Лекция 35.

Преобразование Лапласа

и его свойства.

Введение

Преобразование Лапласа широко используется в радиотехнике для решения самых разнообразных задач, связанных с изучением сигналов.

На практике широко применяются таблицы преобразования Лапласа, наличие таблиц сделало метод преобразования Лапласа популярным как в теоретических исследованиях, так и в инженерных расчетах радиотехнических устройств и систем.

Преобразование Лапласа является исключительно гибким и мощным методом, позволяющим путем стандартных процедур находить решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Преобразование Лапласа, его свойства.

Рассмотрим функции $f(t)$ удовлетворяющие **свойствам**:

1. $f(t)$ непрерывна на всей числовой оси за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода.

2. $f(t)$ такова что: $\begin{cases} f(t), t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$

3. Существуют такие постоянные $M > 0$, $a > 0$, что $|f(t)| \leq M e^{at}$, $\forall\ t \to \infty$

Число a называется показателем роста функции.

Функции, удовлетворяющие 3-м свойствам называются оригиналами.

Пример оригинала функция Хевисайда (единичная)

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

$\theta(t) \cdot sin\omega t$ - оригинал

1-ое свойство удовлетворяется

2-ое свойство $\theta(t) \cdot sin\omega t = \begin{cases} sin\omega t, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$

Чтобы получить оригинал надо умножить эту функцию на функцию Хевисайда.

Условимся, что все функции, которые рассматриваются уже умножены на функцию Хевисайда и запись

$$1(t)=\begin{cases}1, t\geq 0\\ 0, t<0\end{cases}$$ или

$$sin\omega t=\begin{cases}sin\omega t, t\geq 0\\ 0, t<0\end{cases}$$

Поставим в соответствие каждой функции из множества оригиналов с помощью преобразования:

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt=F(P)$$

некоторую функцию $F(P)$,

где $p = x + iy$ – некоторые числа (лежащие справа от оси y).

Функцию $F(P)$ называют изображением для функции $f(t)$

$\boxed{f(t) \div F(P)}$

Интегральные преобразования называются преобразованием Лапласа

Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{\infty} \theta(t) e^{-pt} dt =$

θ - единичная функция Хевисайда

$$= \int\limits_0^{\infty} 1 e^{-pt} dt = \lim_{\eta \to \infty} - \frac{e^{-pt}}{p} \Bigg|_0^{\eta} = \lim_{\eta \to \infty} - \frac{e^{-xt} e^{-iyt}}{p} \Bigg|_0^{\eta} = \lim_{\eta \to \infty} \left[- \frac{e^{-x\eta} e^{-iy\eta}}{p} + \frac{1}{p} \right] =$$

$$= \lim_{\eta \to \infty} \left[- \frac{e^{-x\eta} (\cos(y\eta) - i \sin(y\eta))}{p} + \frac{1}{p} \right] = \frac{1}{p}$$

$x > 0$

Преобразование Лапласа переводит функции действительных переменных в функции комплексного переменного.

Линейность преобразований Лапласа. Свойства.

Если $f(t)$ и $\varphi(t)$ таковы что: $f(t) \div F(P)$, $\varphi(t) \div \phi(p)$, то:

$\lambda \cdot f(t) + \mu\varphi(t) \div \lambda F(P) + \mu\phi(P)$

λ, μ - некоторые комплексные числа

Доказательство:

Найдем преобразования Лапласа от функции

$$\int_0^\infty [\lambda \cdot f(t) + \mu\varphi(t)] e^{-pt} dt =$$

Пользуясь свойством линейности интеграла имеем:

$$= \lambda \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt + \mu \int_0^\infty \varphi(t) e^{-pt} dt \overset{def}{=} \lambda F(P) + \mu\phi(P)$$

$\int_0^\infty [\lambda \cdot f(t) + \mu\varphi(t)] e^{-pt} dt \overset{def}{=}$ (преобразования Лапласа от линейной комбинации) $= \lambda \cdot f(t) + \mu\varphi(t) \div \lambda \cdot F(P) + \mu\phi(P)$

Область сходимости преобразования Лапласа. Аналитичность преобразования Лапласа.

Теорема (об области сходимости):

Пусть $f(t)$ - оригинал. Тогда $\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$ сходится для всех p, $Re\, p > a$.

Если же $Re\, p \geq x_0 > a$, то сходимость равномерная.

Доказательство:

Так как $f(t)$ – оригинал, следовательно $|\, f(t) \,| \leq M\ e^{at}$, a – показатель роста функции. Тогда $\left|\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt\right| \leq \int_0^{\infty} |f(t)||e^{-pt}|dt \leq M\int_0^{\infty} e^{at}|e^{-pt}|dt =$

p – произвольные комплексные числа.

$p = x + iy$

Значит $e^{-pt} = e^{-xt}e^{-iyt} \Rightarrow |e^{-pt}| = |e^{-xt}e^{-iyt}| = e^{-xt}\underbrace{|e^{-iyt}|}_{1}$

$$= M\int_0^{\infty} e^{at}e^{-xt}dt$$

По определению несобственного интеграла:

$$\int_0^{\infty} e^{-(x-a)t}dt = \lim_{\eta\to\infty} \left.\frac{e^{-(x-a)t}}{-(x-a)}\right|_0^{\eta} = \lim_{\eta\to\infty}\left[\frac{e^{-(x-a)\eta}}{-(x-a)} + \frac{1}{x-a}\right]$$

Так как действительная часть p : $Re\ p = x > a$ (по условию), то $x - a > 0 \Rightarrow -(x - a) < 0$.

Значит $\dfrac{e^{\overset{\to\infty}{-(x-a)\eta}}}{-(x-a)} \to 0$, когда $\eta \to +\infty$

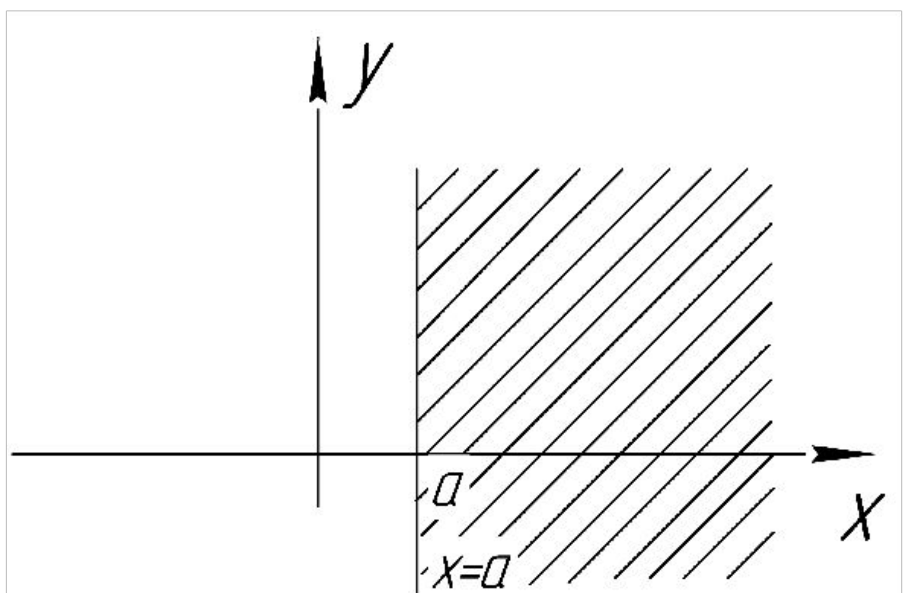
$$\left|\int_0^\infty f(t)e^{pt}dt\right| < \frac{M}{x-a},\ x > a$$

Это означает, что интеграл сходится, причем абсолютно.

Если $x \geq x_0 > a$ – то сходимость будет равномерная.

Начертим область сходимости преобразования Лапласа. Область сходится, когда $Re\ p > a$, a – действительное число.

Областью сходимости преобразования Лапласа является заштрихованная область.



Теорема (об аналитичности преобразования Лапласа) Преобразования Лапласа, сопоставляющие оригиналу $f(t) \div F(p)$ изображение $F\ (p)$ с помощью формулы $F(p)=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ является аналитической функцией в области $Re\ p > a$, т.е. $F\ (p)$ – аналитическая функция.

Изображения некоторых элементарных функций.

$$1 \div \frac{1}{p},\ Re\ p > 0$$

$e^{\alpha t}$. Найдем интеграл функции $\int\limits_0^\infty e^{at}e^{-pt}dt=\int\limits_0^\infty e^{(a-p)t}dt=\lim\limits_{\eta\to\infty}\left.\frac{e^{(\alpha-p)t}}{\alpha-p}\right|_0^\eta=$

$$=\left\{ пусть\ \ Re\,p > Re\,\alpha \right\}=\lim_{\eta\to\infty}\left[\underbrace{\frac{e^{(\alpha-p)\eta}}{\alpha-p}}_{0}-\frac{1}{\alpha-p}\right]=\frac{1}{p-\alpha}$$

$$e^{\alpha t} \div \frac{1}{p-\alpha}, Re\ p > Re\ \alpha$$

Т а б л и ц а 1.

Таблица теорем

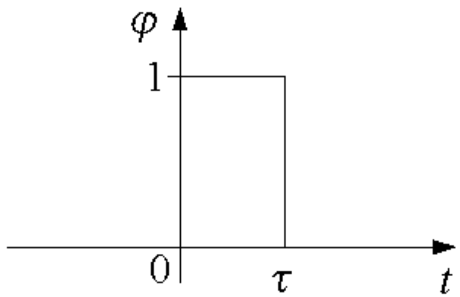
Линейность	$af(t)+bg(t)\div aF(p)+bG(p)$
Подобие	$f(\lambda t)\div \frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$
Затухание	$e^{at}f(t)\div F\left(p-a\right)$
Запаздывание	$f\left(t-\tau\right)\div e^{-p\tau}F(p)$
Дифференцирование	$f'(t)\div pF(p)-f(0)$

Примеры:

1) $f(t) = e^{at} \sin wt$.

Так как $\sin wt = \dfrac{w}{p^2 + w^2}$, по теореме затухания $e^{at} \sin wt \div \dfrac{a}{(p-a)^2 + w^2}$.

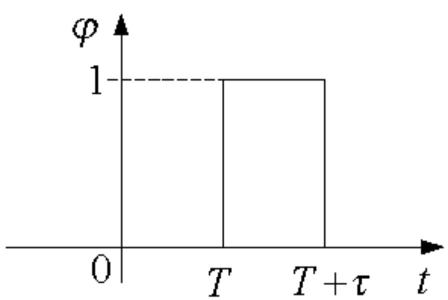
2)



$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, \textit{ если } t < 0, \\ 1, \textit{ если } 0 < t < \tau, \\ 0, \textit{ если } t > \tau \end{cases}$$

$$\varphi(t) = h(t) - h(t-\tau) \div \frac{1}{p} - e^{-p\tau} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p}\left(1 - e^{-p\tau}\right).$$

3)



$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, \ t < T, \\ 1, T < t < T + \tau, \\ 0, \ t > T + \tau \end{cases}$$

$$\varphi(t) = h(t-T) - h(t-T-\tau) \Rightarrow \varphi(t) \div e^{-Tp} \cdot \frac{1}{p} - e^{-p(T+\tau)} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \cdot e^{-pT}\left(1 - e^{-p\tau}\right)$$