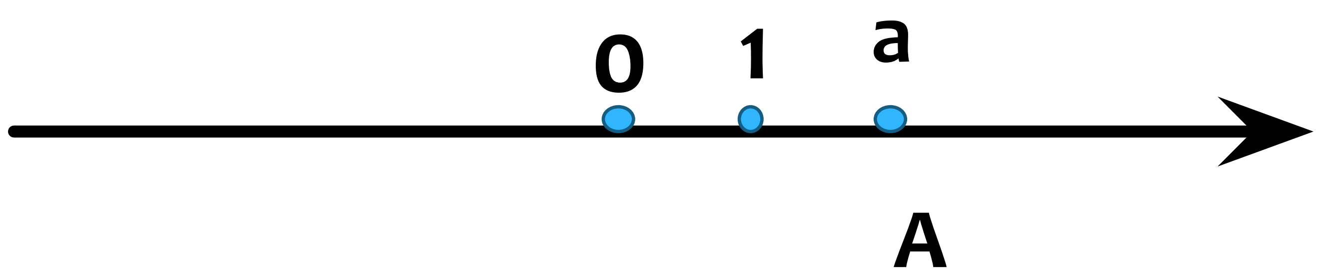
# Метод координат и метод векторов при решении задач

Подготовила обучающаяся группы ПК-28

Орёл Ольга

# Некоторые определения и вычислительные формулы

**Координаты точки на прямой.**




$$A(a)$$

# Задачи на прямой в координатах

* **1. Вычисление длины отрезка АВ.**

Дано: А($x_1$), В($x_2$).

Найти АВ.

Решение:

$$\rho(A,B) = |x_2 - x_1|$$

# Задачи на прямой в координатах

* **2. Вычисление координаты середины отрезка.**

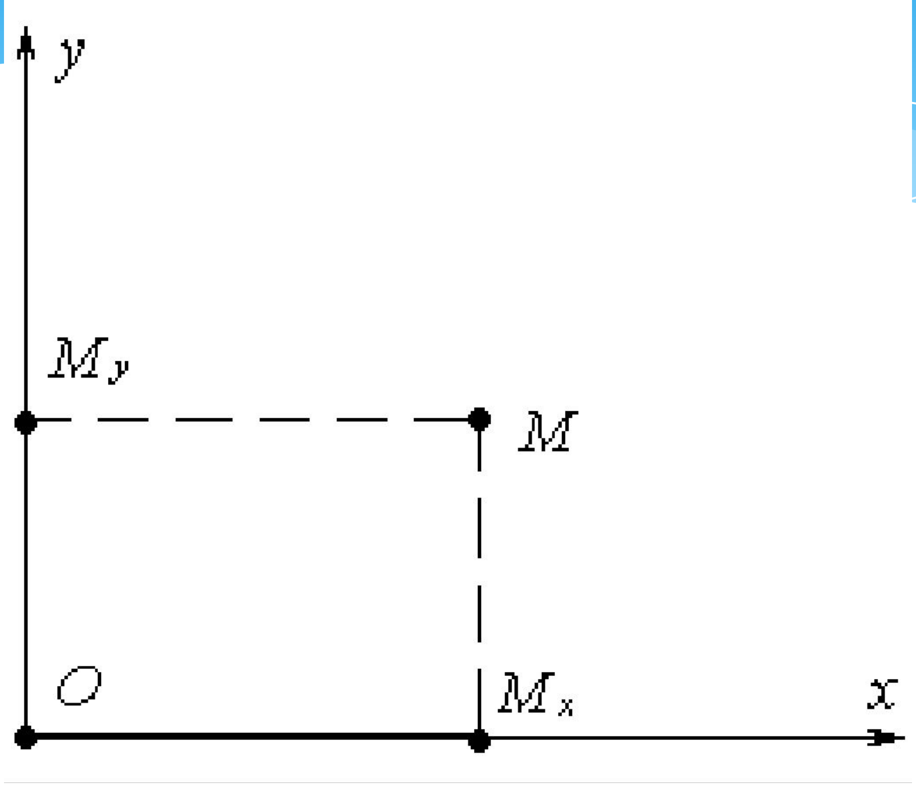
Дано: A($x_1$), B($x_2$), C – середина отрезка AB.

Найти координату C.

Решение:

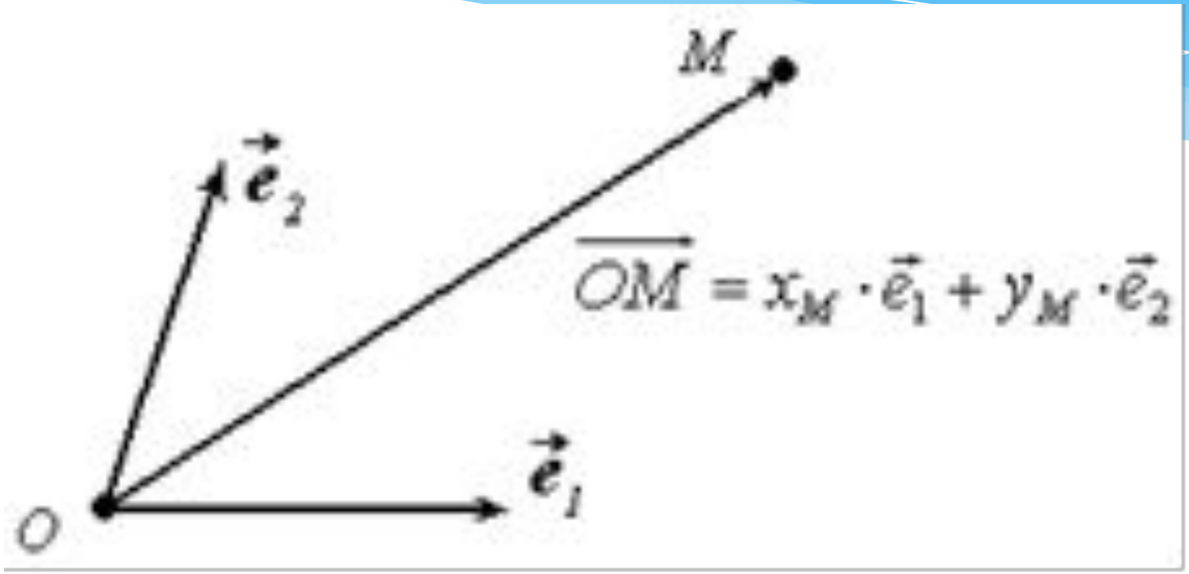
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

# Координаты точки на плоскости




*Определение координат*
*точки методом проекций на оси.*

# Координаты точки на плоскости




*Определение координат точки через координаты ее радиус-вектора.*

# Деление отрезка пополам.

Дано: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x, y)$ – середина отрезка AB.

Найти координаты C.

Решение:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

# Расстояние между точками

Дано: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

Найти AB.

Решение:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

# Некоторые свойства векторов

* ***Коллинеарность векторов***

* **Первый признак:** $\vec{a} = \lambda \vec{b}$

* **Второй признак:** $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$

# Некоторые свойства векторов

* *Вычисление координат вектора по координатам его начала и конца.*

$$\overline{AB}\{x_B - x_A, y_B - y_A\}$$

# Некоторые свойства векторов

* ***Вычисление длины вектора и длины отрезка***

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

# Некоторые свойства векторов

- *Скалярное произведение векторов в прямоугольной системе координат*

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$$

$$(\vec{a},\vec{b}) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

# Некоторые свойства векторов

- ***Признак перпендикулярности векторов:***

  ***два ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.***

# Некоторые свойства векторов

* ***Вычисление угла между векторами.***

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

# Некоторые свойства векторов

* **Вычисление площади параллелограмма, построенного на двух векторах.** $\vec{a}\{a_1, a_2\}, \vec{b}\{b_1, b_2\}$

$$S = |a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1|$$

# Уравнения прямой и отрезка

* *Параметрические уравнения прямой.*

$$x = a_1 \cdot t + x_0$$

$$y = a_2 \cdot t + y_0,$$

# Уравнения прямой и отрезка

* *Канонические уравнения прямой.*

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}$$

# Уравнения прямой и отрезка

- *Общее уравнение прямой.*

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

# Уравнения прямой и отрезка

- ***Условие перпендикулярности двух прямых, заданных как графики линейных функций.***

$$y = k_1 \cdot x + b_1 \qquad y = k_2 \cdot x + b_2$$

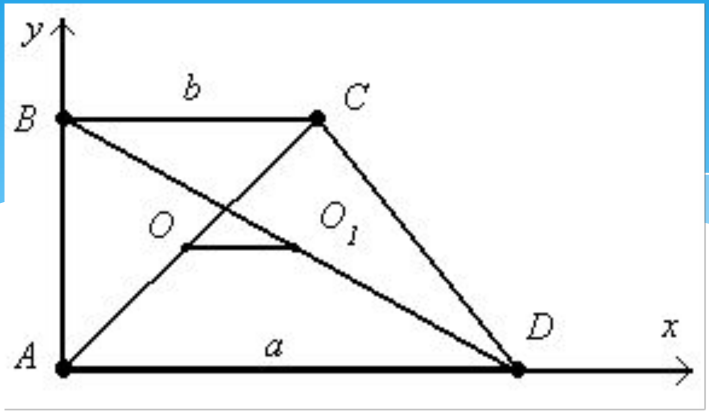
$$\vec{a}_1\{1, k_1\} \qquad \vec{a}_2\{1, k_2\}$$

$$1 + k_1 \cdot k_2 = 0 \qquad k_1 \cdot k_2 = -1$$

# Уравнение окружности

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

# Примеры решения задач




**Задача 1.** ***Дана прямоугольная трапеция с основаниями a и b. Найдите расстояние между серединами ее диагоналей.***

**Решение.** 1. Введем систему координат как указано на рисунке 3. Тогда вершины трапеции будут иметь координаты: A(*0*,*0*), B(*0*,*y*), C(*b*,*y*) и D(*a*,*0*). (*y* – высота трапеции, AB).

2. Найдем координаты середин диагоналей. Для точки O,
для точки $O_1$:

$$x_O = \frac{0+b}{2} = \frac{b}{2};\, y_O = \frac{0+y}{2} = \frac{y}{2}$$

$$x_{O_1} = \frac{0+a}{2} = \frac{a}{2};\, y_{O_1} = \frac{0+y}{2} = \frac{y}{2}$$

По формуле найдем расстояние между точками O и $O_1$:

$$|OO_1| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}-\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{a-b}{2}$$

# МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

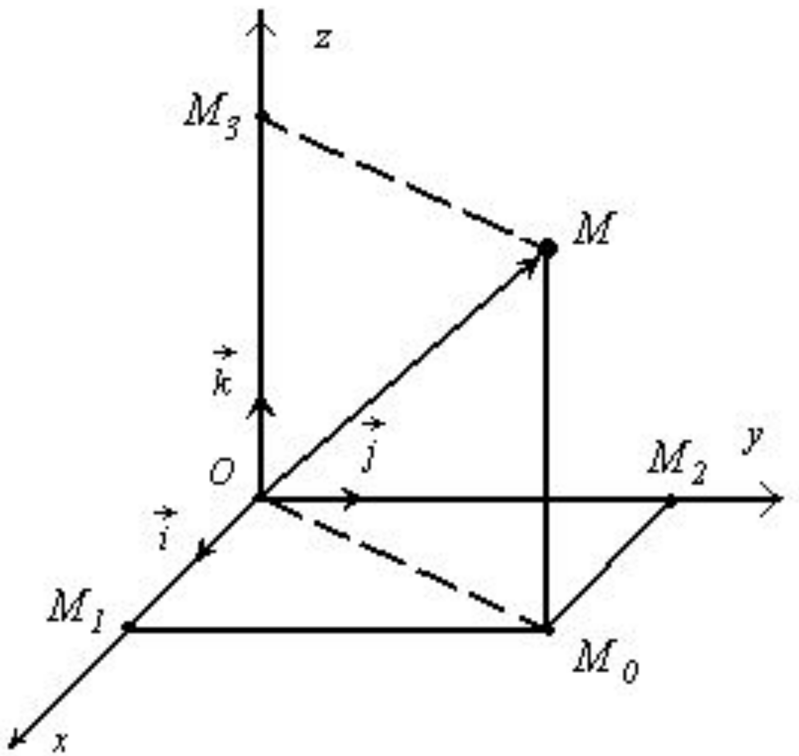



**Рисунок 1**

# Основные формулы

* **Координаты вектора по координатам его начала и конца определяются так: если $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$**

# Основные формулы

- **Скалярное произведение векторов = (*$a_1$*, *$a_2$*, *$a_3$*) и = (*$b_1$*, *$b_2$*, *$b_3$*) в координатах равно:**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

# Основные формулы

- **Длина вектора = ($a_1$, $a_2$, $a_3$) вычисляется по формуле**

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

# Основные формулы

* **Угол между векторами = (*$a_1$, $a_2$, $a_3$*) и = (*$b_1$, $b_2$, $b_3$*) из определения скалярного произведения**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$$

# Основные формулы

* **Угол между векторами = ($a_1$, $a_2$, $a_3$) и = ($b_1$, $b_2$, $b_3$) из определения скалярного произведения**

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

# Основные формулы

- **Расстояние между двумя различными точками $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$ равно**

- $$\rho(M_1, M_2) = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

# Основные формулы

- **Уравнение сферы с центром в точке C $(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом $r$ имеет вид:**
- $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$

# Основные формулы

* **Координаты точки $M(x,y,z)$ – середины отрезка $M_1M_2$, где $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и**
* **$M_2\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$, $M_1 \neq M_2$ находятся по формулам:**

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

# Основные формулы

* **Условие коллинеарности векторов = ($a_1$, $a_2$, $a_3$) и = ($b_1$, $b_2$, $b_3$) имеет вид**

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{c_3}{c_3}$$

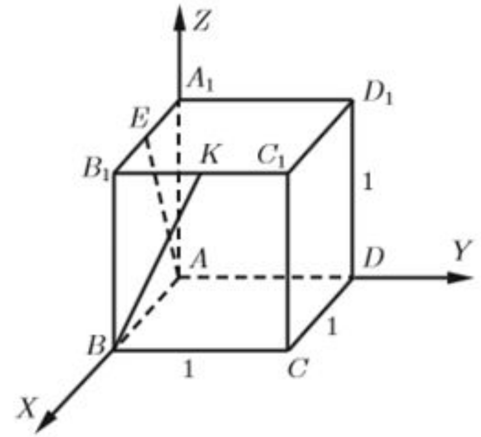
# Алгоритм применения метода координат к решению геометрических задач сводится к следующему:

* Выбираем в пространстве систему координат из соображений удобства выражения координат и наглядности изображения.
* Находим координаты необходимых для нас точек.
* Решаем задачу, используя основные задачи метода координат.
* Переходим от аналитических соотношений к геометрическим

# Примеры решения задач

*1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки $E$ и $K$ — середины ребер соответственно $A_1B_1$ и $B_1C_1$. Найдите косинус угла между прямыми $AE$ и $BK$.*

Если в задаче С2 вам достался куб — значит, повезло. Он отлично вписывается в прямоугольную систему координат. Строим чертеж:




Длина ребра куба не дана. Какой бы она ни была, угол между $AE$ и $BK$ от нее не зависит. Поэтому возьмем единичный куб, все ребра которого равны 1.

Прямые $AE$ и $BK$ — скрещиваются. Найдем угол между векторами $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{BK}$. Для этого нужны их координаты.

$A\ (0;\ 0;\ 0)$
$B\ (1;\ 0;\ 0)$
$E\ \left(\frac{1}{2};\ 0;\ 1\right)$
$K\ \left(1;\ \frac{1}{2};\ 1\right)$

Запишем координаты векторов:
$\overrightarrow{AE}\ \left(\frac{1}{2};\ 0;\ 1\right)$
$\overrightarrow{BK}\ \left(0;\ \frac{1}{2};\ 1\right)$
и найдем косинус угла между векторами $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{BK}$:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BK}}{\left|\overrightarrow{AE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BK}\right|} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 0 + 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot 1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2}\cdot\sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

* Многие задачи в математике решаются методом координат, суть которого состоит в следующем:
* Задавая фигуры уравнениями (неравенствами) и выражая в координатах различные геометрические соотношения, мы применяем алгебру к решению геометрических задач;
* Пользуясь координатами, можно истолковывать алгебраические соотношения геометрически, применяя геометрию к решению алгебраических задач.

СПАСИБО

ЗА

ВНИМАНИЕ!