

**IX ЕЖЕГОДНЫЙ ВСЕРОССИЙСКИЙ КОНКУРС ДОСТИЖЕНИЙ ТАЛАНТЛИВОЙ МОЛОДЁЖИ
«НАЦИОНАЛЬНОЕ ДОСТОЯНИЕ РОССИИ»**

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ПРОЕКТ

Тема: «О наиболее эффективном способе отбора корней тригонометрического уравнения».

**Подготовила ученица 10 класса МБОУ
« СШ №25» п. Энем Республики Адыгея
Карпенко Виктория.**

Руководитель проекта Ведерникова И.А.

АКТУАЛЬНОСТЬ



№13

Уметь выбирать необходимое;

Расширить кругозор
учащихся;

Тема:

Наиболее
эффектив
ный
способ
отбора
корней
тригоном
етрическ
ого
уравнени

ВВЕДЕНИЕ

Делать вывод и использовать
полученные сведения

Создать базу данных;

Цель:
научиться
выбирать
корни
тригономет
рических
уравнений
из
заданного
промежутка
разными
способами;
определить
наиболее
оптимальн
ый метод
отбора
корней с
наименьше
й затратой
времени;

Содержание:

1. Теория

2. Исследование

Гипотеза:
Существует ли
такой способ
отбора корней
тригонометрическ
их уравнений,
который с
наименьшей
затратой времени
даст решение.

Результат:
Найден
наиболее
эффективн
ый способ
отбора
корней
тригоме
трического
уравнения

3. Вывод

4. База заданий

5. Список
литературы

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основные методы решения тригонометрических уравнений

Однородное ур-ние
первой степени

Деление обеих частей на
 $\cos x$

Однородное ур-ние
второй степени

1. Если есть $a \sin^2 x$, то деление
на $\cos^2 x$ с последующим
введением новой переменной

2. Если нет $a \sin^2 x$, то метод
разложения на множители

Разложение на
множители

Формулы сокращенного
умножения

Группировка

Вынесение за скобки

$$f(x) \cdot p(x) = 0$$

Введение новой
переменной

$\sin$

$$x = a$$

$\cos$

$$x = a$$

tg

$$x = a$$
$$ctg$$

$$x = a$$

Решение квадратного уравнения

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Простейшие тригонометрические уравнения

$$\operatorname{tg} x = a,$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$$

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x = a.$$

$$x = \operatorname{arccotg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{arccotg}(-a) = \pi - \operatorname{arccotg} a$$

$$\sin x = a, \quad |a| \leq 1$$

$$\begin{cases} x_1 = \arcsin a + 2\pi k \\ x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = \pi/2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\pi/2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = a, \quad |a| \leq 1$$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \pi/2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Способы отбора корней в тригонометрических уравнениях.

Арифметический способ

Решение относительно
неизвестного
целочисленного
параметра и вычисление
корней;

Подстановка полученных
корней в уравнение и
имеющиеся ограничения;

Перебор значений
целочисленного параметра и
вычисление корней.

Алгебраический способ

Геометрический способ

Изобразить единичную
окружность

Изобразить промежуток

Поставить точки на
окружности

Определить координаты
точек

Выбрать точки, попавшие
в промежуток

Функционально- графический способ

Схематически
изобразить график f -и

Найти корни, придавая
значения n

Изобразить промежуток
на оси OX

Выбрать точки, попавшие
в промежуток

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ ЧАСТЬ

Эксперимент №1

Рассмотрим отбор корней уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ принадлежащие промежутку $[-\pi; \pi]$ разными способами.

Алгебраический способ

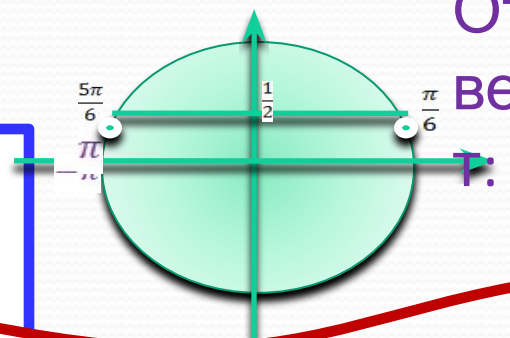
$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq \pi & \quad -\pi \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leq \pi \\ -\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{5}{12} & \quad -\frac{11}{12} \leq k \leq \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Целочисленные значения:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}$$

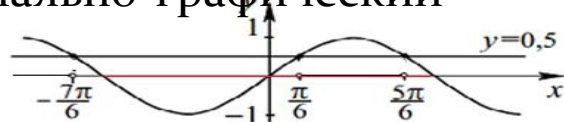
$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} \\ x_2 = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

Геометрический способ



$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{6} \\ x_2 &= \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

Функционально-графический способ



Найдем три корня этого уравнения, последовательно придавая переменной n значения $-1, 0, 1$: $-\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$. Полученные значения являются абсциссами трех последовательных точек пересечения построенных графиков. Промежутку принадлежат точки $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ в промежуток не входит $-\frac{7\pi}{6}$.

Арифметический способ

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}$$

Последовательно подставляем $n=0, 1, -1, 2, -2$. Полученные значения, которые входят в промежуток $[-\pi; \pi]$; $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$; остальные значения не входят в промежуток.

Результат первого эксперимента

Решение уравнения с табличным значением

Арифметический	Алгебраический	Геометрический	Функционально-графический
Затруднение с перебором	решено	решено	решено
6 минут	5 минут	3 минут	6 минут

ЧАСТЬ

Эксперимент №2

2. Рассмотрим уравнение $\sin x = \frac{1}{3}$ не табличным значением и найдем корни на промежутке $[-\pi; \pi]$ аналогичными способами.

Алгебраический

$$\begin{aligned} -\pi &\leq \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k \leq \pi \\ -\pi - \arcsin \frac{1}{3} &\leq 2\pi k \leq \pi - \arcsin \frac{1}{3} \\ -2\pi + \arcsin \frac{1}{3} &\leq 2\pi k \leq \arcsin \frac{1}{3} \end{aligned}$$

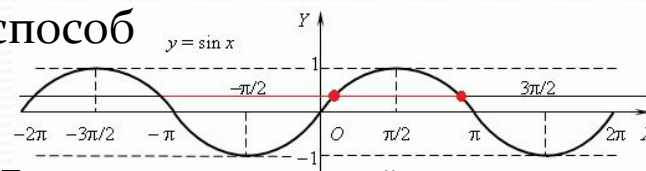
$$\begin{cases} x_1 = \arcsin \frac{1}{3} \\ x_2 = \pi - \arcsin \frac{1}{3} \end{cases}$$

Арифметический

$$\begin{cases} x_1 = \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k \\ x_2 = \pi - \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k \end{cases}$$

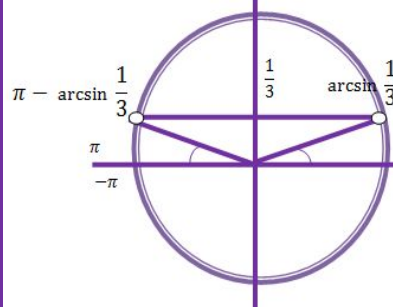
последовательно подставляем $n=0,1,-1,-2$. Полученные значения, которые входят в промежуток $\arcsin \frac{1}{3}$ и $\pi - \arcsin \frac{1}{3}$; остальные значения не входят в промежуток.

Функционально-графический способ



Точки пересечения прямой и синусоиды и есть, искомые корни уравнения. Промежутку $[-\pi; \pi]$ принадлежат две точки $\arcsin \frac{1}{3}$ и $\pi - \arcsin \frac{1}{3}$.

Геометрический способ



Ответ:

$$\begin{cases} x_1 = \arcsin \frac{1}{3} \\ x_2 = \pi - \arcsin \frac{1}{3} \end{cases}$$

РЕЗУЛЬТАТ ВТОРОГО

ЭКСПЕРИМЕНТА

Решение уравнения с не табличным значением

Арифметический	Алгебраический	Геометрический	Функционально-графический
Затруднение в вычислениях	Затруднение в вычислениях	решено	решено
7 минут	-	4 минуты	6 минут

$$-6a^2 + a + 1 = 0$$

Найдите все корни этого уравнения

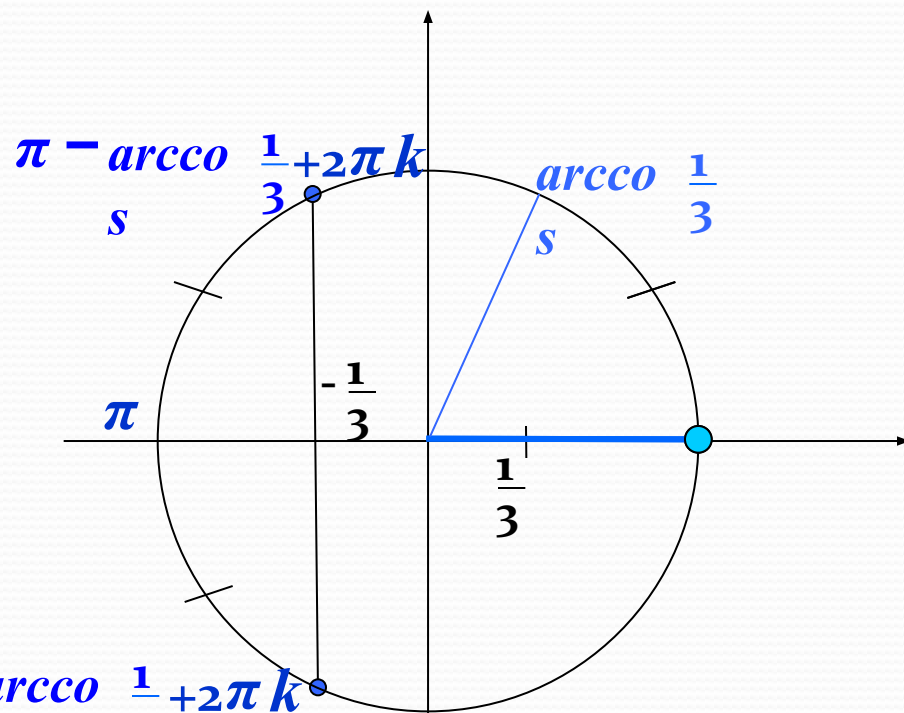
$$D = 1^2 - 4 \cdot (-6) \cdot 1 = 25$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \left[\begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{2}; \\ a_2 = -\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$a = \frac{-1 \pm 5}{2 \cdot (-6)} = \left[\begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{2}; \\ a_2 = -\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \cos x = -\frac{1}{3}$$

принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$



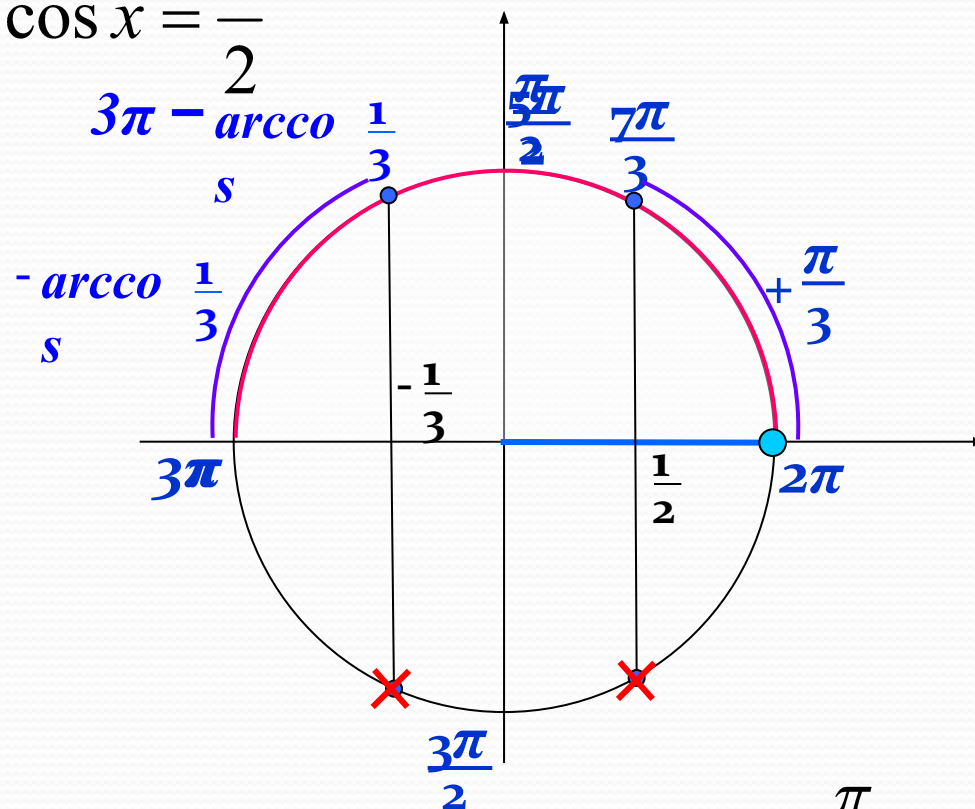
$$\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \pi - \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k; \pi + \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, x = \pm \left(\pi - \arccos \frac{1}{3} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$

$$\cos x = -\frac{1}{3} \quad \cos x = \frac{1}{2}$$



$$2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}.$$

Ответ : $3\pi - \arccos \frac{1}{3}; \frac{7\pi}{3}$.

ЭКСПЕРИМЕНТ

№3

исследовательская
часть





РЕЗУЛЬТАТ ТРЕТЬЕГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Решение уравнения с не табличным значением

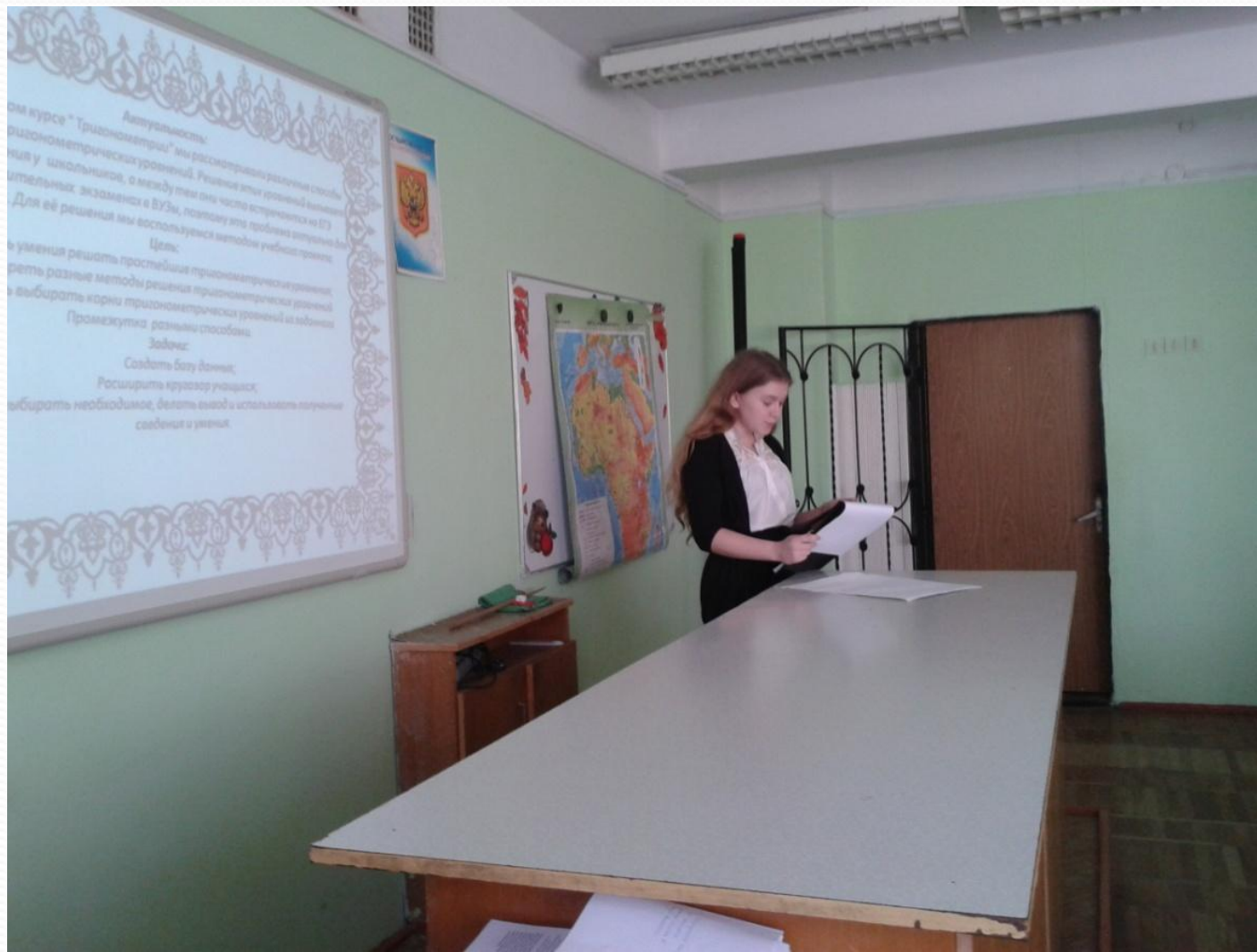
1 команда Алгебраический	2 команда Алгебраический	3 команда Геометрический	4 команда Геометрический
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
-	-	+	+
-	-	+	+
-	-	+	+
+	+	+	+
25 минут	29 минут	15 минут	17 минут

РЕФЛЕКСИЯ

Цель проекта достигнута



С помощью нескольких исследований я доказала, что наиболее эффективным и менее затратным по времени является геометрический способ.





Используемая литература

1) diffur.kemsu.ru

2) Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Тригонометрические уравнения: методы решения и отбор корней

3) ЕГЭ 2012. Математика. Типовые тестовые задания под ред. А.Л. Семенова, И.В. Яценко. – М.: Издательство «Экзамен», 2012.

4) www.egemathem.ru – единый государственный экзамен (от А до Я).





● Спасибо за внимание!