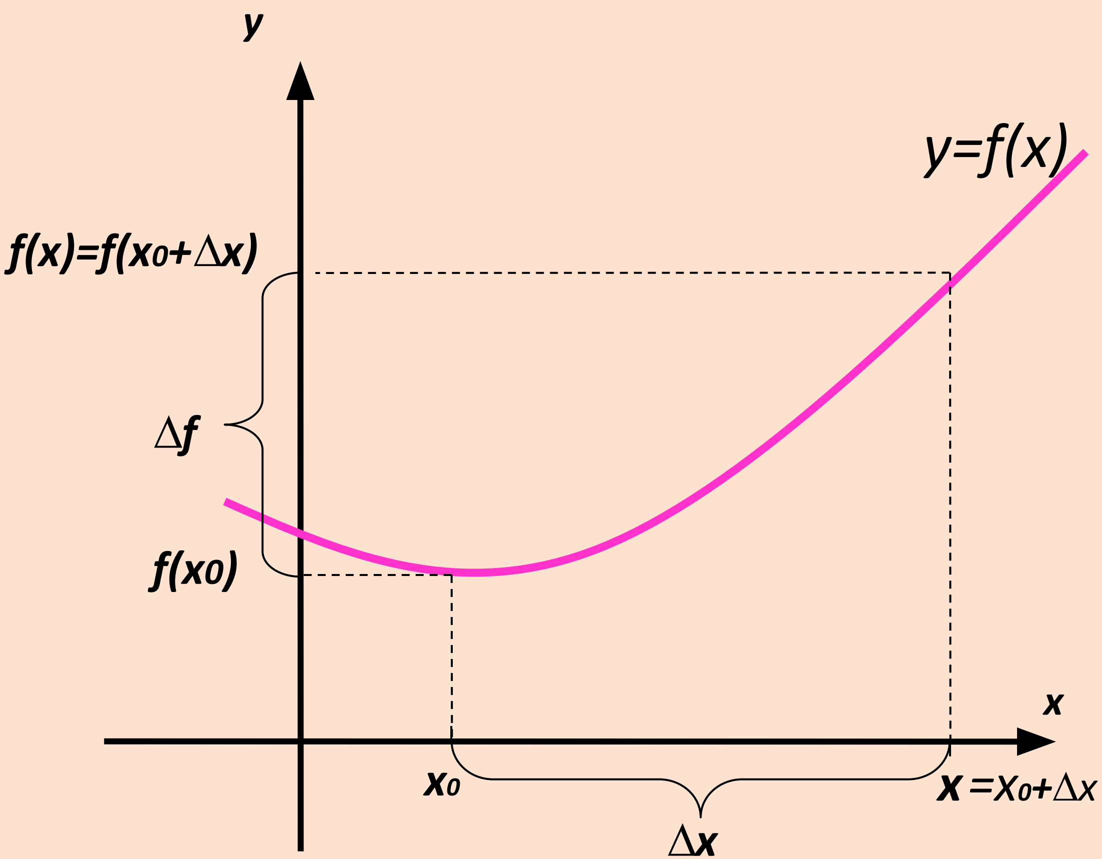
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

1. Задачи, приводящие к понятию производной

Приращение функции и приращение аргумента



приращение аргумента:

$\Delta x = x - x_0$ *(1)*

Приращение функции :

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ *(2)*

$\Delta f = f(x) - f(x_0)$ *(3)*

Расстояние между точками x и x_0 называется приращением аргумента и равно разности между x и x_0:

Задача 1 *(о скорости движения).*

- *По прямой, на которой заданы начало отсчета, единица измерения (метр) и направление, движется некоторое тело (материальная точка).*
- *Закон движения задан формулой $s=s\ (t)$, где t — время (в секундах), $s\ (t)$ — положение тела на прямой (координата движущейся материальной точки) в момент времени t по отношению к началу отсчета (в метрах).*
- *Найти скорость движения тела в момент времени t (в м/с).*

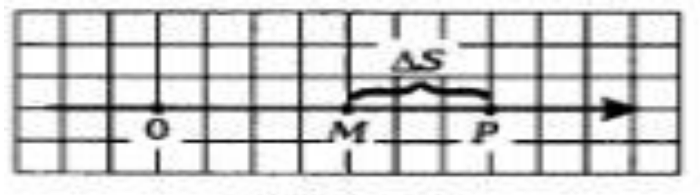


Рис. 114

Предположим, что в момент времени t тело находилось в точке M пройдя путь от начала движения OM = s{t). Дадим аргументу t приращение Δt и рассмотрим момент времени t+Δt Координата материальной точки стала другой, тело в этот момент будет находиться в точке P : OP=s(t+Δt) Значит, за Δt секунд тело переместилось из точки M в точку P, т.е. прошло путь MP. Имеем:

MP=OP-OM=s(t+Δt)-s(t)=Δs

Полученную разность мы назвали в § 26 приращением функции

Путь Δs тело прошло за Δt секунд.

Нетрудно найти среднюю скорость v_{cp} *движения тела за промежуток времени [t;t+Δt] :*

$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

А что такое скорость v (t) в момент времени t (ее называют иногда мгновенной скоростью)? Можно сказать так: это средняя скорость движения

за промежуток времени [t;t+Δt] при условии , что Δt выбирается все меньше и

меньше; точнее: иными словами, при условии, что Δt→0.Это значит , что

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{cp}$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Подводя итог решению задачи 1, получаем:

Задача 2

Поднимем камешек и затем из состояния покоя отпустим его. Движение свободно падающего тела явно неравномерное. Скорость *v* постепенно возрастает. Но как именно выглядит зависимость *v(t)* ?

Фиксируем момент *t*, в который мы хотим знать значение скорости *v(t)*. Пусть *h* – небольшой промежуток времени, прошедший от момента *t*. За это время падающее тело пройдёт путь, равный *s(t+h)-s(t)*.

Если промежуток времени *h* очень мал, то приближённо $s(t+h)-s(t) \approx v(t)\cdot h$, или $\dfrac{s(t+h)-s(t)}{h} \approx v(t)$, причём последнее приближённое равенство тем точнее, чем меньше *h*.

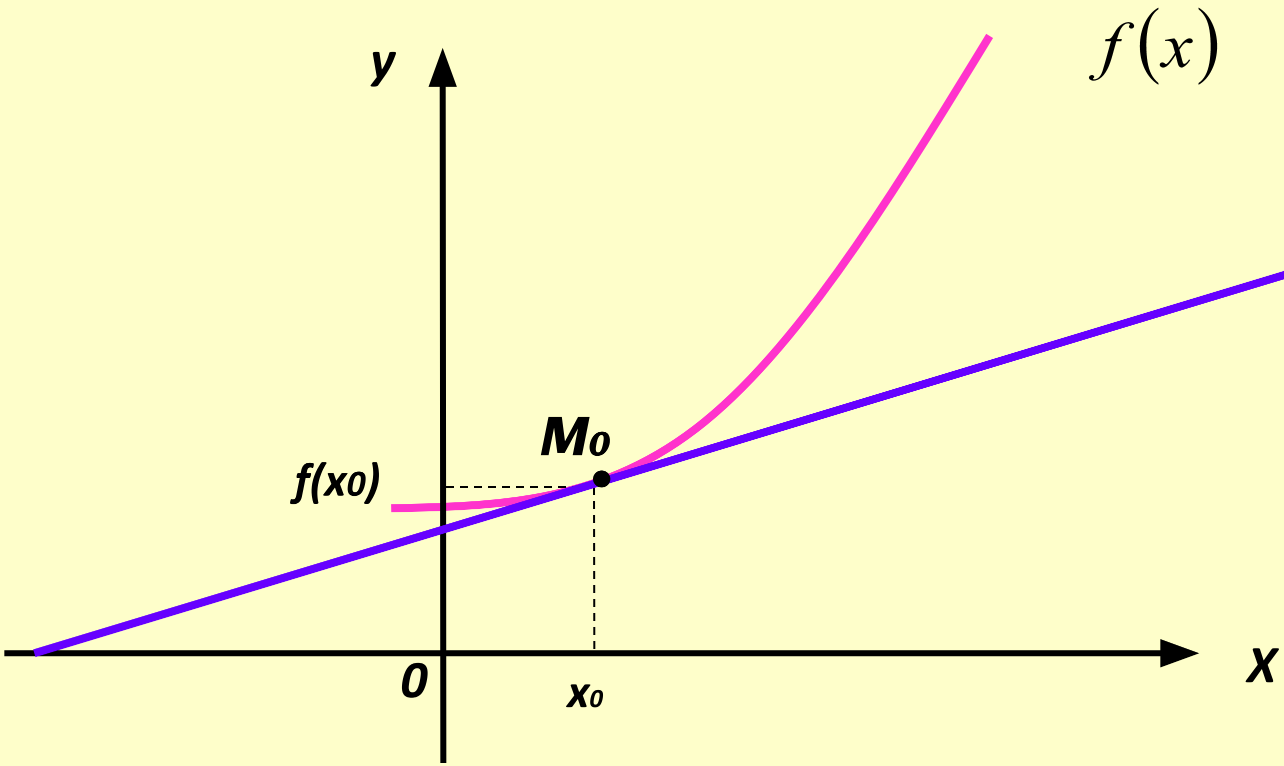
Значит величину $v(t)$ скорости в момент *t* можно рассматривать как ***предел***, к которому стремится отношение, выражающее среднюю скорость на интервале времени от момента *t* до момента *t+h*.

Сказанное записывают в виде

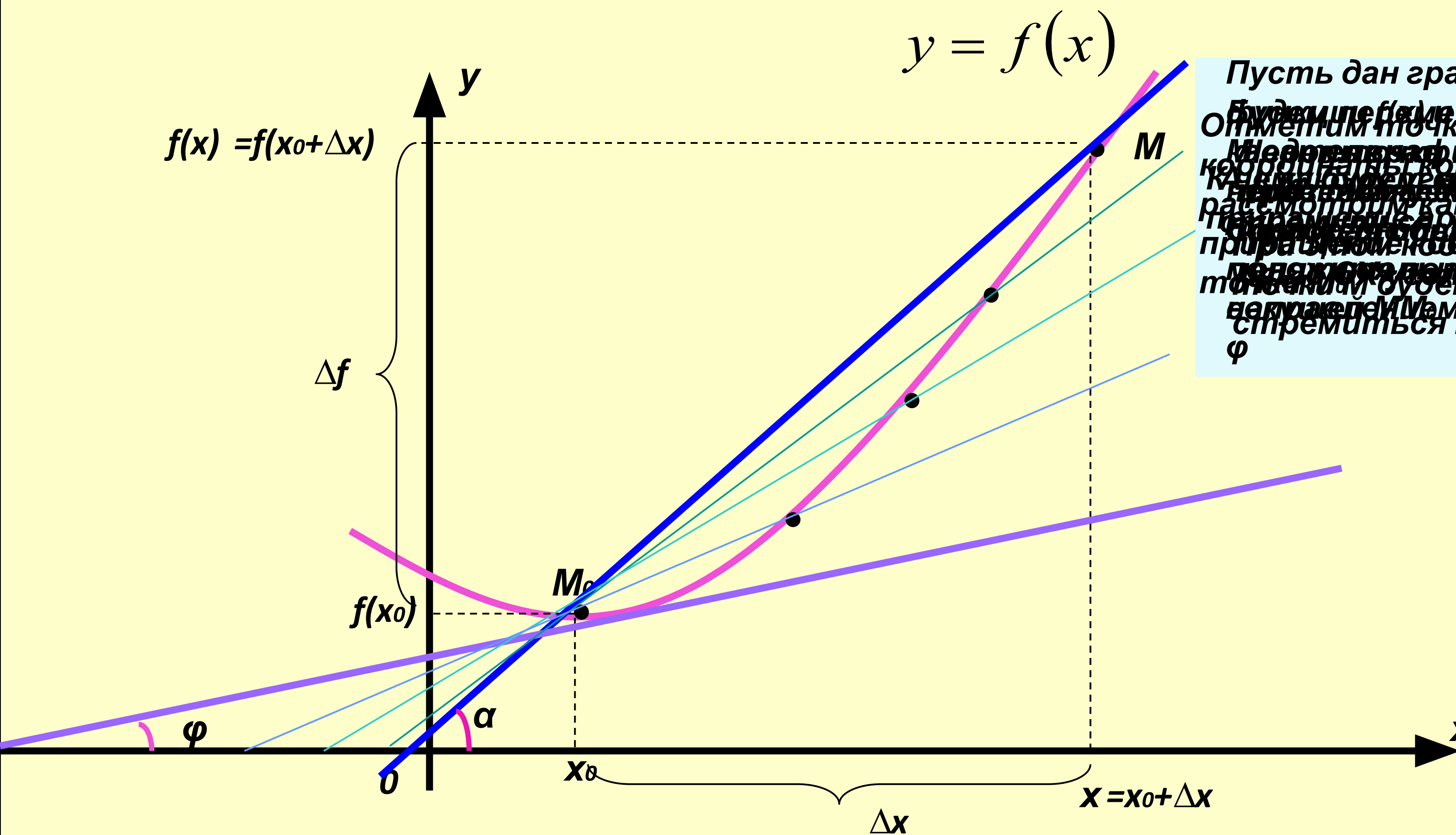
$$\boxed{v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h)-s(t)}{h}}$$

Тема: Задача, приводимая к понятию “производная”

Прямая, проходящая через точку M_0 (x_0; $f(x_0)$), с отрезком которой почти сливается график функции $f(x)$, называют касательной к графику в точке x_0



Задача: Определить положение касательной (tgφ)



Пусть дан график

Секущая, поворачиваясь вокруг точки *M0*, приближается к положению касательной

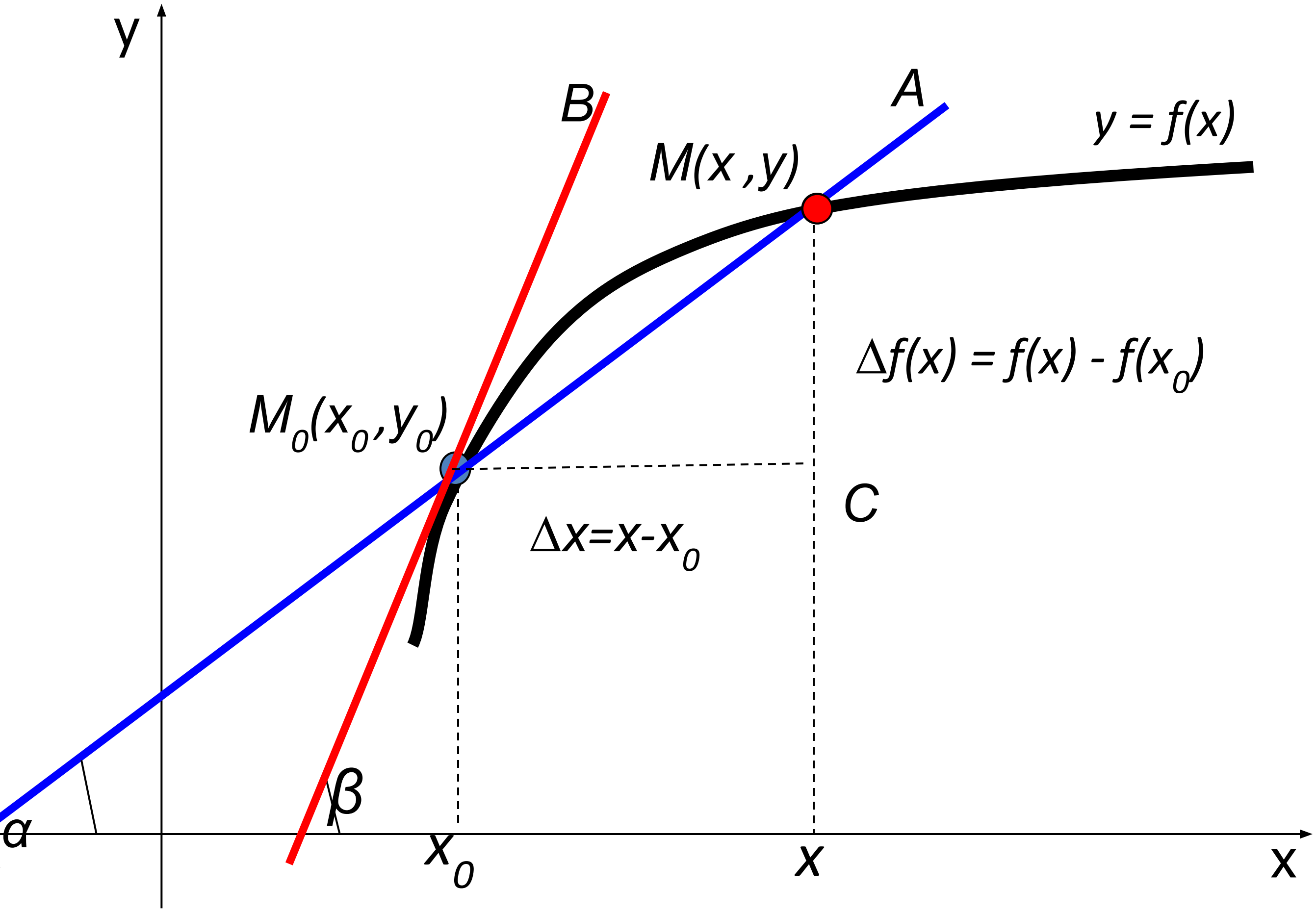
Предельным положением секущей MoM, когда M неограниченно приближается к Mo, является касательная

$$x \to x_o \Rightarrow \quad \Delta x \to 0$$

$$\alpha \to \varphi$$

$$k = tg\varphi = \lim_{\alpha \to \varphi} tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Задача о касательной к графику функции



Задача о мгновенной величине тока

Обозначим через $q = q(t)$ количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника за время t.

Пусть Δt – некоторый промежуток времени, $\Delta q = q(t+\Delta t) - q(t)$ – количество электричества, протекающее через указанное сечение за промежуток времени от момента t до момента $t + \Delta t$. Тогда отношение $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ называют средней силой тока.

Мгновенной силой тока в момент времени t называется предел отношения приращения количества электричества Δq ко времени Δt, при условии, что $\Delta t \to 0$.

$$\boxed{I(t) = \lim_{\Delta t \to 0} I_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}}$$

Выводы

Различные задачи привели в процессе решения к одной и той же математической модели – пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. Значит, эту математическую модель надо специально изучить, т.е.:

1) Присвоить ей новый термин.
2) Ввести для неё обозначение.
3) Исследовать свойства новой модели.
4) Определить возможности применения нового понятия - производная

Задача о скорости химической реакции

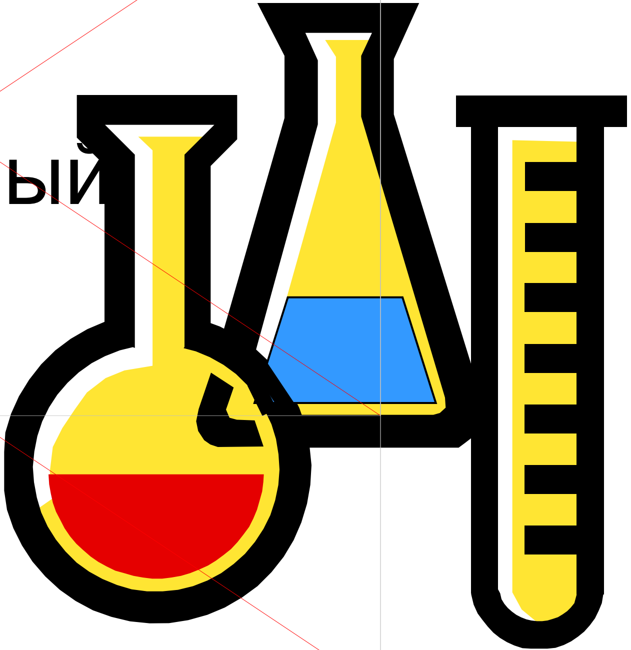
Средняя скорость растворения соли в воде за промежуток времени $[t_0;t_1]$ (масса соли, растворившейся в воде изменяется по закону $x = f(t)$) определяется по формуле

.

$$v_{cp} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Скорость растворения в данный момент времени

$$v(t_0) = f'(t_0)$$



Определение производной

Производной функции f в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при последнем стремящимся к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to O} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Возвращаясь к рассмотренным задачам, важно подчеркнуть следующее:

а) **мгновенная скорость** неравномерного движения есть производная от пути по времени;

б) **угловой коэффициент касательной** к графику функции в точке $(x_0; f(x))$ есть производная функции $f(x)$ в точке $x = x_0$;

в) **мгновенная сила тока** $I(t)$ в момент t есть производная от количества электричества $q(t)$ по времени;

Г) **скорость химической реакции** в данный момент времени t есть производная от количества вещества $y(t)$, участвующего в реакции, по времени t.

А л г о р и т м

1) $$\Delta x = x - x_0$$

2) $$\Delta f = f(x+x_0) - f(x_0)$$

3) $$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

4) $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

А это значит:

«…нет ни одной области в математике, которая когда-либо не окажется применимой к явлениям действительного мира…»   Н.И. Лобачевский

- Аппарат производной можно использовать при решении геометрических задач, задач из естественных и гуманитарных наук, экономических задач оптимизационного характера.
- И, конечно, не обойтись без производной при исследовании функции и построении графиков, решении уравнений и неравенств

Основные формулы

- Средняя скорость

$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

- Мгновенная скорость
- $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{cp}$ или $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$
- Скорость изменения функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- Значение производной в точке
- $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to O} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ = $k = tg\varphi = \lim\limits_{\alpha \to \varphi} tg\alpha =$