

Применение метода рационализации при решении неравенств и систем неравенств

Метод рационализации
заключается
в замене сложного выражения $F(x)$
на
более простое выражение $G(x)$,
при которой
неравенство $G(x) > 0$ равносильно
неравенству $F(x) > 0$ в
области определения выражения
 $F(x)$.

Выделим некоторые выражения

F

и соответствующие им

рационализирующие выражения

$G,$

где f, g, h, p, q – выражения $\neq 1$, $f > 0$, $g > 0$),

a – фиксированное число $\neq 1$).

($a > 0$, a

	Выражение F	Выражение G
1 1a 1б	$\log_a f - \log_a g$ $\log_a f - 1$ $\log_a f$	$(a - 1)(f - g)$ $(a - 1)(f - a)$ $(a - 1)(f - 1)$
2 2a 2б	$\log_h f - \log_h g$ $\log_h - 1$ $\log_h f$	$(h - 1)(f - g)$ $(h - 1)(f - h)$ $(h - 1)(f - 1)$
3	$\log_f h - \log_g h$ $(g \neq 1, f \neq 1)$	$(f - 1)(g - 1)(h - 1)(g - f)$
4 4a	$h^f - h^g (h > 0)$ $h^f - 1$	$(h - 1)(f - g)$ $(h - 1)f$
5	$f^h - g^h$ $(f > 0, g > 0)$	$(f - g)h$
6	$ f - g $	$(f - g)(f + g)$

Некоторые следствия с учетом области

определения неравенства:

$$* \log_h f \cdot \log_p g \geq 0 \Leftrightarrow (h-1)(f-1)(p-1)(g-1) \geq 0$$

$$* \log_h f \cdot \log_p g \geq 0 \Leftrightarrow (fg-1)(h-1) \geq 0$$

$$* \sqrt{f} - \sqrt{g} \geq 0 \Leftrightarrow f - g \geq 0$$

$$* \frac{h^f - h^g}{h^p - h^q} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{f - g}{p - q} \geq 0$$

Пример 1.

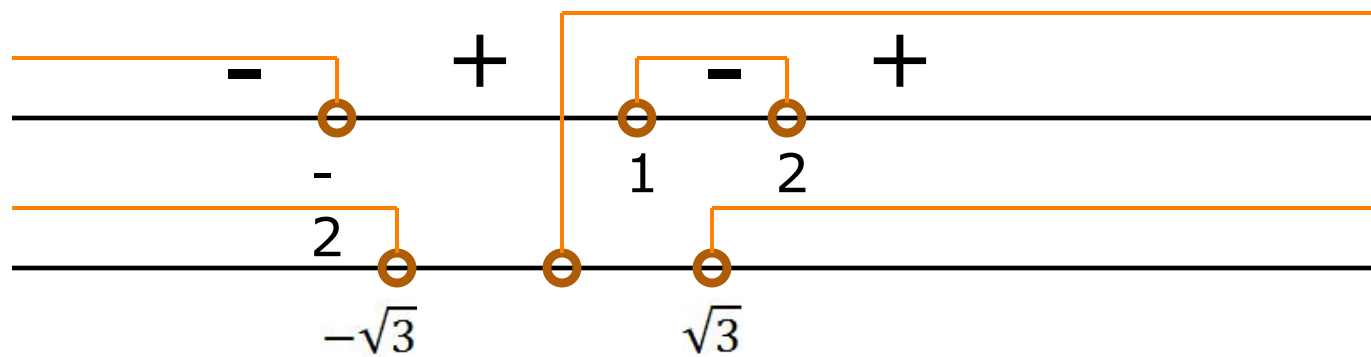
Решить неравенство: $\log_x(x^2 - 3) < 0$

Решение:

$$\begin{cases} (x - 1)(x^2 - 3 - 1) < 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ x^2 - 3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 1)(x - 2)(x + 2) < 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) > 0 \end{cases}$$

{



OTBE $(-\sqrt{3}; 2)$

T:

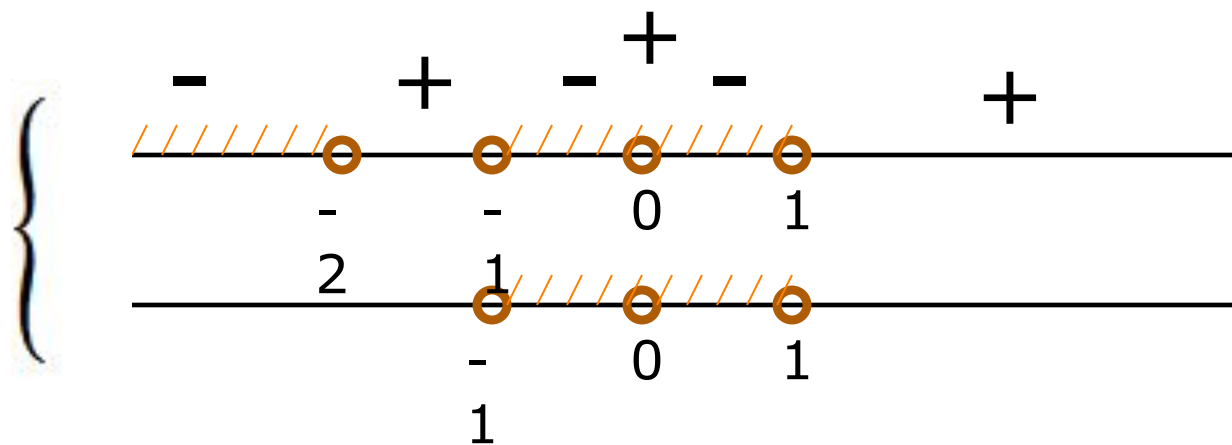
Пример 2.

Решить неравенство: $\log_{x+3} \left(\frac{1+x^2}{1-x^2} \right) > 0$

Решение:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x+3-1) \left(\frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 \right) > 0; \\ x+3 > 0; \\ x+3 \neq 1; \\ \frac{1+x^2}{1-x^2} > 0; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (x+2) \frac{2x^2}{1-x^2} > 0; \\ x > -3; \\ x \neq -2; \\ 1-x^2 > 0; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2x^2(x+2)}{(x-1)(x+1)} < 0; \\ x > -3; \\ x \neq -2; \\ (x-1)(x+1) < 0; \end{array} \right.$$



OTBE $(-1; 0) \cup (0; 1)$

T:

**Решить
неравенства:**

$$\log_{2x}(2x^2 - 4x + 6) \leq \log_{2x}(x^2 + x)$$

Пример 3.

ОТВЕТ

$$\frac{\log_x(x-3) - \log_x(9-x)}{\log_{x-1}x} < 0$$

Пример 4.

ОТВЕТ

Пример 5.

$$\log_{\frac{1}{x}}\left(\frac{x}{x+1}\right) \cdot \log_{x-2}(x^2 + 1) \leq 0$$

ОТВЕТ

Пример 6.

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x^2} > \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x-2}$$

ОТВЕТ

Пример 7.

$$\log_{|x+2|}(4 + 7x - 2x^2) \leq 2$$

ОТВЕТ

Пример 8.

$$\log_{\frac{x}{3}}(\log_x \sqrt{3-x}) \geq 0$$

ОТВЕТ

Пример 9.

$$\log_{2x+1}(4x - 5) + \log_{4x-5}(2x + 1) \leq 2$$

ОТВЕТ

Решить систему

не

$$1. \begin{cases} \log_{\log_x 3x} (7x - 2) \geq 0; \\ 42^x - 36 \cdot 7^x - 6^x + 36 \leq 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \log_{\log_x 2x} (6x - 2) \geq 0; \\ 20^x - 64 \cdot 5^x - 4^x + 64 \leq 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \log_{x+3} (x^2 - x) < 1; \\ \log_{x^2 - \frac{3}{2}x} (3 - 2^x) > 0; \end{cases}$$

**Решить неравенство
(из сборника МИОО):**

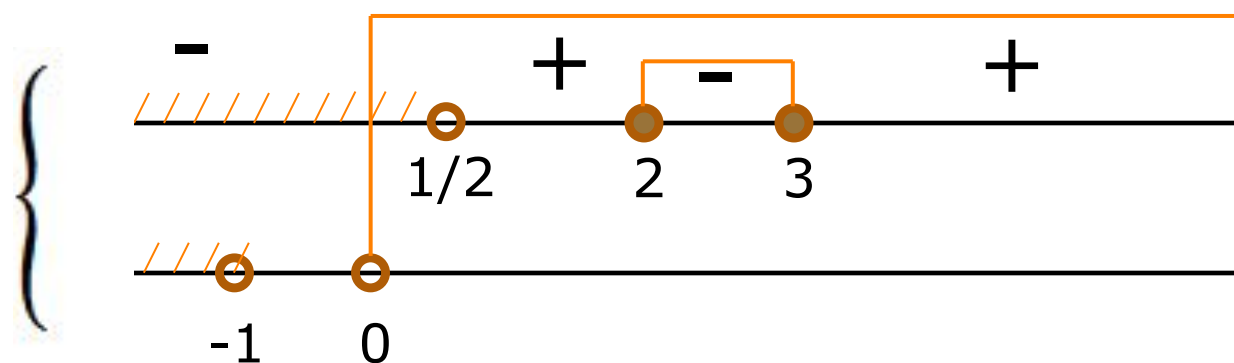
$$\log_{\left(\frac{16}{25-x^2}\right)} \left(\frac{14}{24-2x-x^2} \right) > 1$$

$$\begin{cases} (x-1)\lg 2 + \lg(2^{x+4} + 1) < \lg(7 \cdot 2^x + 12) \\ \log_x(x+2) > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25^x + 3 \cdot 10^x - 4 \cdot 4^x > 0 \\ \log_{1-\frac{x^2}{37}}(x^2 - 12|x| + 37) - \log_{1+\frac{x^2}{37}}(x^2 - 12|x| + 37) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{\log_x 3x}(4x-1) \geq 0 \\ 21^x - 9 \cdot 7^x - 3^x + 9 \leq 0 \end{cases}$$

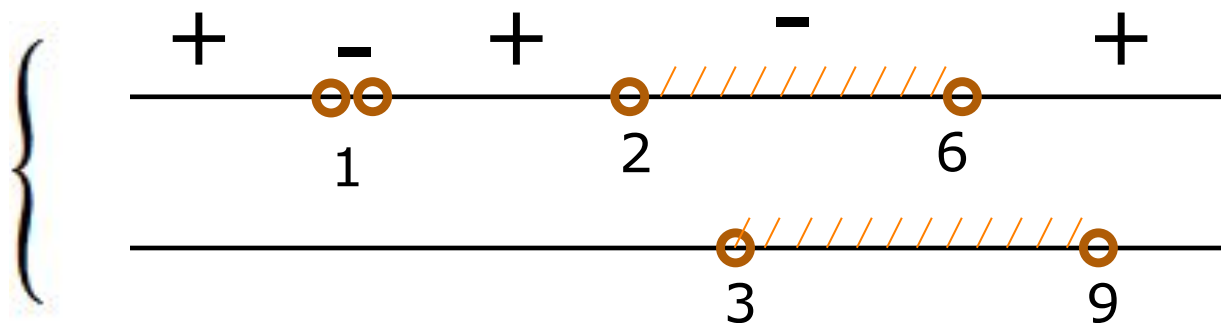
Пример 3



ОТВЕ
Т: $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup [2; 3]$

[НАЗАД](#)

Пример 4

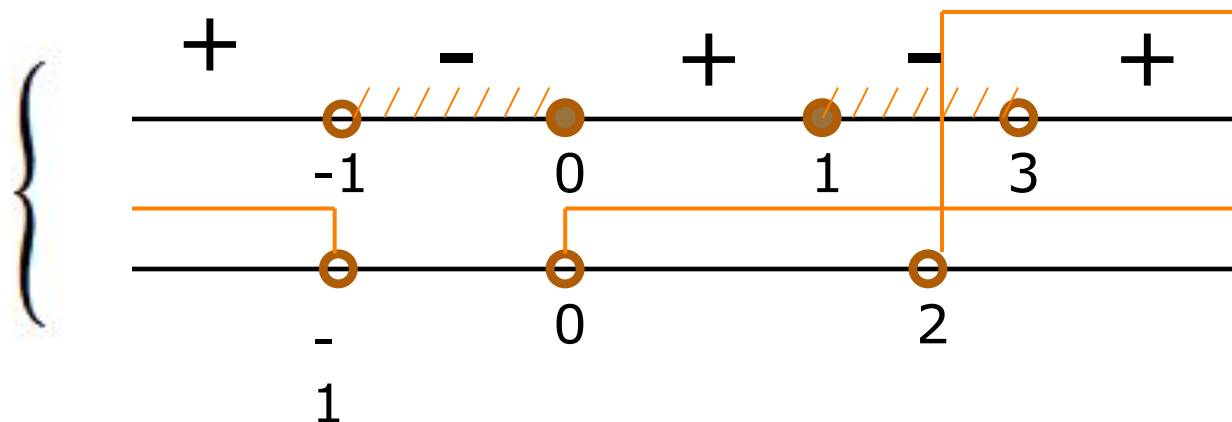


ОТВЕ (3; 6)

Т:

[НАЗАД](#)

Пример 5

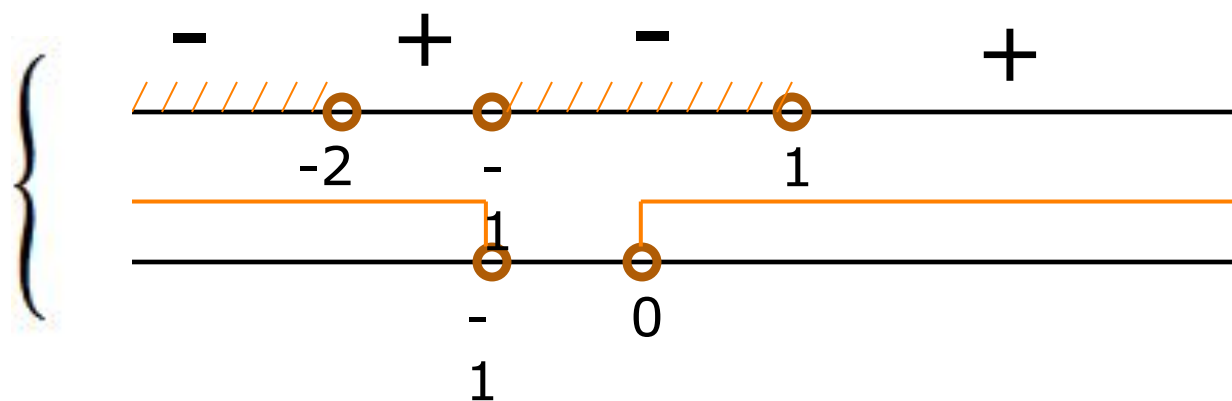


ОТВЕ (2;3)

Т:

[НАЗАД](#)

Пример 6

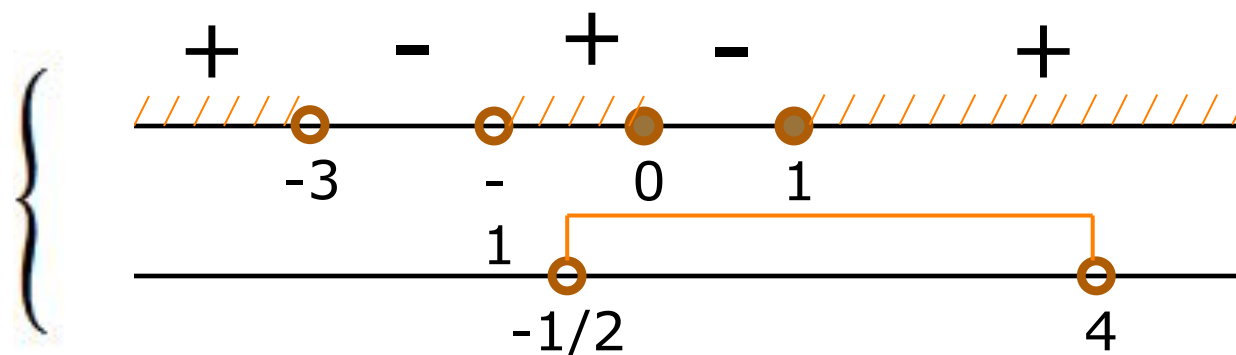


ОТВЕ $(-\infty; -2) \cup (0; 1)$

Т:

[НАЗАД](#)

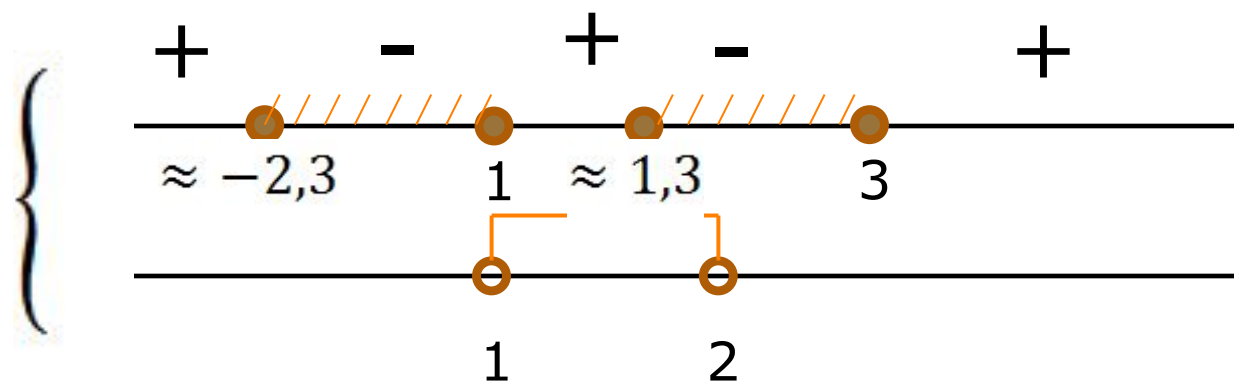
Пример 7



ОТВЕ
Т: $(-\frac{1}{2}; 0] \cup [1; 4)$

[НАЗАД](#)

Пример 8

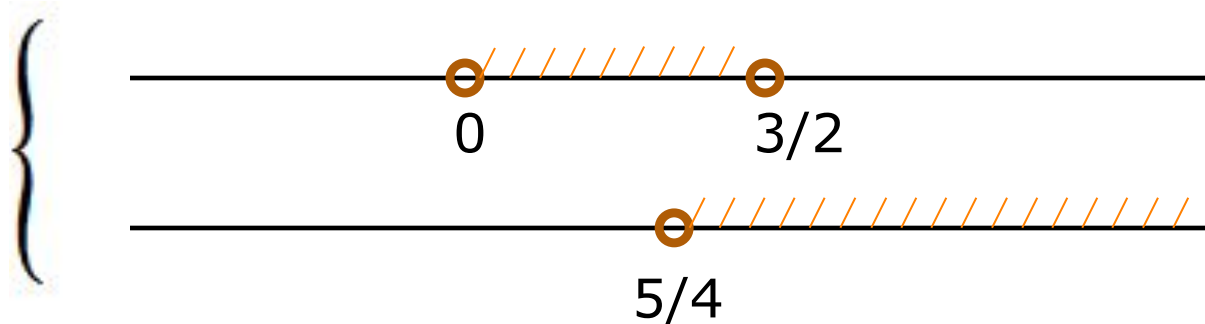


ОТВЕ
Т:

$$\left[\frac{\sqrt{13} - 1}{2}; 2 \right)$$

[НАЗАД](#)

Пример 9



ОТВЕ
Т:

$$x \in \left(\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right) \cup \{3\}$$

[НАЗАД](#)