

ФИНАНСОВАЯ
МАТЕМАТИКА В ЗАДАЧАХ
ЕГЭ И ПРАКТИЧЕСКОЙ
ДЕЯТЕЛЬНОСТИ
ЧЕЛОВЕКА

Цель: изучить практико-ориентированные задачи, раскрывающие суть различных видов платежей по кредитам, выбрать оптимальные способы решения
Задачи:

- Изучить теоретические аспекты решения «экономических» задач;
- Рассмотреть различные способы решения задач;
- Повысить уровень математической культуры, прививая навыки самостоятельной исследовательской работы в математике;
- Выполнить сопоставительно-аналитическую работу с контрольно-измерительными материалами ЕГЭ, а также исследовать примеры применения в жизненных ситуациях.

Гипотеза:

- 1) Существует много видов «экономических» задач на проценты и способов их решения, но их можно проклассифицировать по типам для облегчения усвоения материала.
- 2) Одного способа расчета кредита быть не может, существуют два вида платежей по кредиту: дифференцированный и аннуитетный.
- 3) Существует переплата по кредитам. Но при каких схемах выплаты кредита она меньше?

Способы погашения кредита:

- Дифференцированный
- Аннуитетный

Схема дифференцированного платежа

При расчете за кредит дифференцированными платежами расчетная сумма платежа постепенно сокращается. Это обусловлено тем, что прежде всего клиент вносит тело кредита, и его сумма остается постоянной на протяжении всех месяцев. Что касается процентной части, то она зависит от остатка, который со временем сокращается. Это значит, что и сумма процентов становится меньше.

Ориентировочную сумму платежа можно рассчитать так:

Платеж = Проценты + Фиксированная часть.

Под фиксированной частью понимают погашение кредитного тела.

Проценты можно определить так: $\text{Проценты} = (\text{Ставка} * \text{Остаток}) / 100\%$.

15-го января планируется взять кредит в банке на сумму 1.5 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму нужно вернуть банку:

- а) в течение первого года кредитования?
- б) в течение всего срока кредитования? Какова сумма переплаты?

1й способ

Долг перед банком по состоянию на конец второго года должен уменьшаться до нуля равномерно на сумму равную 62500 рублей ($1500000:24=62500$). Тогда последовательность размеров долга будет иметь вид: 1500000; 1437500; 1375000; 1312500; ... 62500.

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 3%. Тогда последовательность размеров долга будет иметь вид: $1500000 \cdot 1,03$; $1437500 \cdot 1,03$; $1375000 \cdot 1,03$; $1312500 \cdot 1,03$; ... $62500 \cdot 1,03$. Или: 1545000; 1480625; 1416250; 1351875; ... 64375.

Найдем размеры выплат:

1 месяц: $1545000 - 1437500 = 107500$

2 месяц: $1480625 - 1375000 = 105625$

3 месяц: $1416250 - 1312500 = 103750$ Замечаем, что выплаты уменьшаются на одну и ту же величину, равную 1875 р.

Имеем последовательность членов арифметической прогрессии, в которой первый член равен 107500, а разность равна -1875. Найдем 12-й член этой прогрессии:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$a_{12} = 107500 - 11 \cdot 1875 = 86875$$

Итак, 86875 рублей – это сумма выплат на 12 месяц. $A_n \quad a_n = a_1$

Найдем теперь сумму выплат за весь срок кредитования: 2062500 руб.

Переплата по кредиту равна: $2062500 - 1500000 = 562500$ руб.

Ответ: а) 1166250 рублей б) 2062500 рублей в) 562500 рублей

2й способ

Пусть S - сумма кредита. Найдем, какую сумму нужно вернуть банку за весь период кредитования, то есть за 24 месяца. Долг перед банком по состоянию на конец второго года должен уменьшаться до нуля равномерно. Тогда последовательность размеров долга будет иметь вид:

$$24S/24; 23S/24; 22S/24; \dots; S/24$$

Занесем эти данные в таблицу

На конец месяца	1 месяц	2 месяц	3 месяц	4 месяц	...	23 месяц	24 месяц
Долг перед банком	$\frac{24S}{24}$	$\frac{23S}{24}$	$\frac{22S}{24}$	$\frac{21S}{24}$	...	$\frac{S}{24}$	0

Найдем теперь размеры выплат:

$$1 \text{ месяц: } 24 \cdot S \cdot 1.03/24 - 23S/24 = S/24 \cdot (24 \cdot 1.03 - 23).$$

$$2 \text{ месяц: } 23 \cdot S \cdot 1.03/24 - 22S/24 = S/24 \cdot (23 \cdot 1.03 - 22).$$

$$3 \text{ месяц: } 22 \cdot S \cdot 1.03/24 - 21S/24 = S/24 \cdot (22 \cdot 1.03 - 21).$$

$$24 \text{ месяц: } S \cdot 1.03/24 - 0 = S/24 \cdot (1 \cdot 1.03 - 0).$$

Найдем сумму всех выплат:

$$\begin{aligned} & S/24 \cdot (24 \cdot 1.03 + 23 \cdot 1.03 + 22 \cdot 1.03 + \dots + 1 \cdot 1.03 - 23 - 22 - 21 - \dots - 1) = \\ & S/24 \cdot (1.03(24 + 23 + 22 + \dots + 1) - (23 + 22 + 21 + \dots + 1)) = S/24 \cdot (1.03 \\ & \cdot 300 - 276) = S/24 \cdot 33 = 11S/8 \end{aligned}$$

Чтобы найти численное значение суммы всех выплат, надо подставить $S=1,5$. Получим, что сумма всех выплат равна 2,0625 миллионов рублей, или 2062500 рублей.

3й способ

Рассмотрим формулу расчета дифференцированного платежа в банке.

Формула расчета дифференцированного платежа выглядит следующим образом:

$ДП = ОСЗ : ПП + ОСЗ \cdot ПС$, где

ДП - размер дифференцированного платежа

ОСЗ - остаток ссудной задолженности

ПП - количество периодов, оставшихся до погашения кредита

ПС - месячная процентная ставка по кредитному договору, равная 1/12 годовой процентной ставки

Пример расчета:

№	Год, месяц	Всего	В погашение долга	В погашение процентов	Остаток после платежа
0	0 месяц	-100 000.00	0.00	0.00	100 000.00
1	1 месяц	17 500.00	16 666.67	833.33	83 333.33
2	2 месяц	17 361.11	16 666.67	694.44	66 666.67
3	3 месяц	17 222.22	16 666.67	555.56	50 000.00
4	4 месяц	17 083.33	16 666.67	416.67	33 333.33
5	5 месяц	16 944.44	16 666.67	277.78	16 666.67
6	6 месяц	16 805.56	16 666.67	138.89	0.00
Всего заплачено		10 2 916.67	100 000.00	2 916.67	

Рассмотрим расчет на примере. Пусть, мы берем на 6 месяцев сумму 100000 рублей под 10% годовых. Тогда график погашения будет выглядеть следующим образом:

Покажем, как были сделаны расчеты:

1 месяц: $100000:6+100000\cdot0,00833333=17500.00$.

Остаток после платежа: $100000-16\ 666.67=83\ 333.33$

2 месяц: $83\ 333.33:5+83\ 333.33\cdot0,00833333=16$

$666.67+694.44=17361.11$

Остаток после платежа: $83\ 333.33-16\ 666.67=66\ 666.67$

3 месяц: $66\ 666.67:4+66\ 666.67\cdot0,00833333=16$

$666.67+555.56=17222.22$

Остаток после платежа: $66\ 666.67-16\ 666.67=50\ 000.00$

4 месяц: $50\ 000.00:3+50\ 000.00\cdot0,00833333=16\ 666.67+416.67=17\ 083.33$

Остаток после платежа: $50\ 000.00-16\ 666.67=33\ 333.33$

5 месяц: $33\ 333.33:2+33\ 333.33\cdot0,00833333=16\ 666.67+277.78=16\ 944.44$

Остаток после платежа: $33\ 333.33-16\ 666.67=16\ 666.67$

6 месяц: $16\ 666.67:1+16\ 666.67\cdot0,00833333=16\ 666.67+138.89=16\ 805.56$

Остаток после платежа: $16\ 666.67-16\ 666.67=0$. Кредит погашен.

4й способ

Пусть

x - ежемесячные платежи без начисленных %

$24x$ - все выплаты без начисленных %

$(24x + 23x + \dots + 2x + x)0,03 = 9x$ - % - за весь период
кредитования

$24x + 9x = 33x$ - все выплаты с начисленными %,

$$x = 1500000 / 24$$

$$x = 625000$$

$$33 * 62500 = 20\ 625\ 000$$

Аннуитетные платежи – вариант ежемесячного платежа по кредиту, когда размер ежемесячного платежа остаётся постоянным на всём периоде кредитования. Ежемесячный платёж при аннуитетной схеме погашения кредита состоит из двух частей. Первая часть платежа идёт на погашение процентов за пользование кредитом. Вторая часть идёт на погашение долга. При аннуитетной схеме выплат по кредиту, ежемесячный платёж рассчитывается как сумма процентов, начисленных на текущий период и суммы идущей на погашения суммы кредита.

31 декабря 2016 года некто взял в банке S рублей в кредит под a процентов годовых. Схема выплаты кредита следующая:

1 числа каждого следующего года банк начисляет a процентов на оставшуюся сумму долга. Затем некто переводит в банк сумму X ежегодного платежа (транш). Весь долг некто должен выплатить за n лет, то есть за n равных платежей. Необходимо найти одну из неизвестных величин:

Пример расчёта графика выплат по аннуитетному кредиту

Размер кредита – 100000 р, годовая процентная ставка - 10%,
срок погашения - 6 месяцев.

Для начала рассчитаем ежемесячный платёж:

$$100000 \cdot (0,0083333 + 0,0083333 / (1 + 0,0083333)^6 - 1) = 17156,14$$

Затем рассчитаем по месяцам процентную и кредитную часть аннуитетного платежа.

1 месяц: Проценты: $100000 \cdot 0,1 : 12 = 833,33$

Основной долг: $17156,14 - 833,33 = 16322,81$

2 месяц: Остаток кредита: $100000 - 16322,81 = 83677,19$

Проценты: $83677,19 \cdot 0,1 : 12 = 697,31$

Основной долг: $17156,14 - 697,31 = 16458,83$

3 месяц: Остаток кредита: $83677,19 - 16458,83 = 67218,36$

Проценты: $67218,36 \cdot 0,1 : 12 = 560,15$

Основной долг: $17156,14 - 560,15 = 16595,99$

4 месяц: Остаток кредита: $67218,36 - 16595,99 = 50622,38$

Проценты: $50622,38 \cdot 0,1 : 12 = 421,85$

Основной долг: $17156,14 - 421,85 = 16734,29$

5 месяц: Остаток кредита: $50622,38 - 16734,29 = 33888,09$

Проценты: $33888,09 \cdot 0,1 : 12 = 282,40$

Основной долг: $17156,14 - 282,40 = 16873,74$

6 месяц: Остаток кредита: $33888,09 - 16873,74 = 17014,35$

Проценты: $17014,35 \cdot 0,1 : 12 = 141,79$

Основной долг: $17156,14 - 141,79 = 17014,35$

Месяц	Платеж	Проценты	Тело кредита	Остаток
1	17156.14	833.33	16322.81	83677.19
2	17156.14	697.31	16458.83	67218.36
3	17156.14	560.15	16595.99	50622.38
4	17156.14	421.85	16734.29	33888.09
5	17156.14	282.4	16873.74	17014.35
6	17156.14	141.79	17014.35	0

Общая сумма платежей: **102936.84**

Общая сумма процентов (**переплата**): **2936.84**

Чтобы узнать размер переплаты по аннуитетному кредиту, необходимо ежемесячный платёж, умножить на количество периодов и из получившегося числа вычесть первоначальный размер кредита. В нашем случае переплата будет следующей: $17156,14 \cdot 6 - 100000 = 2936,84$

Аннуитетные платежи для них применима формула

$$A_1, A_2, A_3$$

A_1, A_2, A_3 - платежи клиента с уже
начисленными процентами

a - процентная ставка

B - сумма, взятая в кредит

Если дано:

A_1, A_2, A_3, A_4 – ежемесячные платежи,
а - процентная ставка - **арифметический способ
решения.**

В - сумма, взятая в кредит, а - процентная ставка -
линейное уравнение.

A_1, A_2, A_3, A_4 - ежемесячные платежи, В - сумма,
взятая в кредит - **квадратное уравнение.**

Какая схема выгодней:
Аннуитетная или
Дифференцированная?

Анатолий решил взять кредит в банке 331000 рублей на 3 месяца под 10% в месяц. Существуют две схемы выплаты кредита.

По первой схеме банк в конце каждого месяца начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Анатолий переводит в банк фиксированную сумму и в результате выплачивает весь долг тремя равными платежами (аннуитетные платежи).

По второй схеме тоже сумма долга в конце каждого месяца увеличивается на 10%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Анатолием. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину (дифференцированные платежи).

Какую схему выгоднее выбрать Анатолию? Сколько рублей будет составлять эта выгода?

Аннуитетная схема

$$\frac{A_1}{(1 + 0,01a)} + \frac{A_2}{(1 + 0,01a)^2} + \frac{A_3}{(1 + 0,01a)^3} + \dots = B$$

A_1, A_2, A_3, A_4 - ежемесячные платежи,

A - процентная ставка,

B - сумма, взятая в кредит.

$B = 331000$ руб

$a = 10\%$

$A_1 = A_2 = A_3 = x$ - ежемесячная выплата

$$x/1,1 + x/(1,1)^2 + x/(1,1)^3 = 331000 \quad x = 133100$$

Весь платеж составит 339300 руб

Дифференцированная схема

x руб – один из $3x$ равных платежей по основному долгу

$3x$ – вся сумма по основному долгу

Рассчитываем % ставку банка:

$$(3x + 2x + x) * 0,1 = 0,6x$$

$$3x + 0,6x = 3,6x$$

$$x = 331000 / 3$$

$$3,6x = 397200 \text{ руб}$$

Сравниваем дифференцированный и аннуитетный платежи:

$$339300 - 397200 = 2100 \text{ (руб)}$$

Спасибо за внимание!