



ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Матрицы и действия над ними

Челябинск, 2018

РАЗДЕЛ 1.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.

Линейная алгебра является необходимым инструментарием для компактного и эффективного описания и анализа экономико-математических моделей и методов.

ТЕМА 1. МАТРИЦЫ

Понятие матрицы и основанный на нем раздел математики – матричная алгебра – имеет важное значение для экономистов, так как значительная часть математических моделей экономических объектов может быть записана в компактной матричной форме.

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая **m** строк одинаковой длины (или **n** столбцов одинаковой длины).

Матрица записывается следующим образом:

Матрицы обозначаются прописными латинскими буквами.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или $A_{m \times n} = (a_{ij})$ где a_{ij} – элемент матрицы, **i** – ой строки и **j** – го столбца,
где

$$\begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, m \\ j &= 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

- Матрицу A называют матрицей размера $m \times n$ и пишут $A_{m \times n}$
- Числа a_{ij} , составляющие матрицу, называется ее элементами. Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего левого угла, образуют главную диагональ.
- Матрицы равны между собой, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т.е.,
 $A=B$, если $a_{ij} = b_{ij}$ где $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$

Виды матриц

Если количество строк равно количеству столбцов, т.е. $m=n$, то матрица называется квадратной.

Квадратную матрицу размера $n \times n$ называют матрицей n -го порядка.

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 45 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Если $m \neq n$, то матрица называется прямоугольной.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица называется диагональной, если все элементы, не принадлежащие главной диагонали, равны нулю.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

*Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется единичной матрицей и обозначается символом ***E***.*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица называется треугольной, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

*Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой. Обозначается буквой **O**. Имеет вид:*

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

*В матричном исчислении матрицы **O** и **E** играют роль чисел 0 и 1 в арифметике.*

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется вектором (или вектор-столбец, или вектор-строка соответственно). Их вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad A = (b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n)$$

Матрица размера 1×1 , состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, т.е. $(5)_{1 \times 1}$ есть 5.



Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей транспонированной к данной. Обозначается A^T .

Так, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, если $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то $A^T = (1 \ 0)$.

Транспонированная матрица обладает следующим свойством: $(A^T)^T = A$.



Действия над матрицами

Сложение

Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц $A_{m \times n} = (a_{ij})$ и $B_{m \times n} = (b_{ij})$

называется матрица $C_{m \times n} = (c_{ij})$ такая, что

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$$

Записывают $C = A + B$.

Вычитание

Все свойства сложения соответствуют вычитанию.

Пример сложения и вычитания матриц

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} = C \quad A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix} = C$$

Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -6 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 7 \\ 4 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

Сумма матриц:

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 9 \\ -2 & 17 & 7 \end{pmatrix} = C$$

Разность матриц:

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -5 \\ -10 & -1 & 1 \end{pmatrix} = C$$

Умножение на число

Произведением матрицы $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на число k называется матрица $B_{m \times n} = (b_{ij})$ такая, что $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$)
Записывают $B = k \cdot A$.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, k = 2, A \cdot k = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

Матрица $-A = (-1) \cdot A$ называется противоположной матрице A .

Операции сложения, вычитания и умножения матрицы на число обладают следующими свойствами:

1) $A + B = B + A$ (коммутативность)

2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ – ассоциативность

3) $A + 0 = A$

4) $A - A = 0$

5) $1 \cdot A = A$

6) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$ – дистрибутивность

7) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$

8) $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A$

где A, B, C – матрицы, α и β – числа.

Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями матриц являются:

- ❖ перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;
- ❖ умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;
- ❖ прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и тоже число.

Две матрицы называются A и B эквивалентными, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Записывается $A \sim B$.

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю. Такую матрицу называют канонической, например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ПРИМЕР: ПРИВЕСТИ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ МАТРИЦУ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

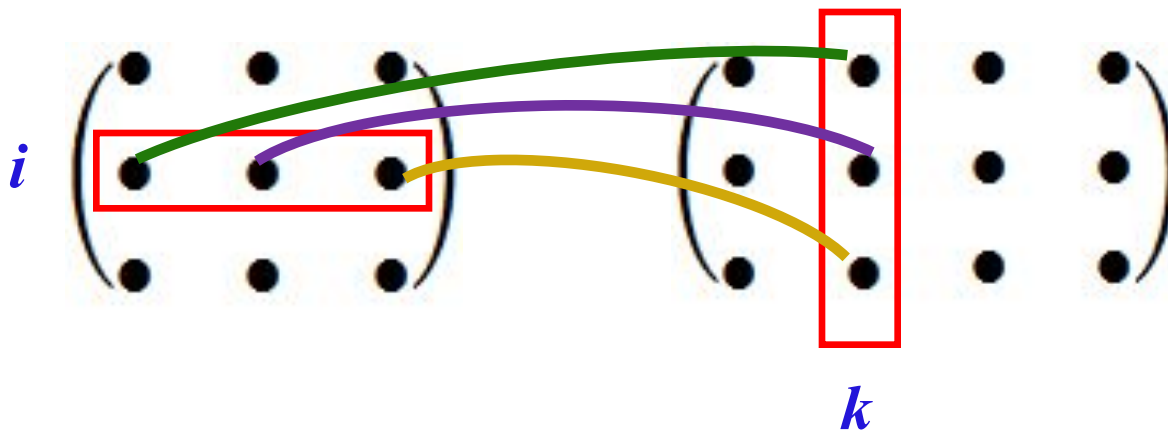
Решение: выполняя элементарные преобразования, получаем:

Произведение матриц

Произведением матрицы $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на матрицу $B_{n \times p} = (b_{jk})$ называется матрица $C_{m \times p} = (c_{ik})$ такая, что

$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk}$, где $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, p}$
т.е. элемент i -й строки и k -го столбца матрицы произведения C равен сумме произведений элементов i -строки матрицы A на соответствующие элементы k -го столбца матрицы B .

Получение элемента c_{ik} схематично изображается так:



Если матрицы A и B квадратные одного размера, то произведения AB и BA всегда существуют. Легко показать, что $A \cdot E = E \cdot A = A$, где A – квадратная матрица, E – единичная матрица того же размера.

Пример:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2 \times 3} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}_{3 \times 2} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

Тогда произведение $A \cdot B$ не определено, так как число столбцов матрицы A не совпадает с числом строк матрицы B . При этом определено произведение $B \times A$, которое считают следующим образом:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9 & 2+3 & 1+0 \\ 1+6 & 2+2 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрицы A и B называются перестановочными, если $AB = BA$. Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

2. $A \cdot (B + C) = AB + AC$

3. $(A + B) \cdot C = AC + BC$

4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$

Если, конечно, написанные суммы и произведения матриц имеют смысл.

Для операции транспонирования верны свойства:

$$1. (A + B)^T = A^T + B^T$$

$$2. (AB)^T = B^T \cdot A^T$$

Тема 2. Определители

Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число $\det A$ (или $|A|$, или Δ), называемое ее определителем, следующим образом:

1. $n = 1$.

$$A = (a_1); \det A = a_1$$

2. $n = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

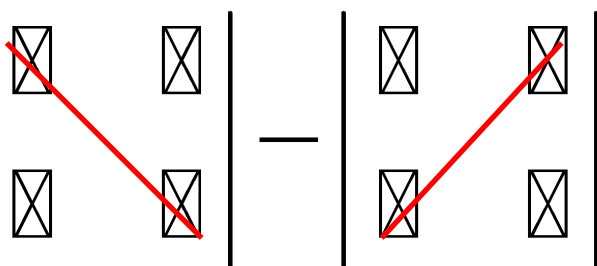
3. $n = 3$.

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ &\quad - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} \end{aligned}$$

Определитель матрицы A также называют детерминантом.

Вычисление определителя 2-го порядка, иллюстрируется схемой:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \boxed{\times} & \boxed{\times} \\ \boxed{\times} & \boxed{\times} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \boxed{\times} & \boxed{\times} \\ \boxed{\times} & \boxed{\times} \end{vmatrix}$$


Примеры:

$$1) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 1 = 15 - (-2) = 17$$

$$2) \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

$$3) \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$4) \begin{vmatrix} \log_2 32 & \log_3 27 \\ \log_4 16 & \log_5 125 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 6 = 9$$

При вычислении определителя 3-го порядка удобно пользоваться правилом треугольника (или Саррюса), которое символически можно записать так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} - \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

(основания равнобедренных треугольников параллельны главной диагонали)
(основания треугольников параллельны побочной диагонали)

Пример. Вычислить определитель третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 - 6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 = -15 + 48 - 6 - 18 = 48 - 39 = 9.$$

$$\begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$



Пример. Вычислить определитель с помощью правила диагоналей

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$$

- - - + +

$$\Delta = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 - (6 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-4) \cdot 5 + 3 \cdot (-2) \cdot (-3)) =$$

$$-15 + 48 - (6 + 18) = 33 - 24 = 9.$$



Тема 2.2 Свойства определителей

1. Определитель не изменится, если его транспонировать:

$$\det A = \det A^T$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - (-10) = 22$$

$$\det A^T = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - (-10) = 22$$



2. При перестановке двух строк или столбцов определитель изменит свой знак на противоположный.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - (-10) = 22$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -10 - 12 = -22$$



3. Определитель с двумя одинаковыми строками или столбцами равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 + 6 - 6 + 3 - 4 = 0$$



4. Общий множитель всех элементов строки или столбца можно вынести за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$



Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 36 & 12 & 24 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 12 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 24 \cdot (2 - 9 + 2 - 1 - 12 + 3) = 24 \cdot (-15) = -360$$



5. Если все элементы двух строк (или столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0$$



6. Если каждый элемент какого-либо ряда определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых соответствующий ряд состоит из первых слагаемых, а во втором- из вторых слагаемых.



$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} + b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} + b_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} + b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$



7. Если к какой-либо строке (или столбцу) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца) , умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{matrix} \times K \\ \leftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} + a_{21} & ka_{12} + a_{22} \end{vmatrix}$$



$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 0 = 10$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 2 \\ \left. \begin{array}{c} \text{+} \\ \leftarrow \end{array} \right\} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-10) = 10$$



8. Треугольный определитель равен произведению элементов главной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$



ПРИВЕСТИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ К ТРЕУГОЛЬНОМУ ВИДУ И ВЫЧИСЛИТЬ ЕГО:

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ \left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 5 & 7 & 5 \end{array} \right| \begin{array}{l} \times(-2) \\ \times(-5) \end{array} \end{array} =$$

$$= - \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & -15 \end{array} \right| + = - \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -20 \end{array} \right| = 60$$



РАЗЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПО ЭЛЕМЕНТАМ СТРОКИ ИЛИ СТОЛБЦА.

- ▣ **Минором** M_{ij} элемента a_{ij} $\det D$ называется такой новый определитель, который получается из данного вычеркиванием i -ой строки и j -го столбца содержащих данный элемент.



$$\det D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$



Алгебраическим дополнением A_{ij}

элемента a_{ij} $\det D$ называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$

т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$



$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

$$\det D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -1 \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Теорема:

- *Сумма произведений элементов любой строки (или столбца) определителя на их алгебраические дополнения равна этому определителю.*



разложение по i -ой строке:

$$\det D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik} , \quad i = 1, \dots, n$$

разложение по j -му столбцу:

$$\det D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj} , \quad j = 1, \dots, n$$



РАЗЛОЖИТЬ ДАННЫЙ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ПО ЭЛЕМЕНТАМ: 1) 3-ЕЙ СТРОКИ; 2) 1-ГО СТОЛБЦА.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$



1) РАЗЛОЖИМ ДАННЫЙ
ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ПО ЭЛЕМЕНТАМ 3-ЕЙ
СТРОКИ:

$$\begin{aligned}\det D &= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34} = \\ &= a_{31} \cdot (-1)^4 \cdot M_{31} + a_{32} \cdot (-1)^5 \cdot M_{32} + \\ &\quad + a_{33} \cdot (-1)^6 \cdot M_{33} + a_{34} \cdot (-1)^7 M_{34} =\end{aligned}$$



$$= 3 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1) \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 36 - 2 \cdot 2 - 4 - 4 \cdot 11 = 56$$



2) РАЗЛОЖИМ ДАННЫЙ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ПО ЭЛЕМЕНТАМ 1-ГО СТОЛБЦА:

$$\begin{aligned}\det D &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41} = \\ &= a_{11} \cdot (-1)^2 \cdot M_{11} + a_{21} \cdot (-1)^3 \cdot M_{21} + \\ &\quad + a_{31} \cdot (-1)^4 \cdot M_{31} + a_{41} \cdot (-1)^5 M_{41} =\end{aligned}$$



$$= 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ 3 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -20 + 0 + 3 \cdot 36 - 32 = 56$$



ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ.

- ✓ 1. разложение определителя по элементам строки или столбца;
- ✓ 2. метод эффективного понижения порядка;
- ✓ 3. приведение определителя к треугольному виду.



Метод эффективного понижения порядка:

Вычисление определителя n -го порядка сводится к вычислению одного определителя $(n-1)$ -го порядка, сделав в каком-либо ряду все элементы, кроме одного, равными нулю.



$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times(-3) \\ \times(-1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -10 & -8 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \end{vmatrix} =$$



$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 14 = 56$$



**ВЫЧИСЛИТЬ
ПРИВЕДЕНИЕМ
ТРЕУГОЛЬНОМУ ВИДУ.**

**ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ
ЕГО К**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times(-3) \\ \times(-1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -10 & -8 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \end{vmatrix} =$$



$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times 2 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow \end{array}$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 15 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 2 \end{vmatrix} =$$



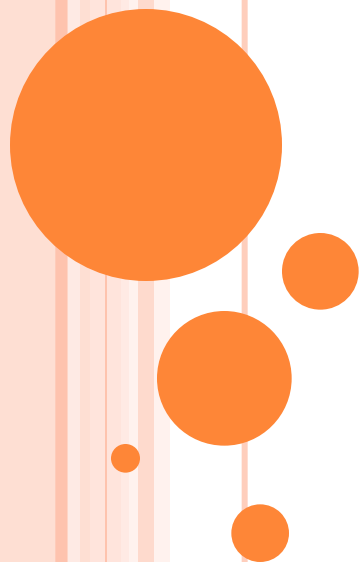


$$= -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \quad = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & 15 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \times(-2) \\ \leftarrow \end{array}$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 4 \cdot 14 = 56$$



ТЕМА 3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА



- Квадратная матрица порядка n называется **невырожденной**, если её определитель не равен нулю.

$$\Delta_n = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

- В противном случае ($\det A = 0$) матрица A называется **вырожденной**.



- Если A - квадратная матрица, то **обратной** по отношению к матрице A называется матрица, которая будучи умноженной на A (как справа, так и слева) даёт единичную матрицу.

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$



- Если обратная матрица существует, то матрица A называется **обратимой**.
- Операция вычисления обратной матрицы при условии, что она существует, называется **обращением матрицы**.



Теорема.

Для того, чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной ($\det A \neq 0$).



НАХОЖДЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ:

$$A^{-1} = \frac{(A^*)^T}{\det A}$$

где

$$(A^*)^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

присоединенная матрица



МАТРИЦУ:

- ✓ 1. находят $\det A$ и убеждаются, что $\det A \neq 0$;
- ✓ 2. находят алгебраические дополнения всех элементов матрицы A и записывают новую матрицу A^* ;
- ✓ 3. транспонируют новую матрицу $(A^*)^T$
- ✓ 4. умножают полученную матрицу на $\frac{1}{\det A}$



Пример 1.

Найти матрицу, обратную к матрице A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$



1) НАХОДИМ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ
A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$



2) НАХОДИМ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ
ДОПОЛНЕНИЯ ВСЕХ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ
A:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -14$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6$$



$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$



ЗАПИСЫВАЕМ НОВУЮ МАТРИЦУ:

$$A^* = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 3 \\ -14 & -2 & 6 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

3) транспонируем эту матрицу:

$$(A^*)^T = \begin{pmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$



4) УМНОЖИМ ПОЛУЧЕННУЮ МАТРИЦУ НА $\frac{1}{\det A}$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{7}{14} & -1 & \frac{7}{14} \\ \frac{6}{14} & -\frac{2}{14} & -\frac{2}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{6}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ПРОВЕРКА: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{7}{14} & -1 & \frac{7}{14} \\ \frac{6}{14} & -\frac{2}{14} & -\frac{2}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{6}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ОТВЕТ:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}$$



РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ.

$$A \cdot X = B$$

$$X \cdot A = B$$

$$\boxed{A}^{-1} \cdot \boxed{A} \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

E

$$X \cdot \boxed{A} \cdot \boxed{A}^{-1} = B \cdot A^{-1}$$

E

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X \cdot E = B \cdot A^{-1}$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = B \cdot A^{-1}$$



Пример 2.

Найти матрицу X :

$$A \cdot X \cdot C = B$$

$$A \cdot X \cdot C = B$$

$$\begin{matrix} \boxed{A}^{-1} & \boxed{A} \cdot X \cdot \boxed{C} & \boxed{C}^{-1} \\ E & & E \end{matrix} = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$$

$$E \cdot X \cdot E = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$$

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$$



Пример 3. Найти матрицу X :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}}_A \cdot X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}_B$$

$$A \cdot X = B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$



$$1) \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists A^{-1}$$

$$2) \quad A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5$$


$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$


$$3) \quad (A^*)^T = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$4) \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^*)^T = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$



$$5) \quad X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B$$



Ответ:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$



Пример 4. Показать, что

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$



Пусть $ABX = C$

$$(AB)X = C$$

$$\underbrace{(AB)^{-1} \cdot (AB)}_E \cdot X = (AB)^{-1} C$$

$$X = (AB)^{-1} C$$

$$X \cdot C^{-1} = (AB)^{-1} \underbrace{C \cdot C^{-1}}_E$$

$$XC^{-1} = (AB)^{-1}$$

$$A(BX) = C$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_E \cdot (BX) = A^{-1} \cdot C$$

$$BX = A^{-1} \cdot C$$

$$\underbrace{B^{-1} \cdot B}_E \cdot X = B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot C$$

$$X = B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot C$$

$$X \cdot C^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot \underbrace{C \cdot C^{-1}}_E$$

$$XC^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

Получили,
что

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

