

ТЕОРИЯ КРИВЫХ

Кривизна плоской кривой

Кривизна плоской кривой

Воспользуемся формулой (26) для вычисления кривизны кривой:

$$k = \frac{|[r'; r'']|}{|r'|^3} \quad (26)$$

1) Кривая задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$r' = \{x', y', 0\}$$

$$r'' = \{x'', y'', 0\}$$

$$[r'; r''] = \{0, 0, x' \cdot y'' - x'' \cdot y'\}$$

$$|[r'; r'']| = |x' \cdot y'' - x'' \cdot y'|$$

Подставим в (26) найденные нами значения:

Кривизна плоской кривой

$$k = \frac{|\dot{x} \cdot \ddot{y} - \ddot{x} \cdot \dot{y}|}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3} \quad (39)$$

(39) – формула для вычисления кривизны плоской кривой, если она задана параметрически.

2) Кривая задана в виде графика:

$$y = f(x)$$

Тогда параметризуем так:

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = f' \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = f'' \end{cases}$$

Кривизна плоской кривой

Подставим в (39) найденные нами значения:

$$k = \frac{|f''|}{\sqrt{1+f'^2}^3} \quad (40)$$

(40) – формула для вычисления кривизны плоской кривой, если она

задана в виде графика.
3) Кривая задана в неявном виде:

$$F(x, y) = 0$$

$$F(x(t), y(t)) = 0$$

$$F_x dx + F_y dy = 0$$

$$dy = -\frac{F_x}{F_y} dx$$

Кривизна плоской кривой

$$F_{xx}x^2 + 2F_{xy}xy + F_{yy}y^2 + F_x x + F_y y = 0$$

$$y = \frac{-F_{xx}x^2 - 2F_{xy}xy - F_{yy}y^2 - F_x x}{F_y}$$

Подставим x, y в (39):

$$k = \frac{\left| x \cdot \frac{-F_{xx}x^2 - 2F_{xy}xy - F_{yy}y^2 - F_x x}{F_y} - y \cdot \left(-\frac{F_x}{F_y} x\right) \right|}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{F_x}{F_y} x\right)^2}^3} = \frac{\left| \frac{-F_{xx}x^3 - 2F_{xy}x^2 y - F_{yy}y^2 x}{F_y} \right|}{\left(\frac{x \sqrt{F_y^2 + F_x^2}}{F_y} \right)^3}$$

Кривизна плоской кривой

$$k = \frac{\left| -F_{xx}F_y^2 + 2F_{xy}F_xF_y - F_{yy}F_x^2 \right|}{\sqrt{F_y^2 + F_x^2}^3} \quad (41)$$

(41) – формула вычисления кривизны плоской кривой, если она задана параметрически.

ВЫХОД

$$k = \frac{|\left[\begin{smallmatrix} \boxtimes & \boxtimes \\ \cancel{A} & \cancel{A} \end{smallmatrix} \right]|}{|\cancel{A}^3|} \quad (26)$$



$$k = \frac{|x' \cdot y'' - x'' \cdot y'|}{\sqrt{x'^2 + y'^2}^3} \quad (39)$$

(39) – формула для вычисления кривизны плоской кривой, если она задана параметрически.

