

Презентація з математики

на тему:

Діофантові рівняння

Виконавець:

Учень групи 10-1

Фінансово-економічного ліцею

М.Дніпропетровська

Іванов Данила



Мета роботи:

$$ax + by = c$$

Поглибити знання
про методи
розв'язування
діофантових
рівнянь



Перший розділ: історичний екскурс

Надгробок Діофанта:

Прах Діофанта гробниця ховає: вдивися їй і камінь
Мудрим мистецтвом розкриє покійного вік:
З волі богів шосту частину життя був він дитина,
А ще половину шостої – стрів із пушком на щоках.
Тільки минула сьома, з коханою він одружився,
З нею п'ять років проживши, сина діждався мудрець.
Та півжиття свого тішився батько лиш сином:
Рано могила дитину у батька забрала.
Років двічі по два батько оплакував сина.
А по роках цих і сам стрів він кінець свій печальній...

Задача зводиться до рівняння

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$$

Отже Діофант прожив 84 роки.

У книзі “Арифметика” Діофант викладає теорію рівнянь першого степеня, розв'язує квадратні рівняння, але більше уваги приділено так званим невизначеним рівнянням та їх системам

$K^T \eta \wedge \Delta^T \bar{\epsilon} \bar{\sigma} K^T \bar{a}.$

Καὶ ἐστὶν ἡ δύναμις, καὶ ἐστὶν αὐτῇ σημεῖον ὁ
δ' ἐπίσημον ἔχον τ. ΔΥ. ὁ δὲ κύβος, καὶ ἐστὶν
αὐτῇ σημεῖον κ' ἐπίσημον ἔχον τ. ΚΥ. ὁ δὲ ἐκ τετραγών
ἐφέαυτ' ἀπλοπλάσια δύνει, διωαμόδυναμις, καὶ ἐστὶ
αὐτῇ σημεῖον δ' ἐπίσημον ἔχον τ. ΔΔΥ. ὅτι
ὁ δὲ ἐκ τῆς αὐτῇ ἀπλοπλάσιος κύβου ἀπλοπλά
σια δύνει, διωαμόκύβος καὶ ἐστὶν αὐτῇ σημεῖον δ' ἐπίσημον ἔχον τ. ΔΚΥ. ὁ δὲ ἐκ κύβου ἐκ τῆς ἀπλοπλά
πλάσιος ἀπλοπλάσιος, ἀνέκύβος, καὶ ἐστὶν αὐτῇ σημεῖον
δ' ἐπίσημον ἔχον τ. ΚΚΥ.

Найпростіше діофантове рівняння

$$ax + by = 1$$

де a, b – цілі взаємно прості числа, має нескінченну множину розв'язків (якщо x_0, y_0 – розв'язок, то числа $x = x_0 + b \cdot n, y = y_0 - a \cdot n, n \in \mathbb{Z}$ також будуть розв'язками.)

Розв'язування: Застосувати алгоритм Евкліда до чисел

a і b за схемою: 1) $a = bq_1 + r_1, 0 \leq r_1 < b$;

2) $b = r_1q_2 + r_2, 0 \leq r_2 < r_1$;

3) $r_1 = r_2q_3 + r_3, 0 \leq r_3 < r_2$;

4) $r_2 = r_3q_4 + r_4, 0 \leq r_4 < r_3$;

5) $r_3 = r_4q_5 + 1, r_5 = 1$;

6) $r_4 = r_5q_6$ (оскільки $(a, b) = 1$, то число кроків скінчене)

Знайти частинний цілий розв'язок рівняння $37x+23y=1$.

Розв'язання.

$$37 = 23 \cdot 1 + 14 \Rightarrow q_1 = 1$$

$$23 = 14 \cdot 1 + 9 \Rightarrow q_2 = 1$$

$$14 = 9 \cdot 1 + 5 \Rightarrow q_3 = 1$$

$$9 = 5 \cdot 1 + 4 \Rightarrow q_4 = 1$$

$$5 = 4 \cdot 1 + 1 \Rightarrow q_5 = 1, r_5 = 1$$

$$4 = 4 \cdot 1$$

Відповідь.

Підстановкою в рівняння визначаємо, що
- частинний розв'язок.

$$\begin{cases} x_0 = 5 \\ y_0 = -8 \end{cases}$$

- частинний розв'язок.

$$\begin{cases} x_0 = 5 \\ y_0 = -8 \end{cases}$$

r_5	$-q_5 = -1$	$-q_4 = -1$	$-q_3 = -1$	$-q_2 = -1$	$-q_1 = -1$
1	-1	$(-1)(-1)+1=2$	$2(-1)+(-1)=-3$	$(-3)(-1)+2=5$	$5(-1)+(-3)=-8$

Знайти частинний і загальний розв'язки

$7x-4y=2$

Розв'язання

$$1) y = \frac{7x-2}{4}$$

$$2) x=0; 1; 2 \quad \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 3 \end{cases} \quad - \text{ частинний розв'язок;}$$

$$3) \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 3 - 7t \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 3 + 7t \end{cases} \quad - \text{ загальний розв'язок.}$$

$$\text{Відповідь:} \quad \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 3 \end{cases} \quad - \text{ частинний розв'язок;}$$

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 3 - 7t \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 3 + 7t \end{cases}$$

Приклади

Приклад 1.

Знайдіть усі цілі числа, які є розв'язками рівняння

$$y^3 - x^3 = 91.$$

Розв'язання. Оскільки $y^2 + xy + x^2 \geq 0$, а 7 і 13 – прості числа, то рівність можлива у випадках:

$$\begin{cases} y - x = 91 \\ y^2 + xy + x^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y - x = 1 \\ y^2 + xy + x^2 = 91 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - x = 7 \\ y^2 + xy + x^2 = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} y - x = 13, \\ y^2 + xy + x^2 = 7 \end{cases}$$

Розглянувши ці системи, знаходимо розв'язки рівняння: $(5;6)$, $(-6; -5)$, $(-3;4)$, $(-4;3)$.

Приклад 2.

Розв'яжіть рівняння $x^3 - y^3 = xy + 61$ на прикладі натуральних чисел.

Розв'язання. Скористаємося тотожністю

$$x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$$

Позначивши $x - y = m$, $x \cdot y = n$, де $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$, дістанемо рівняння $m^3 + 3mn - n = 61$, звідки $n = \frac{61 - m^3}{3m - 1}$. Оскільки $n \in \mathbb{Z}, n^3 < 61$, а отже, можливим значенням m будуть числа 1, 2, 3..

Перевіривши ці значення, дістанемо єдину пару натуральних чисел, які задовольняють рівняння: $m=1; n=30$. Отже, маємо:

, звідки $x=6, y=5$.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 30 \end{cases}$$

Зробивши перевірку, переконаємося, що ці числа є розв'язками рівняння.

Приклад 3.

Доведіть, що рівняння $x^2 + y^2 = z^2$ має нескінченну множину цілих розв'язків.

Розв'язання. Узявши до уваги рівність $3^2 + 4^2 = 5^2$ переконаємося в тому, що рівняння має нескінченну множину цілих розв'язків вигляду

$$x = 3\alpha, y = 4\alpha, z = 5\alpha$$

де α - довільне ціле число.

**Дякую
за увагу**