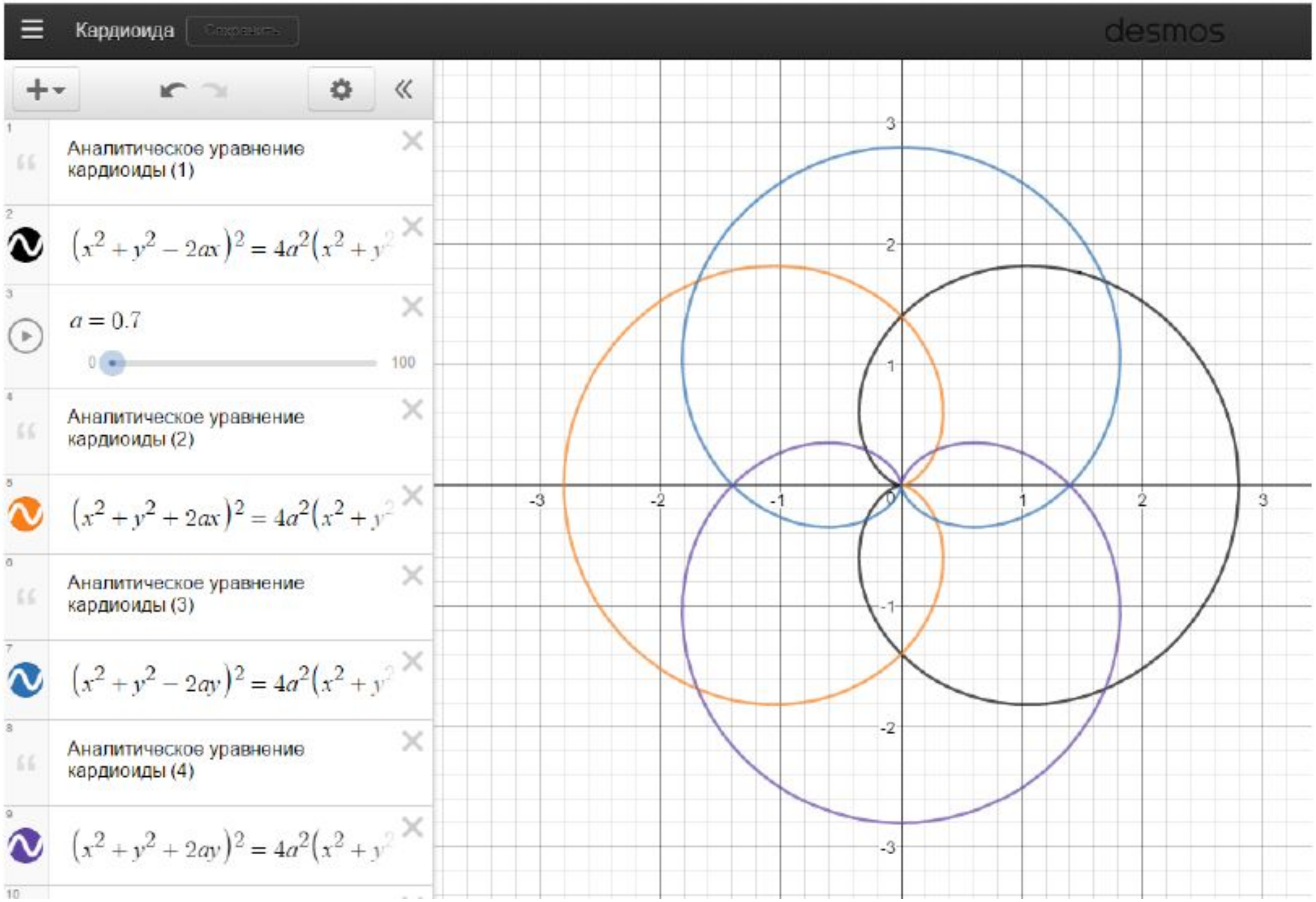
КАРДИОИДА

https://www.desmos.com/calculator/ubvwxlqxuk

графики кардиоиды, заданной уравнениями:

$$(x^2+y^2+2ax)^2=4a^2(x^2+y^2),\qquad (x^2+y^2-2ax)^2=4a^2(x^2+y^2)$$

$$(x^2+y^2-2ay)^2=4a^2(x^2+y^2),\qquad (x^2+y^2+2ay)^2=4a^2(x^2+y^2).$$

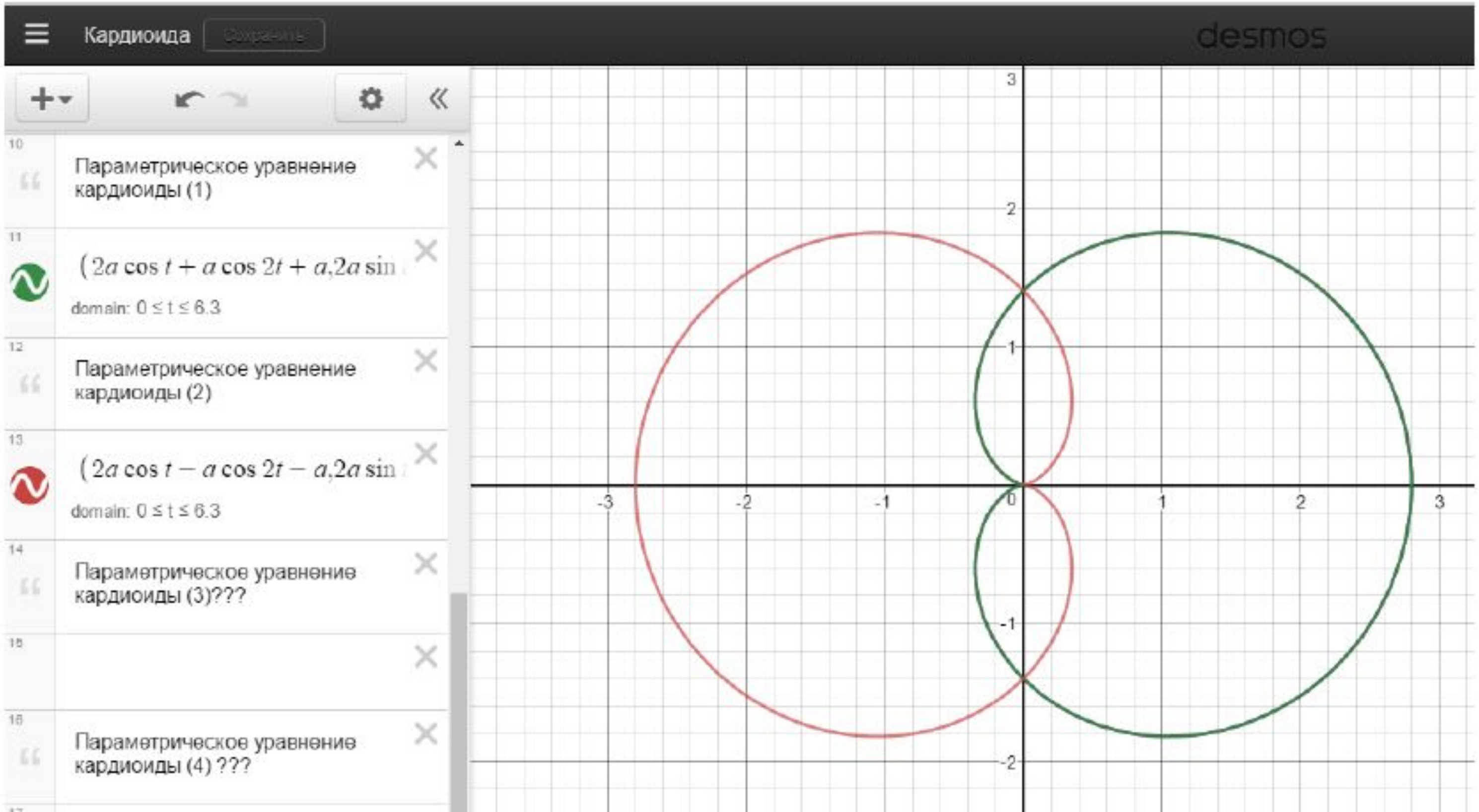


https://www.desmos.com/calculator/6jg8d3e2s5

графики кардиоиды, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 2a\cos t + a\cos 2t + a \\ y = 2a\sin t + a\sin 2t \end{cases}, \quad a \in (0, +\infty), t \in [0, 2\pi],$$

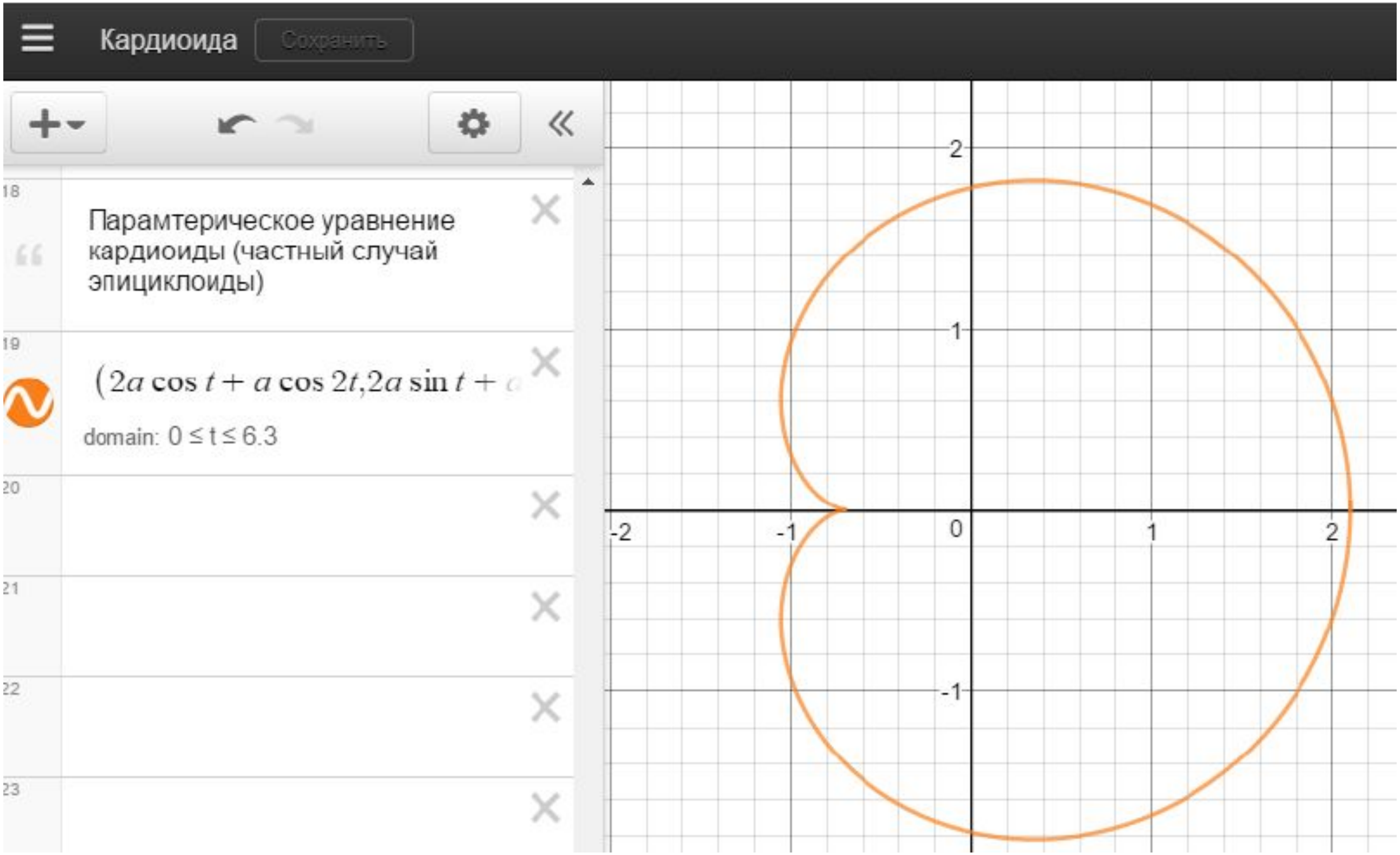
$$\begin{cases} x = 2a\cos t - a\cos 2t - a \\ y = 2a\sin t - a\sin 2t \end{cases}, \quad a \in (0, +\infty), t \in [0, 2\pi].$$



КАРДИОИДА

https://www.desmos.com/calculator/vho4bxuiht

график кардиоиды как частный случай ***эпициклоиды***

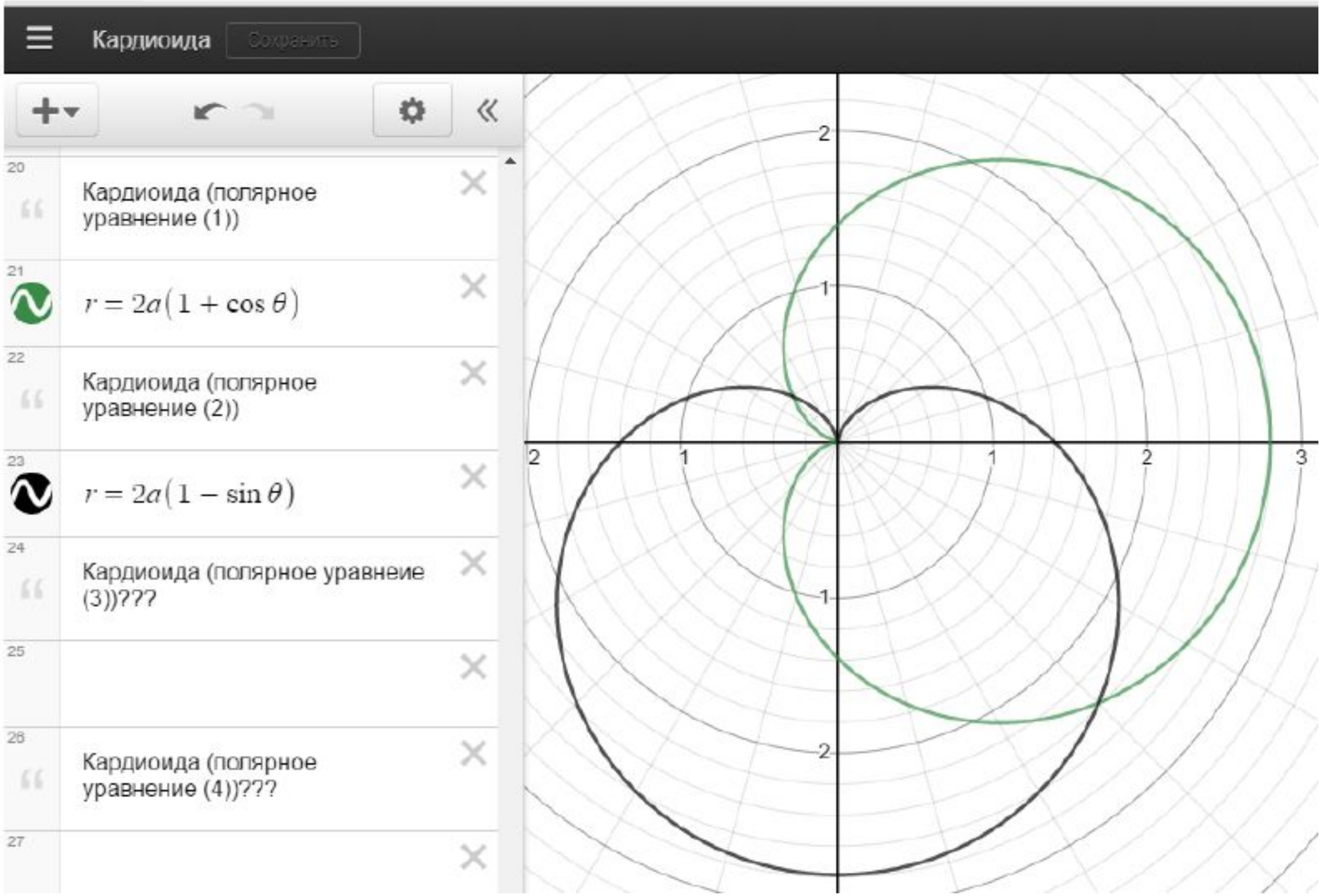


КАРДИОИДА

https://www.desmos.com/calculator/6wditkjqhj

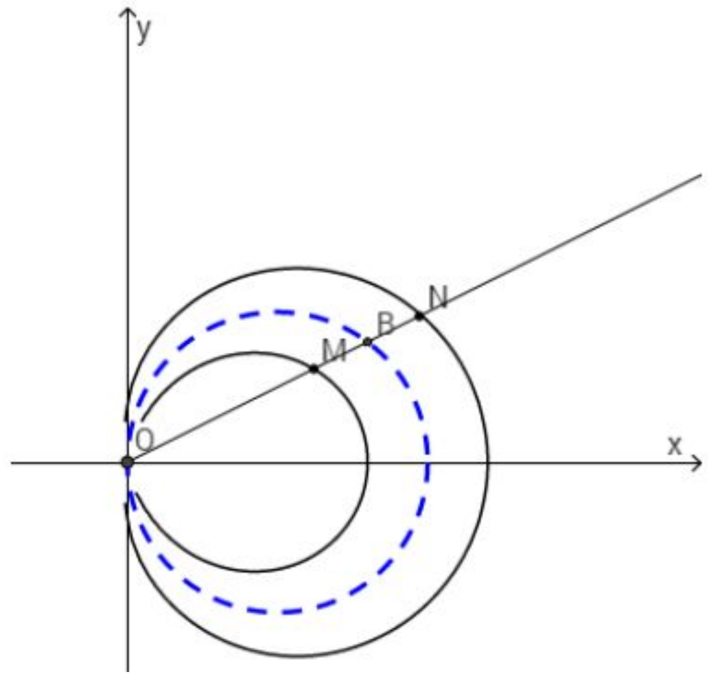
графики кардиоиды, заданной полярными уравнениями:

$$r = 2a(1+\cos\theta),\quad r = 2a(1-\sin\theta).$$



УЛИТКА ПАСКАЛЯ (ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО)

Пусть имеется окружность с радиусом a, проходящая через т.О и имеющая центр на оси Ox. Тогда улитка Паскаля есть геометрическое место точек $M(x,y)$ и $N(x,y)$, таких, что для всякого луча $\varphi = \varphi_0, \varphi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ выполнено равенство: $|MB| = |BN| = const = b$.



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

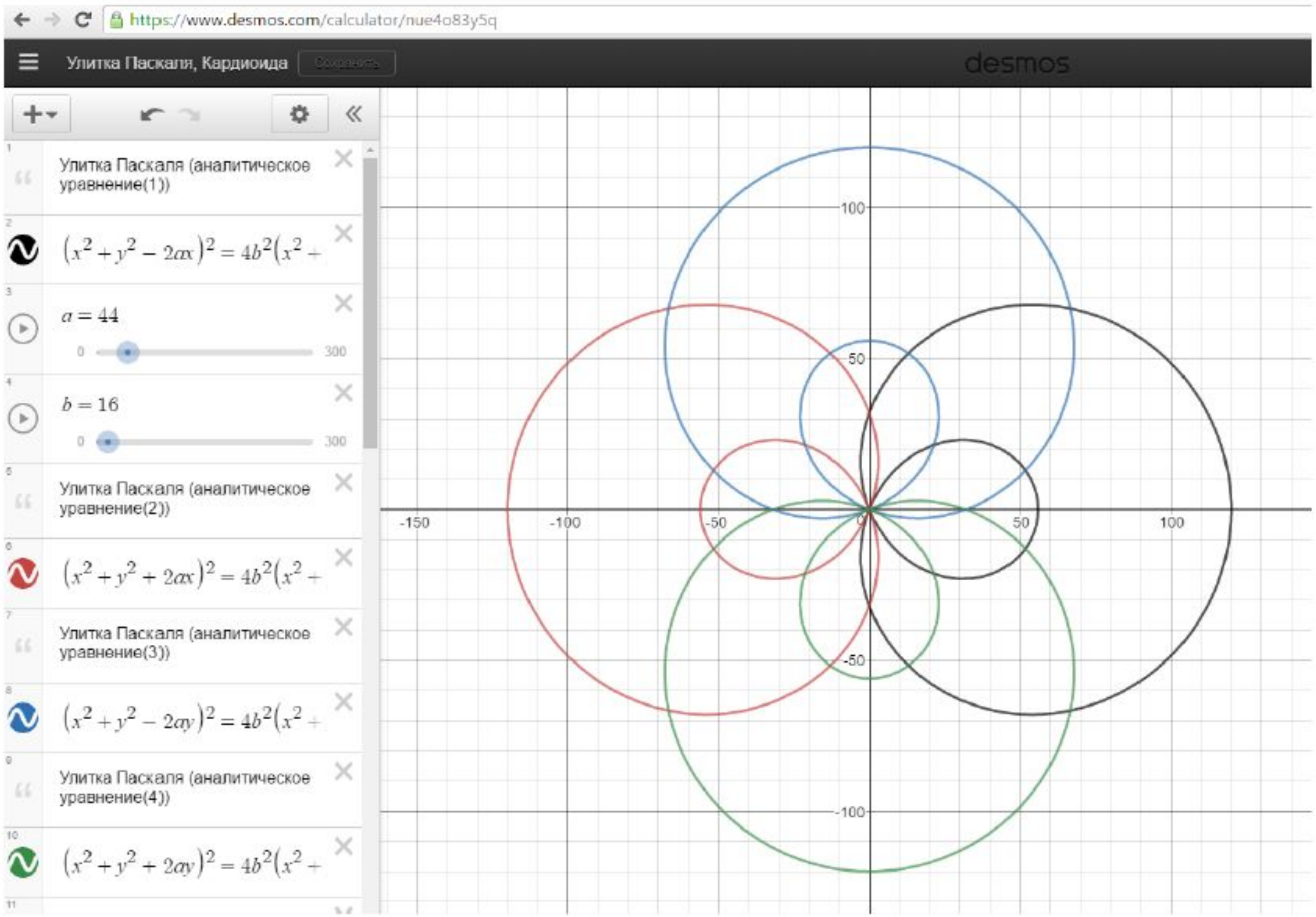
УЛИТКА ПАСКАЛЯ

https://www.desmos.com/calculator/4bow2zrwdt

графики улитки Паскаля, заданной уравнениями:

$$(x^2+y^2-2ax)^2=4b^2(x^2+y^2),\ (x^2+y^2+2ax)^2=4b^2(x^2+y^2),$$

$$(x^2+y^2-2ay)^2=4b^2(x^2+y^2),\ (x^2+y^2+2ay)^2=4b^2(x^2+y^2).$$



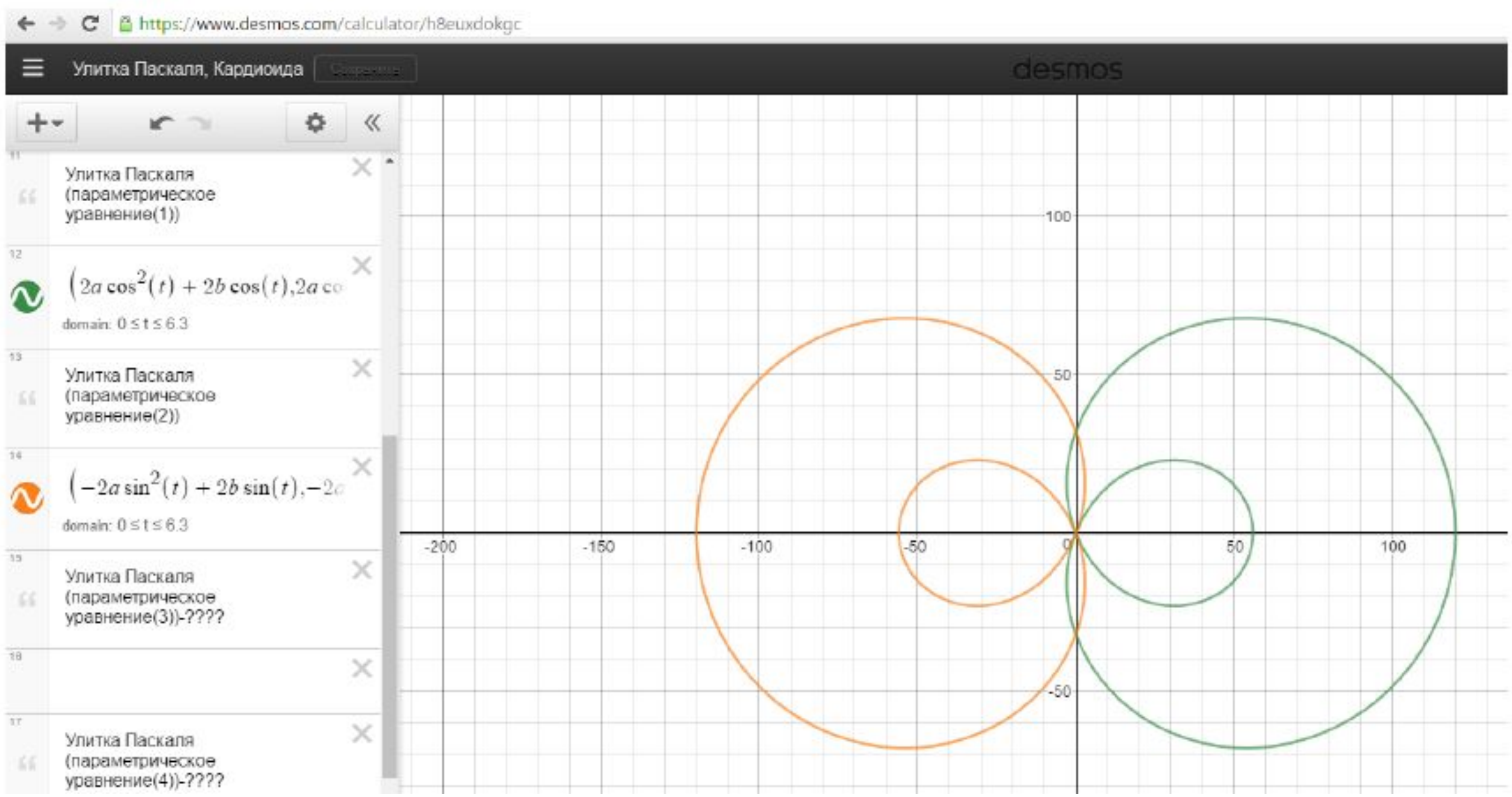
УЛИТКА ПАСКАЛЯ

https://www.desmos.com/calculator/vczr7dga7g

графики улитки Паскаля, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 2a\cos^2 t + 2b\cos t, \\ y = 2a\cos t\sin t + 2b\sin t \end{cases}, \quad a, b \in (0, +\infty), t \in R,$$

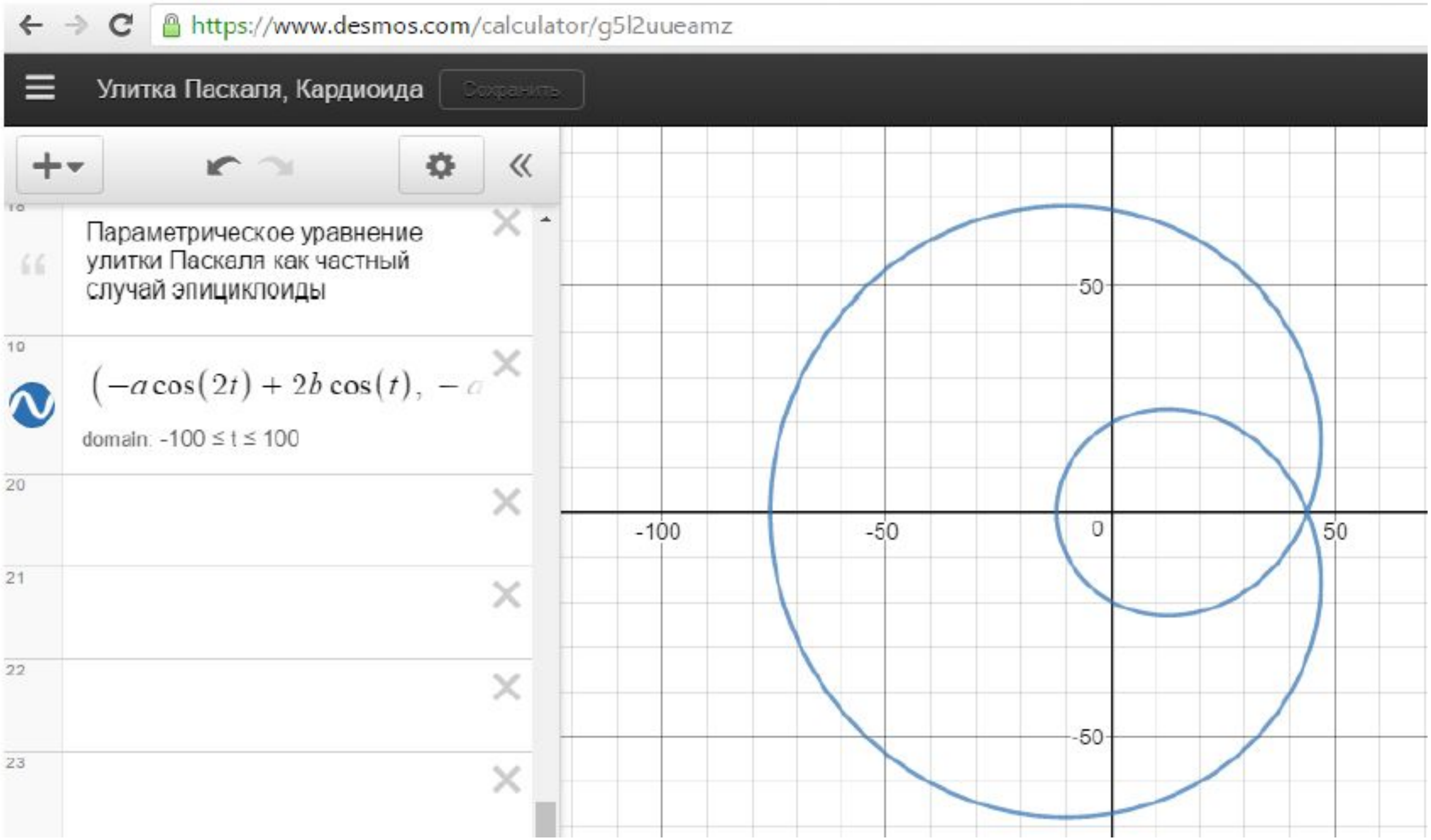
$$\begin{cases} x = -2a\sin^2 t + 2b\sin t, \\ y = -2a\cos t\sin t + 2b\cos t \end{cases}, \quad a, b \in (0, +\infty), t \in R.$$



УЛИТКА ПАСКАЛЯ

https://www.desmos.com/calculator/6vwv9sggun

график улитки Паскаля как частный случай ***эпициклоиды.***

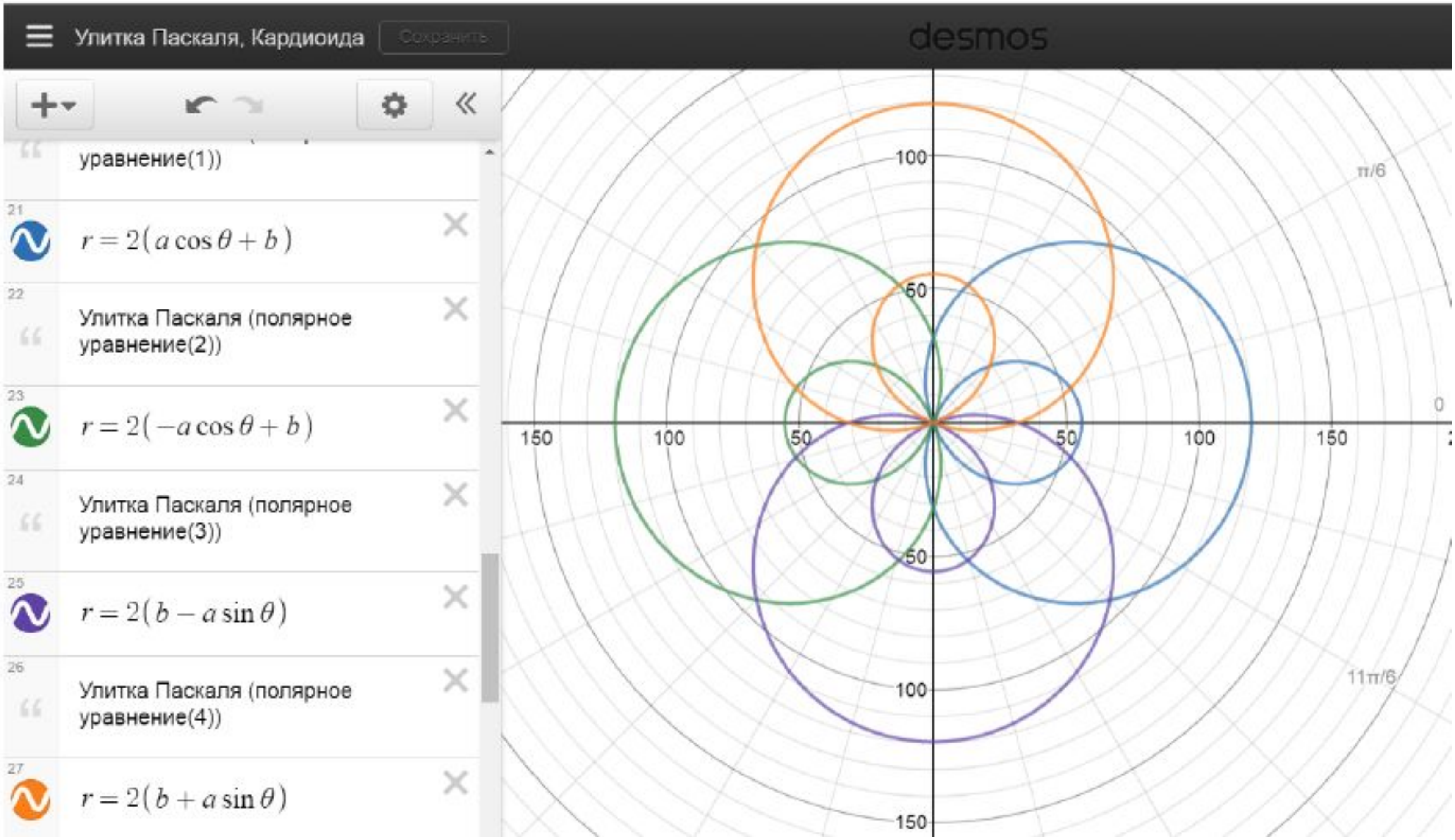


УЛИТКА ПАСКАЛЯ

https://www.desmos.com/calculator/ogauf7xoqz

графики улитки Паскаля, заданной полярными уравнениями:

$$r = 2(b + a\cos\theta),\ r = 2(b - a\cos\theta),\ r = 2(b - a\sin\theta),\ r = 2(b + a\sin\theta).$$



ЦИКЛОИДА (ВИДЫ)

Циклоида задаётся параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = R \cdot (t - a \cdot \sin t), \\ y = R \cdot (1 - a \cdot \cos t), a \in (0, +\infty), t \in (-\infty, +\infty). \end{cases}$$

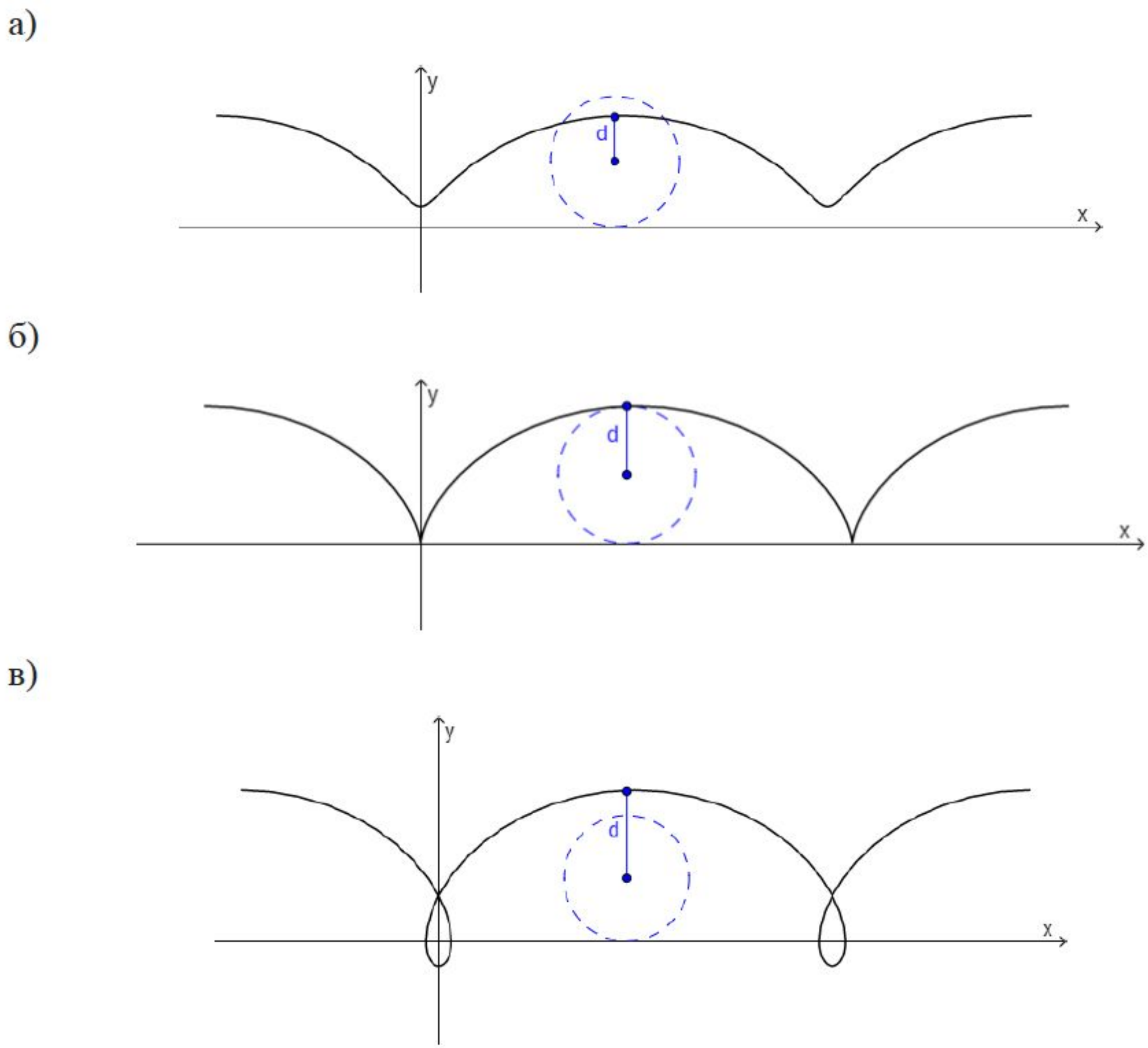
При этом при различных значениях параметра a получаем различные виды циклоид. При $a = 1$ - это просто ***циклоида***, при $0 < a < 1$ - ***укороченная циклоида***, при $a > 1$ - ***удлинённая циклоида.*** Различия в получаемых кривых связаны с их характеристическим свойством.

Замечание: 1. Укороченную и удлинённую циклоиды называют ***трохоидами*** (т.к. вычерчивающая такие кривые точка не лежит на окружности (как в случае с обычной циклоидой), а лежит как бы на спице колеса, по греч. τροχοειδής - колёсообразный). **2.** Если прямую (по которой катится производящая окружность) заменить неподвижной окружностью радиуса R, то вычерчивающая точка опишет кривую, называемую "циклоидальной". Если производящая окружность катится по внутренней стороне неподвижной окружности, то получаем ***гипоциклоиду***, если по внешней - ***эпициклоиду***.

ЦИКЛОИДА (ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО)

Это траектория точки, лежащей на расстоянии $d = a \cdot R$ от центра производящей окружности радиуса R, которая без скольжения катится по прямой. При различных значениях параметра a мы получаем различные виды циклоид :

ЦИКЛОИДА (ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО)

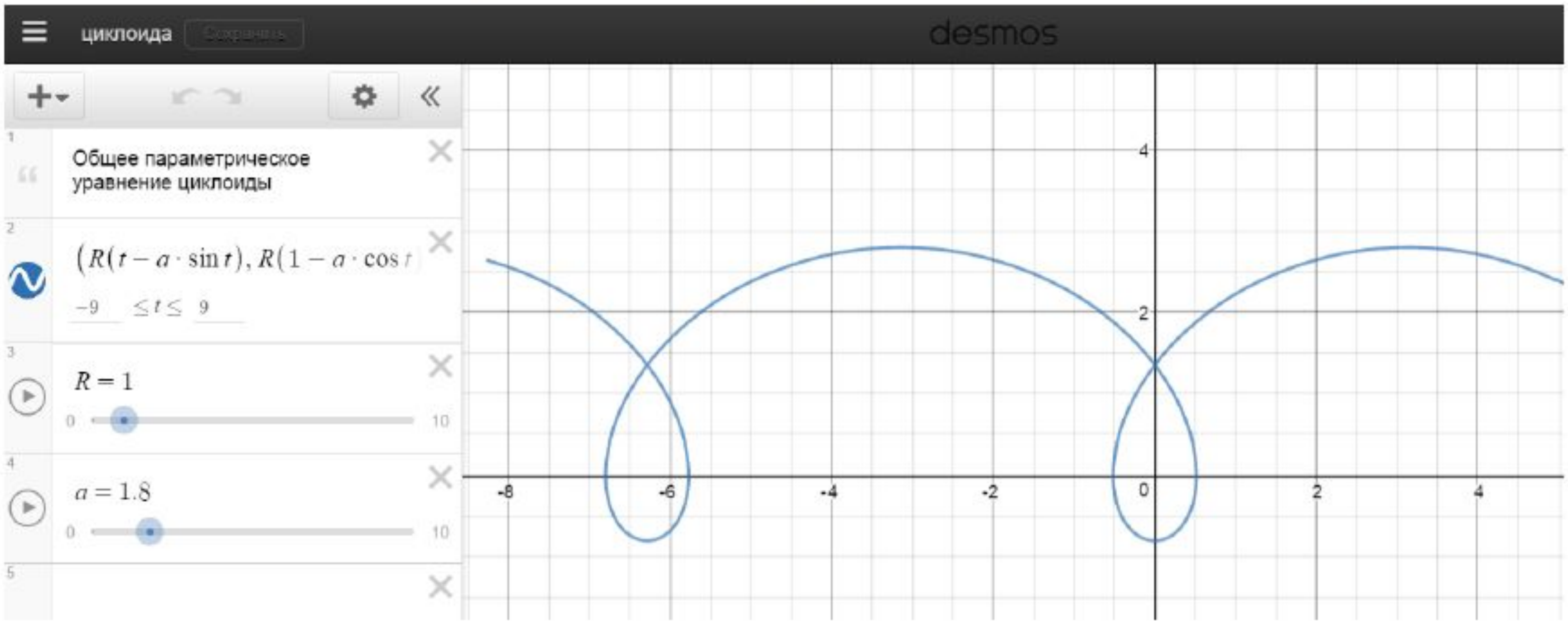


Укороченная циклоида а), циклоида б), удлинённая циклоида в).

ЦИКЛОИДА

https://www.desmos.com/calculator/wiatgmemyo

график циклоиды при произвольно выбранных значениях параметров a, b

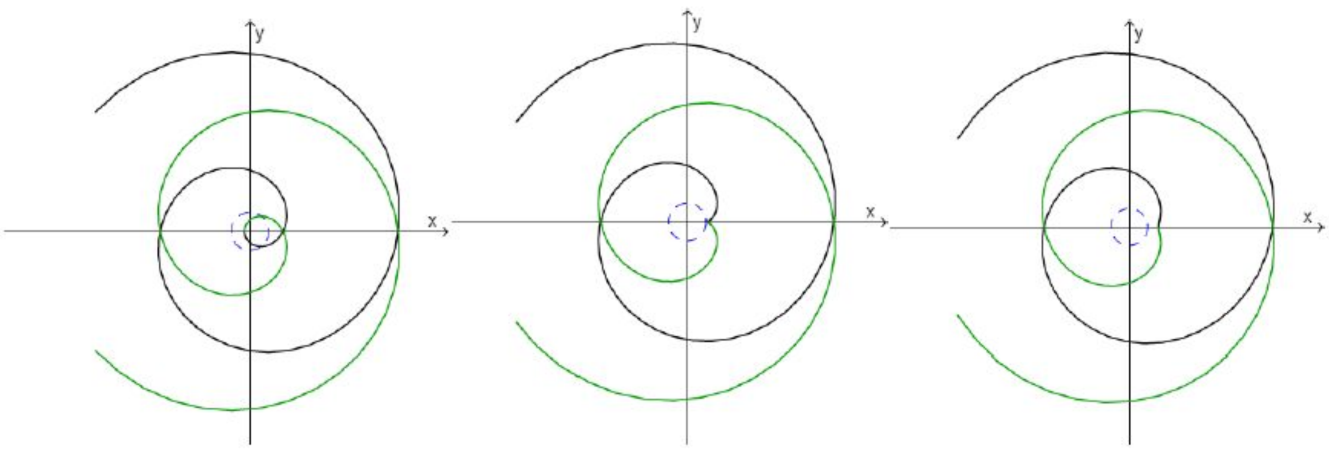


ЭВОЛЬВЕНТА ОКРУЖНОСТИ (ВИДЫ)

Эвольвента окружности задаётся параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = (R+h)\cos t + Rt\sin t \\ y = (R+h)\sin t - Rt\cos t \end{cases}, R > 0; h, t \in (-\infty, +\infty).$$

При различных значениях параметра h получают различные виды эвольвент окружности: $h = 0$ - ***эвольвента окружности***, $h > 0$ - ***удлинённая эвольвента окружности***, $h < 0$ - ***укороченная эвольвента окружности***. Различия в получаемых кривых связаны с их характеристическим свойством.

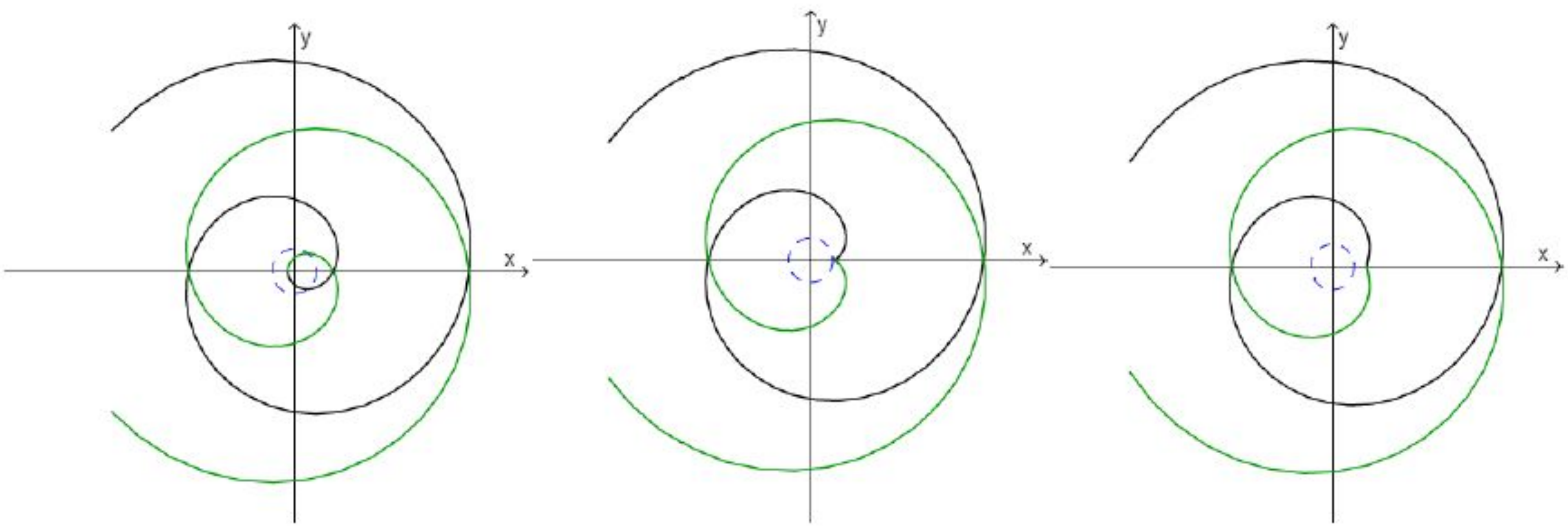


а) б) в)

Укороченная эвольвента а), эвольвента б), в) удлинённая эвольвента окружности радиуса R.

ЭВОЛЬВЕНТА ОКРУЖНОСТИ (ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО)

Это траектория точки M, лежащей на прямой, которая без скольжения катится по неподвижной окружности радиуса R. Укороченная и удлинённая эвольвенты есть траектории точки M, лежащей не на производящей прямой, а на расстоянии h от неё. Эвольвента имеет две ветви: положительная ветвь ($t > 0$) получается при перекатывании производящей прямой против хода часовой стрелки (линия чёрного цвета) и отрицательная ветвь ($t < 0$) - при перекатывании по ходу часовой стрелки (линия синего цвета)

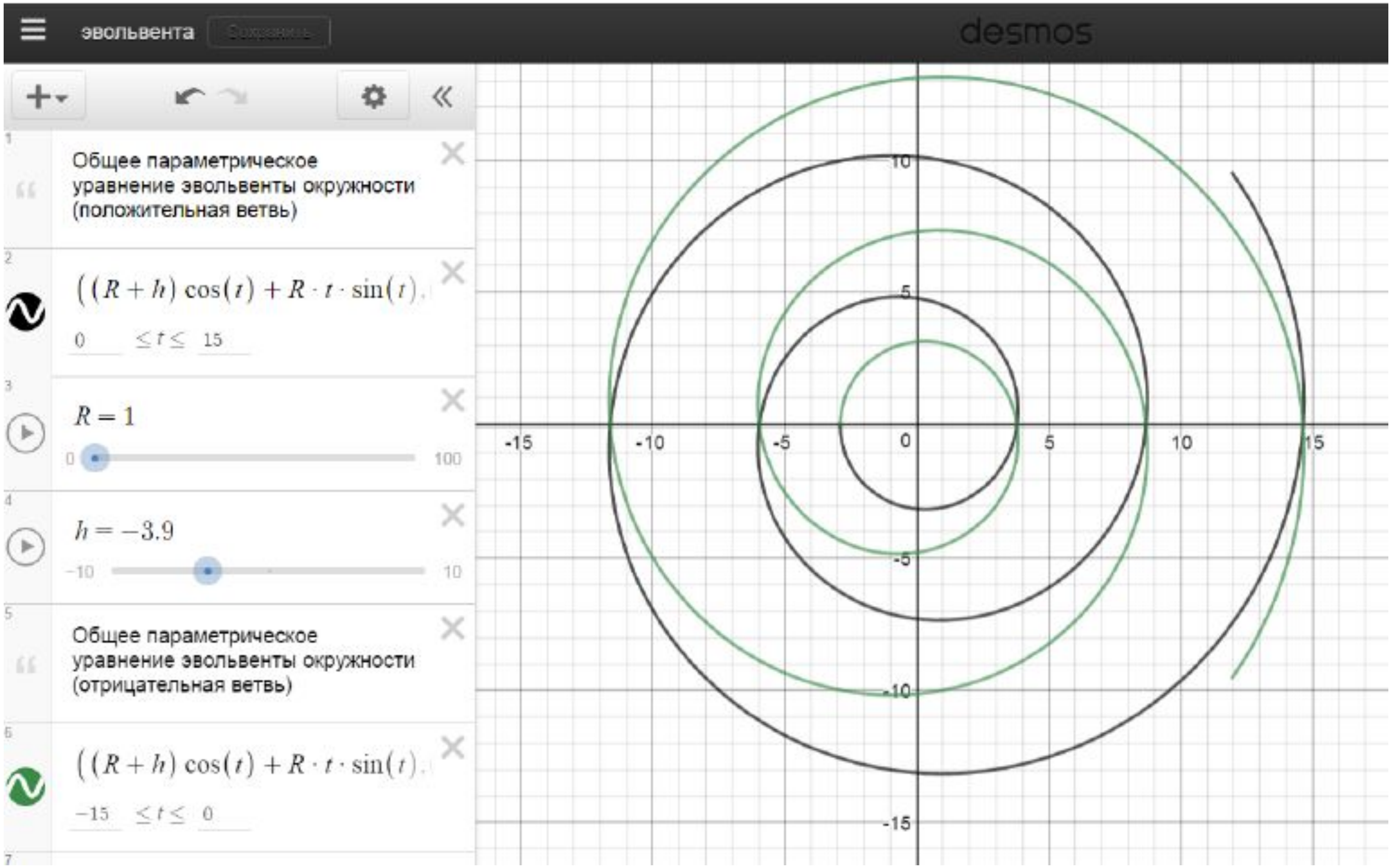


ЭВОЛЬВЕНТА ОКРУЖНОСТИ

https://www.desmos.com/calculator/asv0lhs7j7

график эвольвенты, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x = (R+h)\cos t + Rt\sin t \\ y = (R+h)\sin t - Rt\cos t \end{cases}, R > 0; h, t \in (-\infty, +\infty).$$



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Спасибо за внимание!

Санкт-Петербург, 2017