

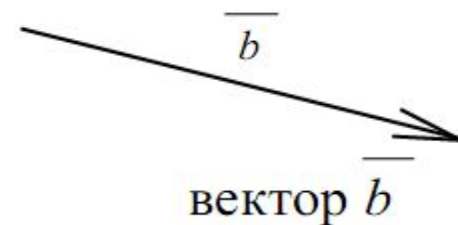
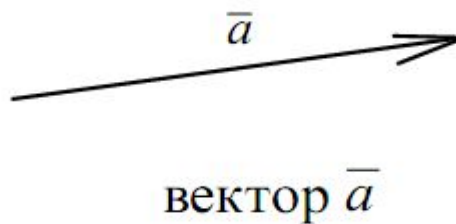


Векторная алгебра.

(1 часть)

1. Векторы на плоскости и в пространстве

Вектор (в пространстве, на плоскости, на прямой) – это направленный отрезок, т.е. отрезок AB , у которого одна из ограничивающих его точек A принимается за начало, а вторая B – за конец.



Модулем вектора (длиной вектора) называется длина отрезка :

$$|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$$

Нулевым вектором называется вектор, у которого начало и конец совпадают.

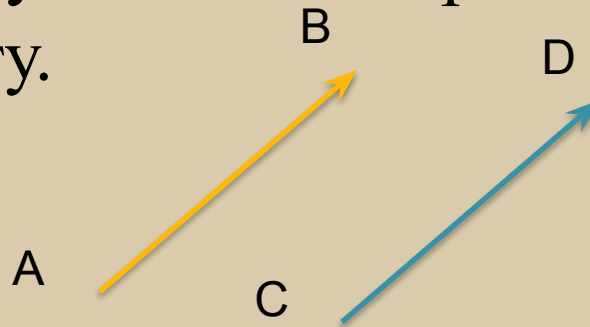
$$|\vec{0}| = 0$$

! Направление нулевого вектора не определено.

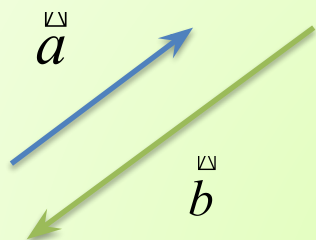
Ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются ***равными***: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, если:

- 1) они лежат на одной прямой или на параллельных прямых;
- 2) имеют одинаковые длины ($|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$) и одинаково направлены.

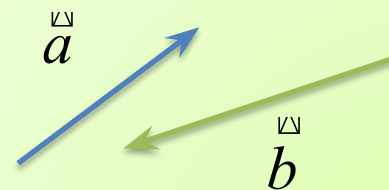
! Все нулевые векторы считаются *равными* друг другу.



Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. В противном случае, они называются **неколлинеарными**.



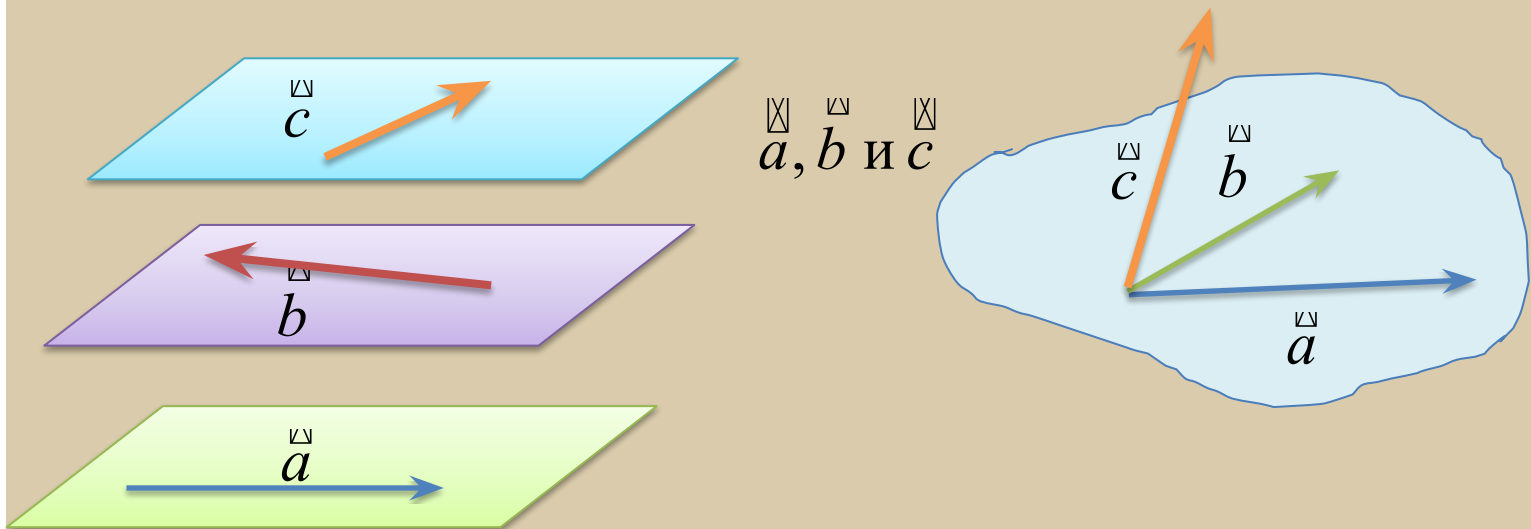
Коллинеарные векторы



Неколлинеарные векторы

- ! Нулевой вектор коллинеарен всякому вектору и каждый вектор коллинеарен самому себе.
- ! Вектор называется **коллинеарным** прямой l , если этот вектор лежит либо на прямой l , либо прямой, параллельной l .

Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называются **компланарными**, если они лежат на одной плоскости или на параллельных плоскостях. В противном случае, они называются **некомпланарными**.



Компланарные векторы

Некомпланарные векторы

! Если хоть один из векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ нулевой вектор, то эти векторы компланарны.

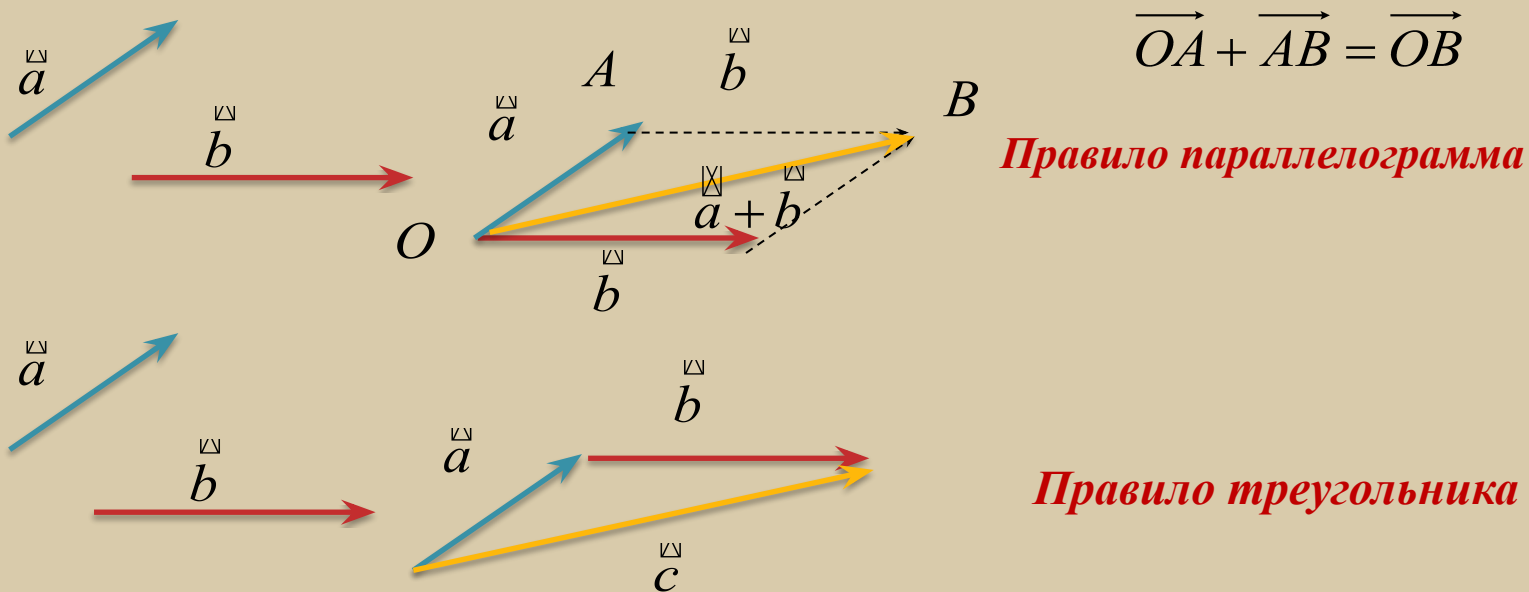
! Множество всех свободных векторов на прямой будем обозначать R^1 , на плоскости - R^2 , в пространстве - R^3 .

! Вектор равный исходному по длине и имеющий противоположное направление называется **противоположным вектором**.

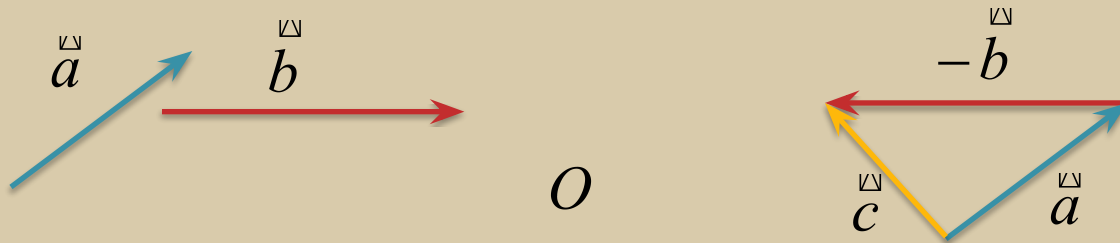
$$-\vec{a}$$

2. Линейные операции над векторами

- Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - два произвольных вектора. Возьмем произвольную точку O и приложим вектор к этой точке, получим $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$.
- Затем отложим от точки A вектор $\vec{b}$, получим $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$. Вектор $\overrightarrow{OB}$ называется **суммой** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a} - \vec{b}$ и определяется как сумма вектора $\vec{a}$ и противоположного вектора $-\vec{b}$.

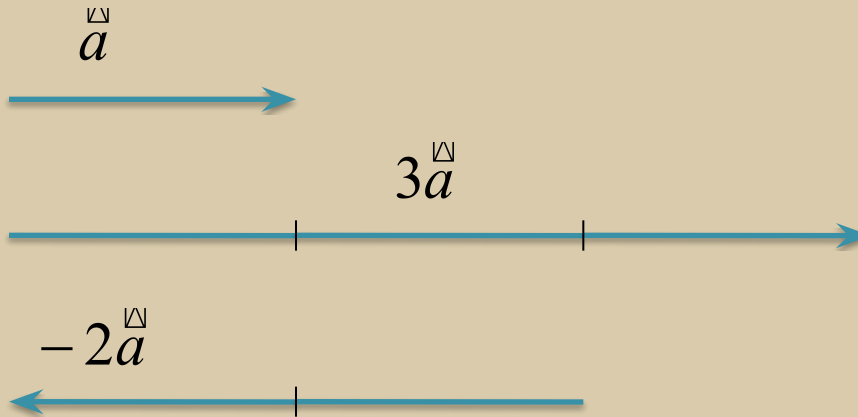


$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

Произведение вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор, длина которого равна числу $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ и который имеет направление вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположное направление $(-\vec{a})$, если $\lambda < 0$.

Обозначается: $\lambda \vec{a}$.

Если $\lambda = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$, то $\lambda \vec{a} = \vec{0}$.



3. Свойства линейных операций над векторами

$$1. \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$2. (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

$$3. \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

$$4. \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

$$5. (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a}$$

$$6. (\lambda_1\lambda_2)\vec{a} = \lambda_1(\lambda_2\vec{a})$$

$$7. \vec{a} + \vec{0} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

$$8. |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

$$9. |\vec{a} + \vec{b}| \geq |\vec{a}| - |\vec{b}|$$

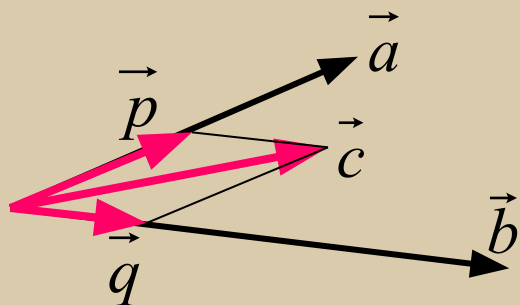
4. Разложение векторов на плоскости

Теорема: Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – неколлинеарные, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарные. Тогда найдутся такие постоянные λ и μ , что

$$\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$$

Такое разложение единственное.

Доказательство:



$$\begin{array}{l} \vec{c} = \vec{p} + \vec{q} \\ \vec{p} = \lambda \vec{a} \\ \vec{q} = \mu \vec{b} \end{array} \Bigg| \Rightarrow \vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$$

Докажем единственность.

Предположим, что разложение не единственно,
тогда:

$$\begin{array}{l} \vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \\ - \\ \vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \mu_1 \vec{b} \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(хотя бы одно из неравенств} \\ \lambda \neq \lambda_1 \text{ и } \mu \neq \mu_1 \text{ выполнено)} \end{array}$$

$$\vec{0} = (\lambda - \lambda_1) \vec{a} + (\mu - \mu_1) \vec{b}$$

$\mu \neq \mu_1$



$$\vec{b} = -\frac{(\lambda - \lambda_1)}{(\mu - \mu_1)} \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{b} \parallel \vec{a}$$

(противоречие)

5. Разложение векторов в пространстве

Теорема: Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – некомпланарные.

Тогда найдутся такие постоянные λ, μ, γ , что любой вектор $\vec{d}$ можно записать в виде

$$\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \gamma \vec{c}$$

(разложить по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$).

Такое разложение единственное.

6. Базис и линейная комбинация векторов

Базисом в пространстве называются любые 3 некопланарных вектора, взятые в определенном порядке.

Базисом на плоскости называются любые 2 неколлинеарных вектора, взятые в определенном порядке.

Базисом на прямой называется любой ненулевой вектор.

Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - базис в пространстве и $\vec{a} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3$, то числа α, β и γ - называются **компонентами** или **координатами** вектора в этом базисе.

Свойства:

1. Равные векторы имеют одинаковые координаты.
2. При умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число:

$$\vec{\lambda a} = \lambda(\alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3) = (\lambda\alpha) \vec{e}_1 + (\lambda\beta) \vec{e}_2 + (\lambda\gamma) \vec{e}_3$$

3. При сложении векторов складываются их соответствующие компоненты:

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 \qquad \vec{b} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3$$

$$(\alpha_1 + \beta_1) \vec{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \vec{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3) \vec{e}_3$$

Если $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ — некоторая система векторов пространства R (R^1, R^2 или R^3), тогда любой вектор вида $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$ называется **линейной комбинацией векторов**

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — некоторые действительные числа, называемые **коэффициентами линейной комбинации**.

! Если какой-либо вектор представляется в виде линейной комбинации некоторых векторов, то говорят, что он **разложен** по этим векторам.

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называются **линейно зависимыми**, если существует такая линейная комбинация $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$, при не равных нулю одновременно α_i , т.е. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$.

Если же только при $\alpha_i = 0$ выполняется равенство $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$, то векторы называются **линейно независимыми**.

Свойства:

1. Если среди векторов есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.
2. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.
3. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.
4. Любые 2 коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 2 линейно зависимые векторы коллинеарны.
5. Любые 3 компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые векторы компланарны.
6. Любые 4 вектора линейно зависимы.