

”Принцип Дирихле”

Введение

- В математике большое значение имеет так называемые доказательства существования. Самый простой способ доказать существование объекта с заданными свойствами – указать на него и разумеется убедиться, что он действительно обладает нужными свойствами. Например что бы доказать, что уравнение имеет решение, достаточно привести какое его решение. Одним из способов доказать существование является логический прием названный принципом Дирихле - по имени Петра Густава Дирихле, немецкого математика.

- "Нельзя посадить 7 кроликов в 3 клетки так, чтобы в каждой клетке находились не более двух кроликов".

Действительно, если в каждой клетке находились бы не более двух кроликов, то их всего было $2 \cdot 3 = 6$, что не удовлетворяет нашему условию.

Задача 1

- Можно вывезти из каменоломни 50 камней, весом $370, 372, 374, \dots, 468$ кг, на семи трехтонках?

Решение задачи 1

- Если бы это удалось осуществить, то на какую-нибудь трехтонку нагрузили бы 8 камней, поскольку
- $7 \cdot 7 + 1 = 50$, потому принципу Дирихле даже при равномерном распределении по 7 камней на каждую трехтонку получим в избытке 1 камень. Но даже 8 легких камней составляют в сумме $S = 370 + 372 + 374 + \dots + 384 \text{ кг} = 3 \text{ т}$. Нельзя!

Решение задачи 1

- Отметим, что общая масса всех камней, как не трудно подсчитать 20950 кг , а семь трехтонных можно нагрузить одновременно 21 т. Поэтому складывается впечатление , что ответ на вопрос задачи должна быть положительной. Однако это было бы возможно , если бы мы раздробили камни.

Задача 2

- Докажите, что равносторонний треугольник нельзя покрыть двумя меньшими по плоскости его равносторонними треугольниками.

Решение задачи 2

- Разумеется, чем меньше равносторонний треугольник может покрывать максимум одну вершину данного равностороннего треугольника. Поэтому данный равносторонний треугольник можно покрыть, по крайней мере, тремя меньшими.

Задача 3

- Плоскость разрисованная тремя цветами. Докажите, что найдутся 2 точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1.

Решение задачи 3

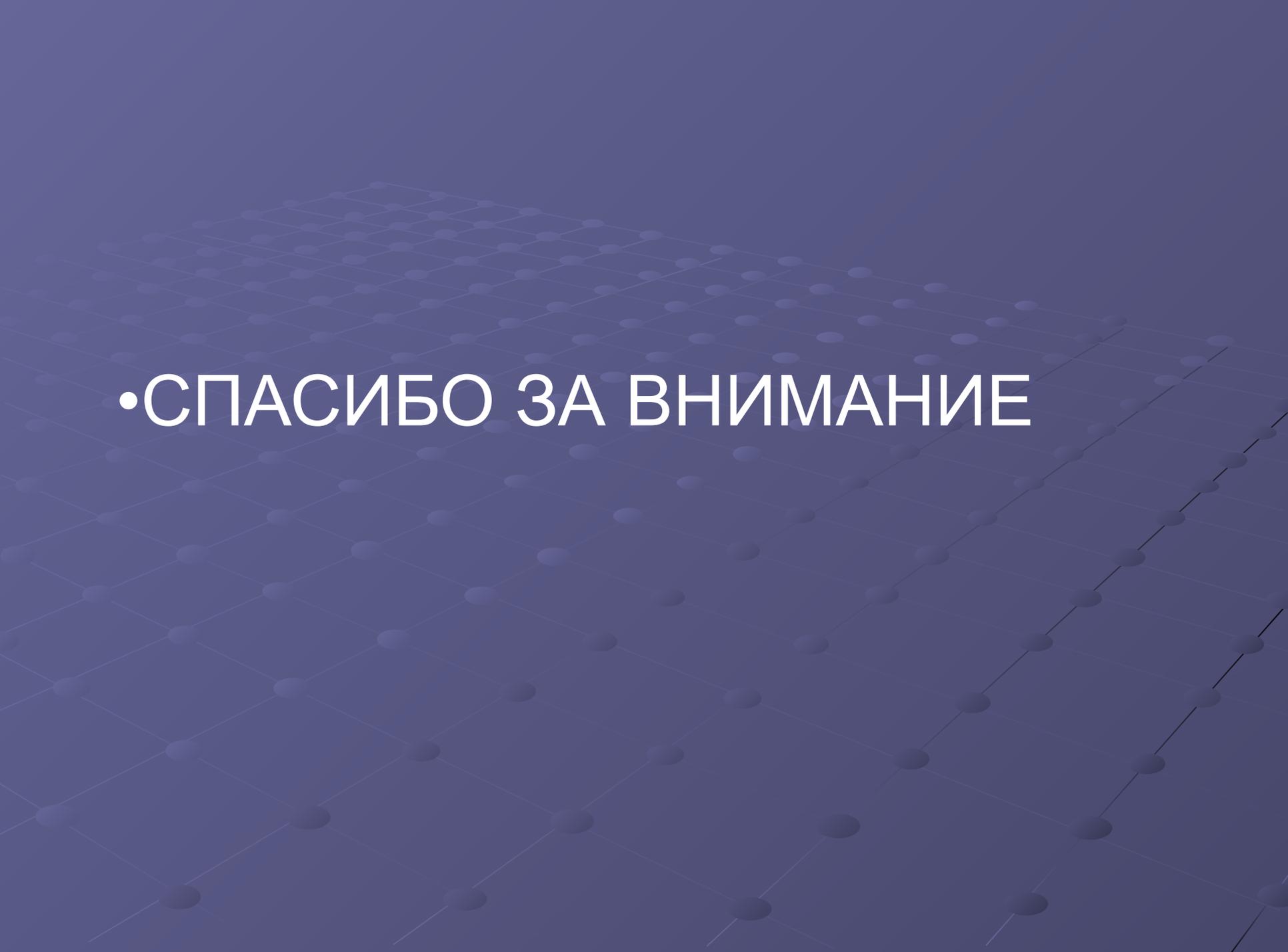
- Рассмотрим три точки. Они являются вершинами равностороннего треугольника. Тогда среди них есть 2 точки одного цвета.

Задача 4

- Дано 11 различных целых чисел. Доказать, что из них можно выбрать два числа, разность которых делится на 10.

Решение задачи 4

- По крайней мере два числа с 11 и избранных дают одинаковые остатки при делении на 10 (по принципу Дирихле). Пусть это будут числа А и В, тогда по теореме деления с остатком мы можем записать равенства:
- $A=10a+1, V=10b+1$.
- Тогда их разность $A-V=10(a-b)$ делится на 10.



• СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ