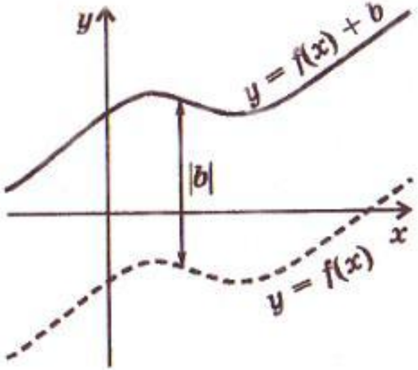
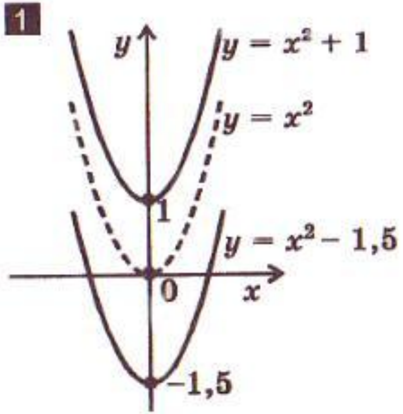
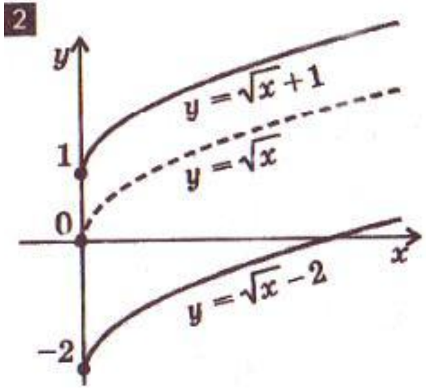
Решение задач с параметром графическими методами

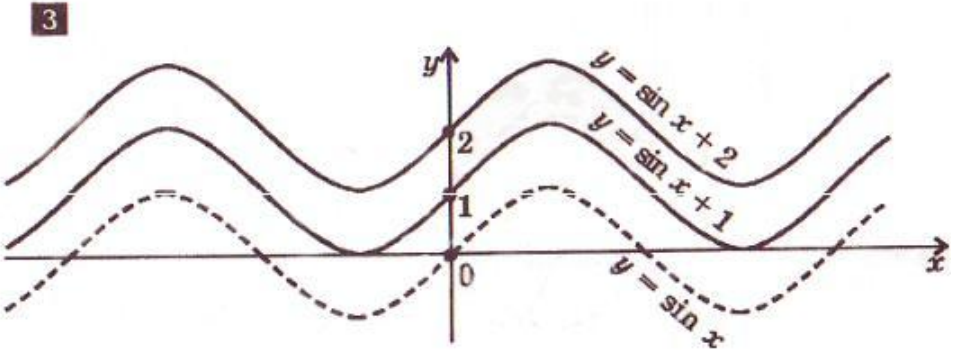
Преобразование графиков

$y = f(x) + b$ | Параллельный перенос его вдоль оси Oy на b единиц вверх при $b > 0$ и на $|b|$ единиц вниз при $b < 0$.



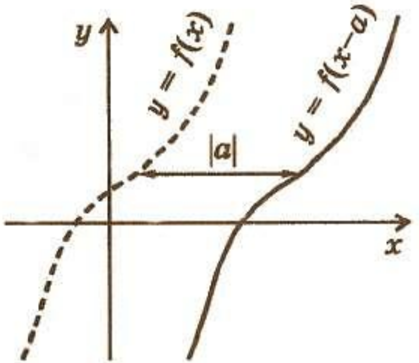




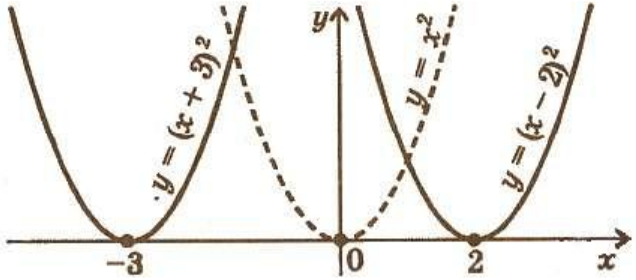


Преобразование графиков

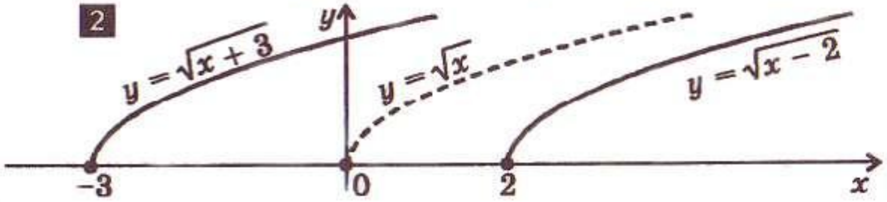
$y = f(x-a)$ | Параллельный перенос его вдоль оси Ox на a единиц вправо при $a > 0$ и на $|a|$ единиц влево при $a < 0$.



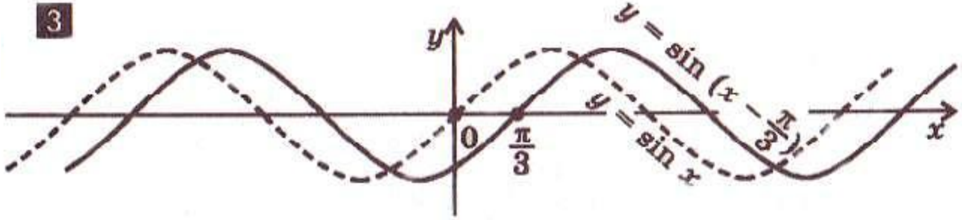
1



2



3



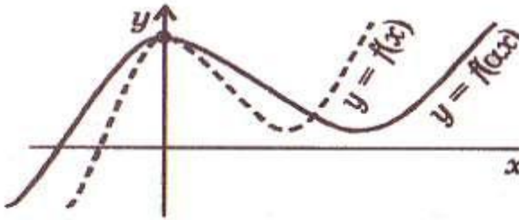
Преобразование графиков

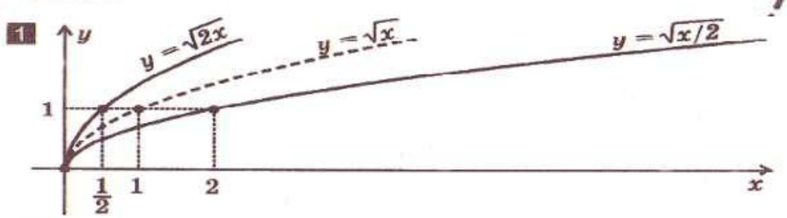
$y = f(kx)$, $k > 0$	Сжатие его вдоль оси Ox в k раз, если $k > 1$, и растяжение в $1/k$ раз, если $0 < k < 1$.

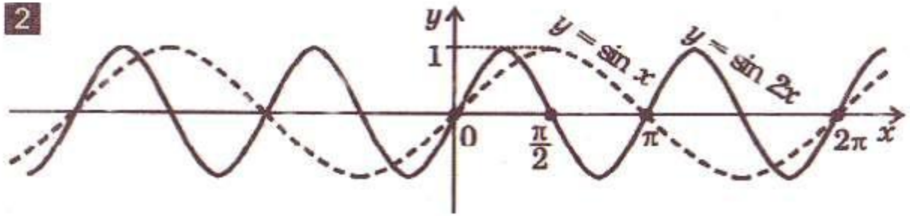
Точки пересечения графика с осью Oy остаются неизменными

$\alpha > 1$

$0 < \alpha < 1$



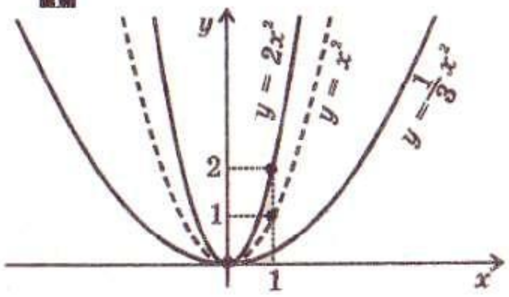




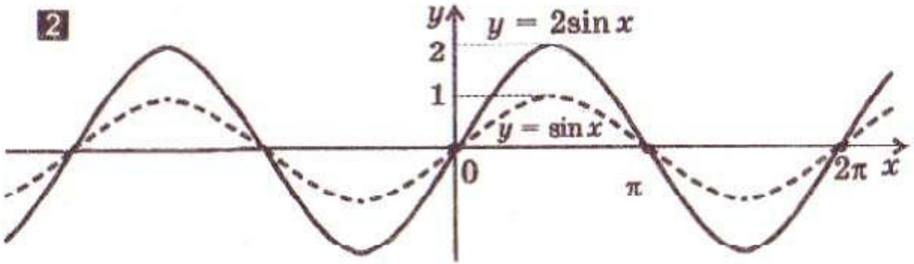
Преобразование графиков

$y = k\,f(x)$, $k > 0$	Растяжение его вдоль оси Oy в k раз, если $k > 1$, и сжатие в $1/k$ раз, если $0 < k < 1$.

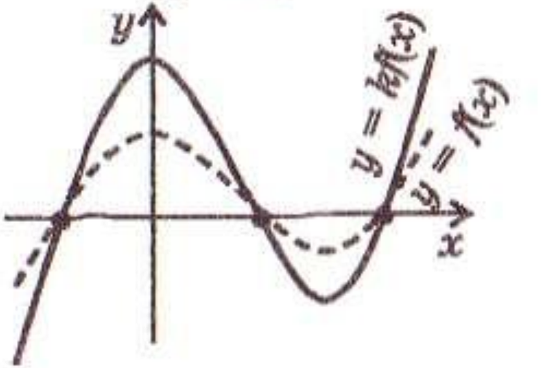
1



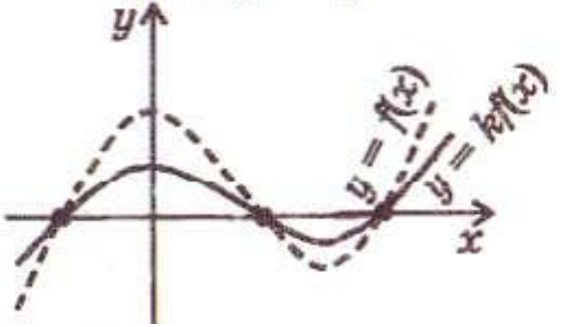
2



$k > 1$



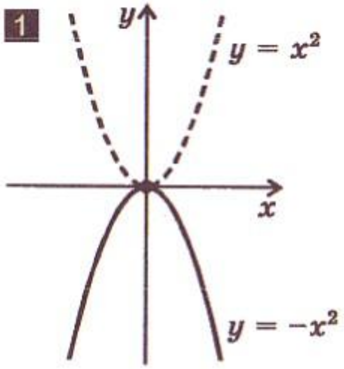
$0 < k < 1$

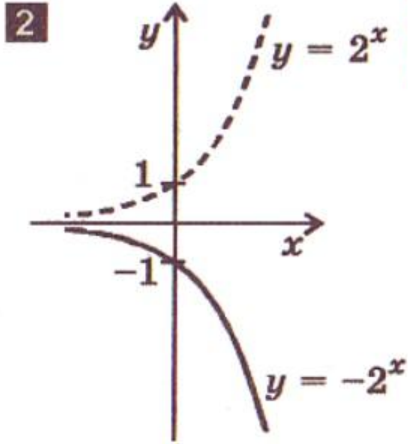


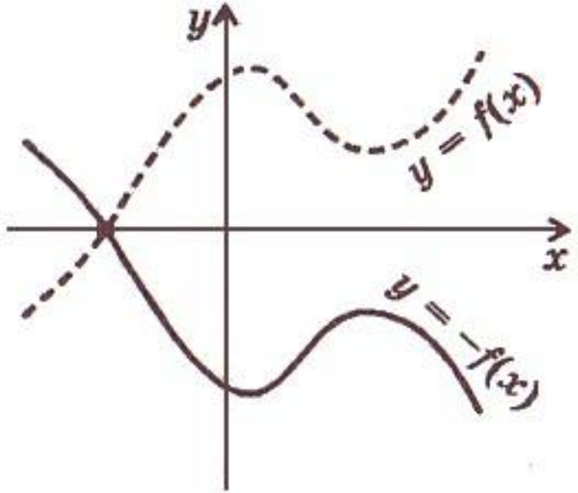
Точки пересечения графика с осью Ox остаются неизменными

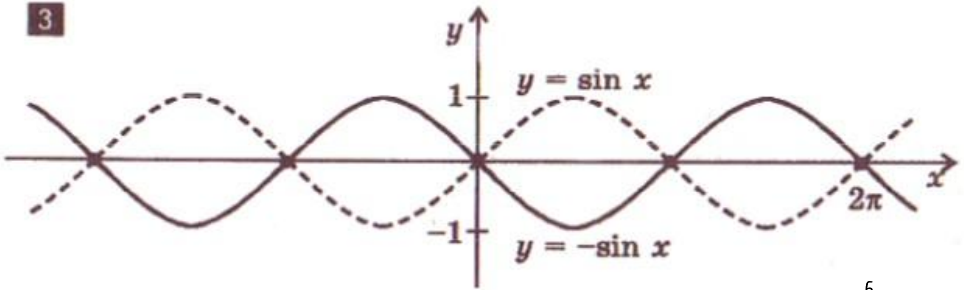
Преобразование графиков

$y=-f(x)$	Симметричное отражение его относительно оси Ox.



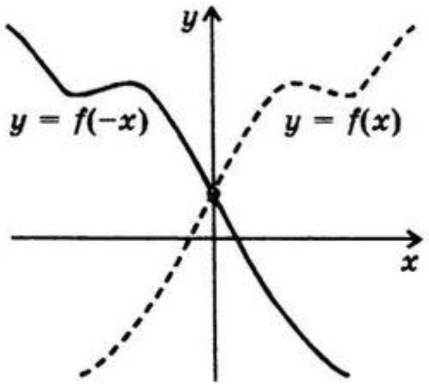


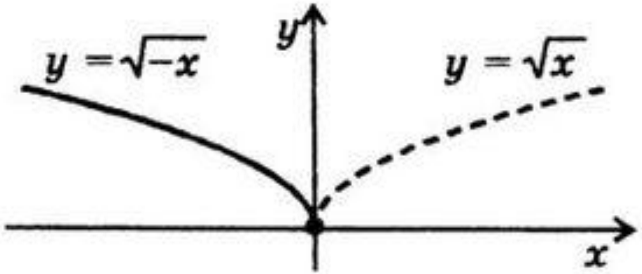


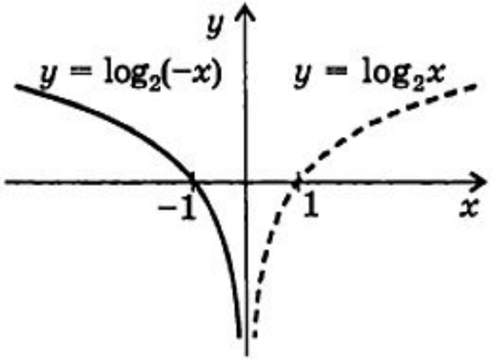


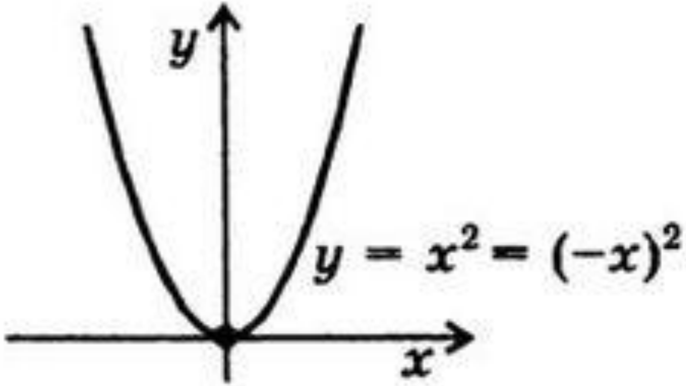
Преобразование графиков

$y = f(-x)$	Симметричное отражение его относительно оси Oy.



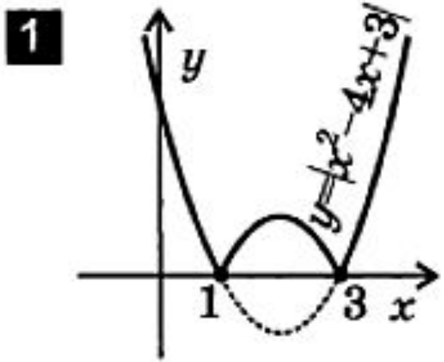


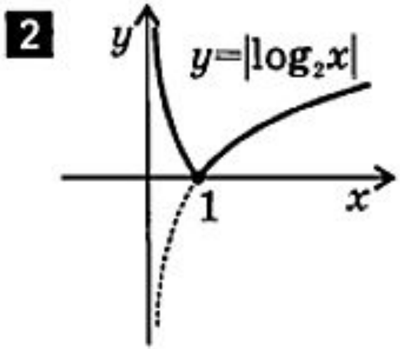


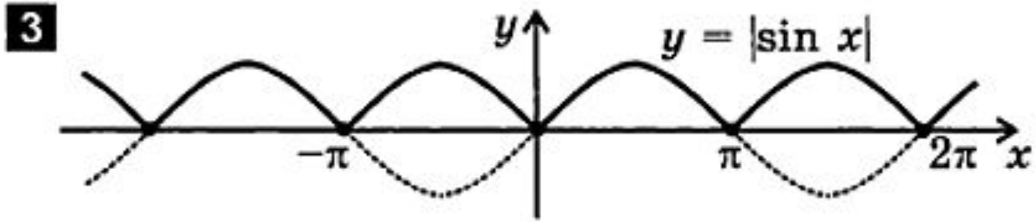


Преобразование графиков

$y = \lvert f(x) \rvert$	Часть графика, расположенная ниже оси Ox, симметрично отражается относительно этой оси, остальная его часть останется без изменения.

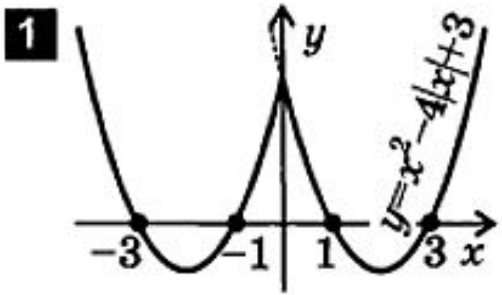


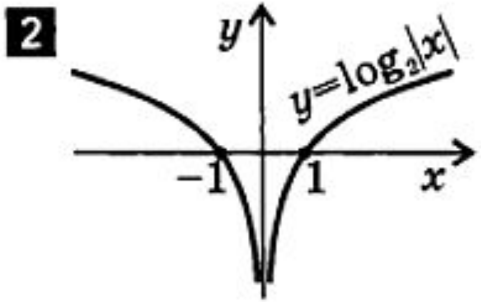


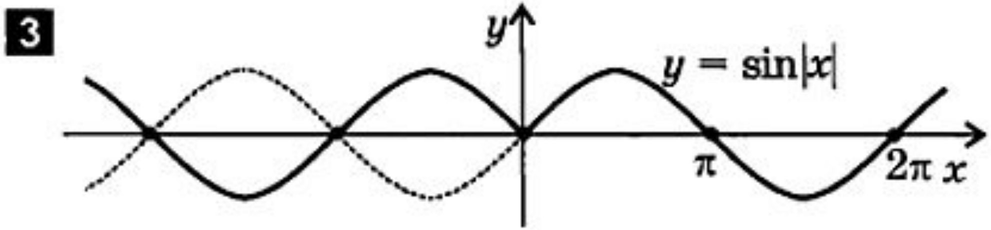


Преобразование графиков

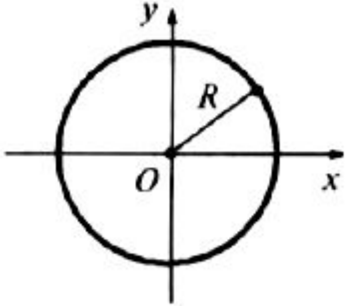
$y = f(\|x\|)$	Часть графика, расположенная в области $x \geq 0$, остается без изменения, а его часть для области $x < 0$ заменяется симметричным отображением относительно оси Oy части графика для $x > 0$.





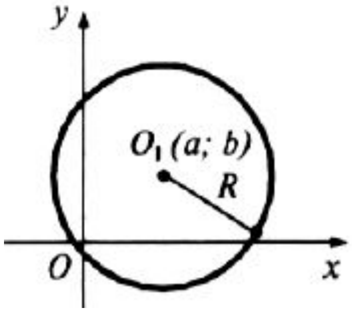


Уравнение окружности



$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$$

Центр окружности — начало координат.

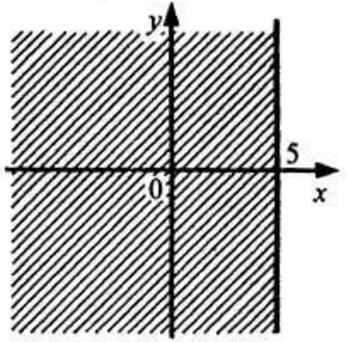


$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2}$$

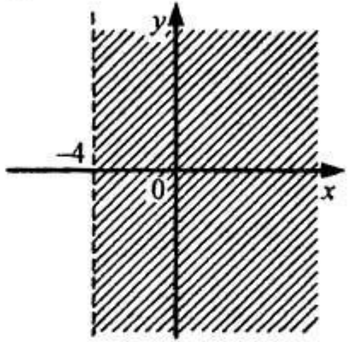
Центр окружности — точка $O_1\ (a,\ b)$.

Графический метод решения неравенств

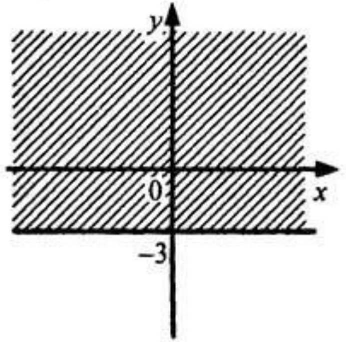
а) $x \le 5$



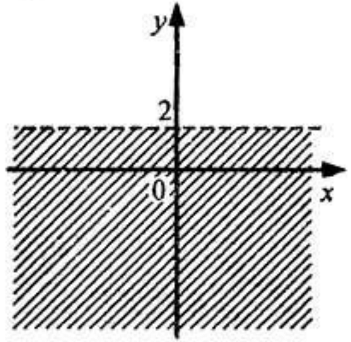
б) $x > -4$

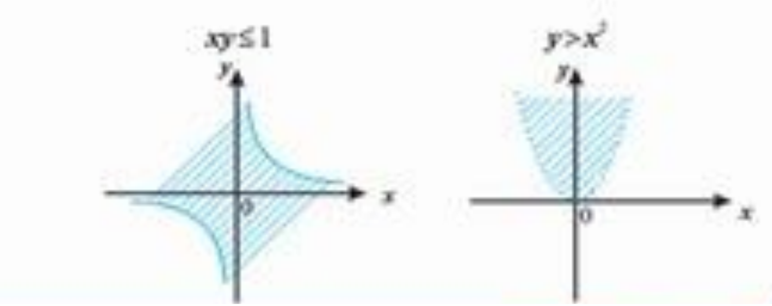


в) $y \ge -3$

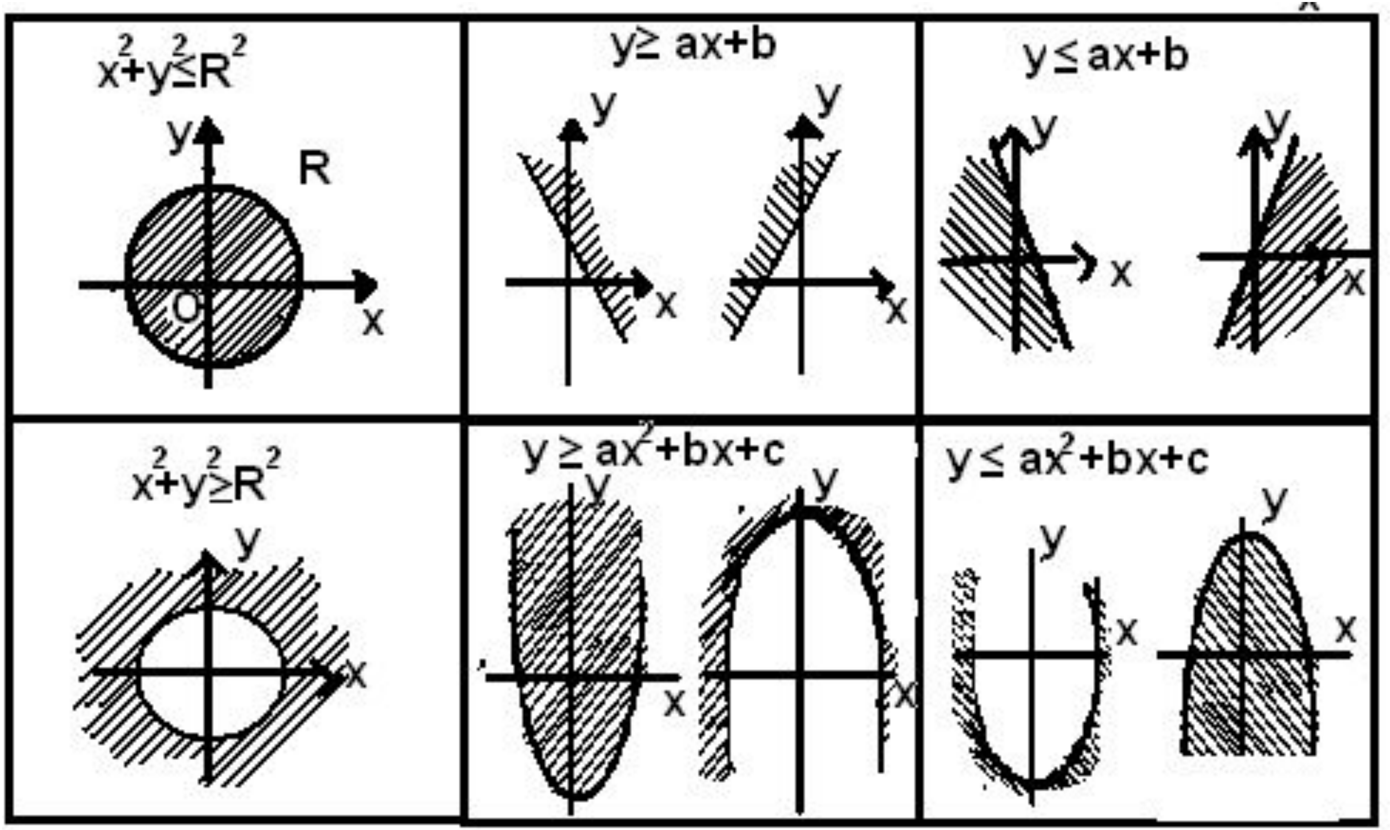


г) $y < 2$





Графический метод решения неравенств



Графический метод решения систем неравенств

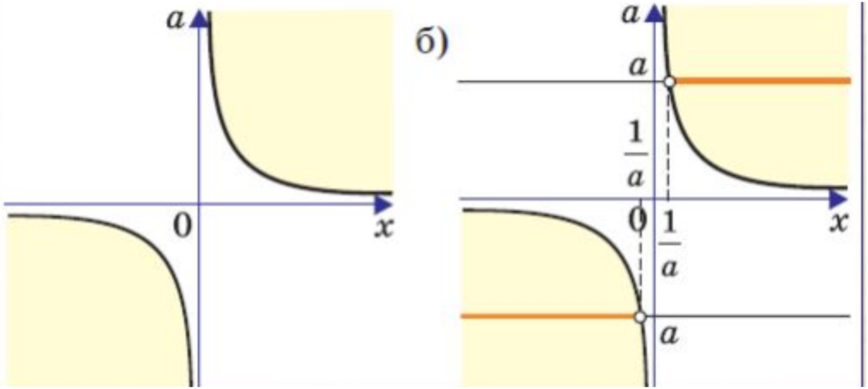
Пример №1: решите неравенство $ax > 1$

Ответ:

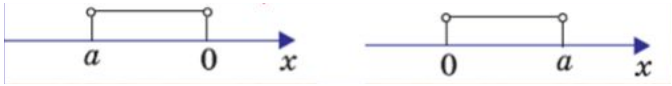
если $a=0$, решений нет

если $a > 0$, то $x > 1/a$

если $a<0$, то $x < 1/a$



Пример №2: решите неравенство $x(x-a)<0$

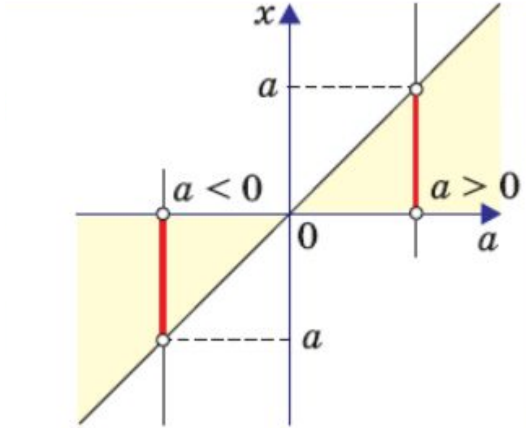


Ответ:

если $a=0$, решений нет

если $a > 0$, то $(0;a)$

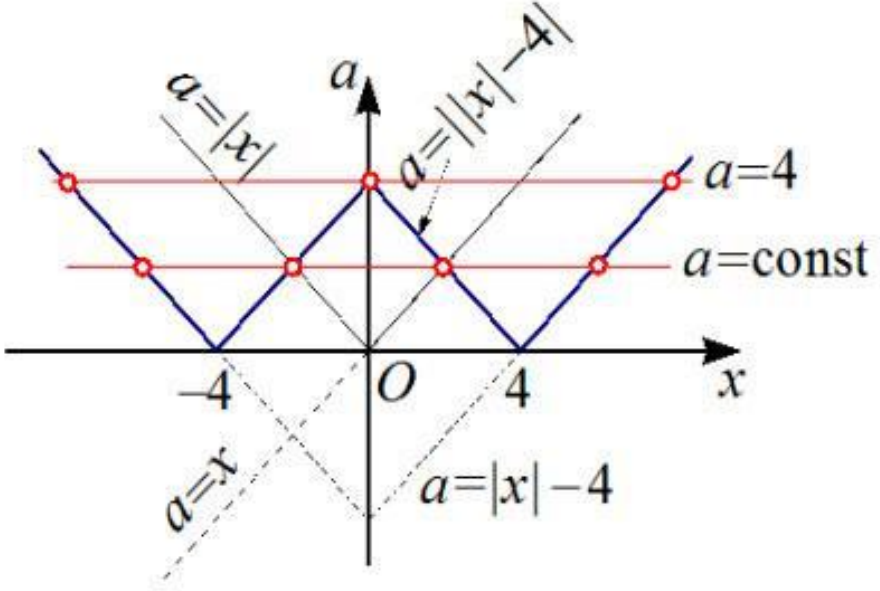
если $a<0$, то $(a;\ 0)$



Пример №3. Исследовать на количество корней уравнение $\big||x| - 4\big| = a$ в зависимости от параметра a.

1) Построим график функции $\big||x| - 4\big| = a$, где параметр выступает в качестве функции, меняющейся в зависимости от переменной x. (Преобразования графика можно производить последовательно $\boldsymbol{x} \to |\boldsymbol{x}| \to |\boldsymbol{x}| - \mathbf{4} \to ||\boldsymbol{x}| - \mathbf{4}|$)

2) Проводим прямые вида $a = const$ и ищем точки пересечения с графиком.



Ответ:

при $a < 0$ – решений нет

при $a = 0$ – два корня

при $0 < a < 4$ – четыре корня

при $a = 4$ – три корня

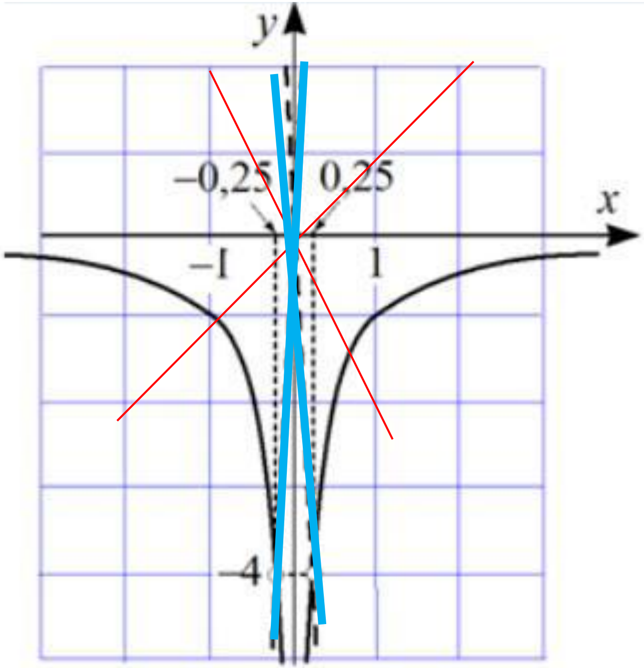
при $a > 4$ – два корня.

Пример №4. Определите k, при каждом из которых уравнение $kx = \frac{4|x|-1}{|x|-4x^2}$ не имеет корней.

1) Рассмотрим правую и левую части уравнения как две функции: $y = kx$ и $y = \frac{4|x|-1}{|x|-4x^2}$

2) Первая функция вне зависимости от k проходит через точку с координатами (0; 0), а в зависимости от k прямая меняет угол наклона к положительному направлению оси Ox

3) Вторая функция - четная, для нее достаточно построить график при $x > 0$ и симметрично отобразить его относительно оси Oy. Также необходимо выбить точки $(-0{,}25; -4)$ и $(0{,}25; -4)$, которые не принадлежат функции по ОДЗ (знаменатель не должен равняться нулю)



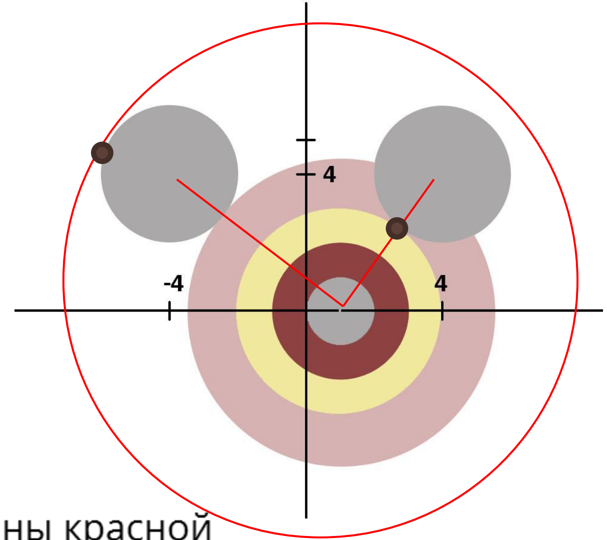
4) Общих точек функции не имеют при $k = -16, k = 16, k = 0$

Ответ: $k = -16;\ 0; 16.$

Пример №5. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} (|x|-4)^2+(y-4)^2=4, \\ (x-1)^2+y^2=a^2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

1) Графический вид первого уравнения - окружность радиуса 2, которую необходимо симметрично отобразить относительно оси Oy. Получим две окружности (серые).

2) Второе уравнение – уравнение окружности, за ее радиус отвечает параметр a. Центр окружности в точке $(1;0)$. Изобразим несколько видов этих окружностей.



3) Единственное решение возможно, когда первый график касается второго единожды.

4) С правой окружностью: по теореме Пифагора найдем квадрат длины красной линии: $16+(4-1)^2=5^2$. Радиус маленькой окружности 2 $\Rightarrow a=5-2=3$.

5) С левой окружностью: $(1-(-4))^2+16=41$. Тогда $a=\sqrt{41}+2$.

Ответ: $3;\ \sqrt{41}+2$.

Пример №6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение: $ax + \sqrt{-7 - 8x - x^2} = 2a + 3$ имеет единственный корень.

$$ax + \sqrt{-7 - 8x - x^2} = 2a + 3$$

1) Упростим выражение: $\sqrt{-7 - 8x - x^2} = -a(x - 2) + 3$.

2) Построим две функции:

$y = -a(x - 2) + 3$ — график прямая с коэффициентом наклона $-a$, проходящая через точку (2; 3).

$y = \sqrt{-7 - 8x - x^2}$ — график функции полуокружность.

3) Возведем в квадрат функцию и приведем к уравнению окружности:

$$y^2 = -7 - 8x - x^2 \Leftrightarrow y^2 + x^2 + 8x + 7 = 0$$

$$y^2 + (x^2 + 8x + 16) - 9 = 0 \Leftrightarrow y^2 + (x + 4)^2 = 9$$

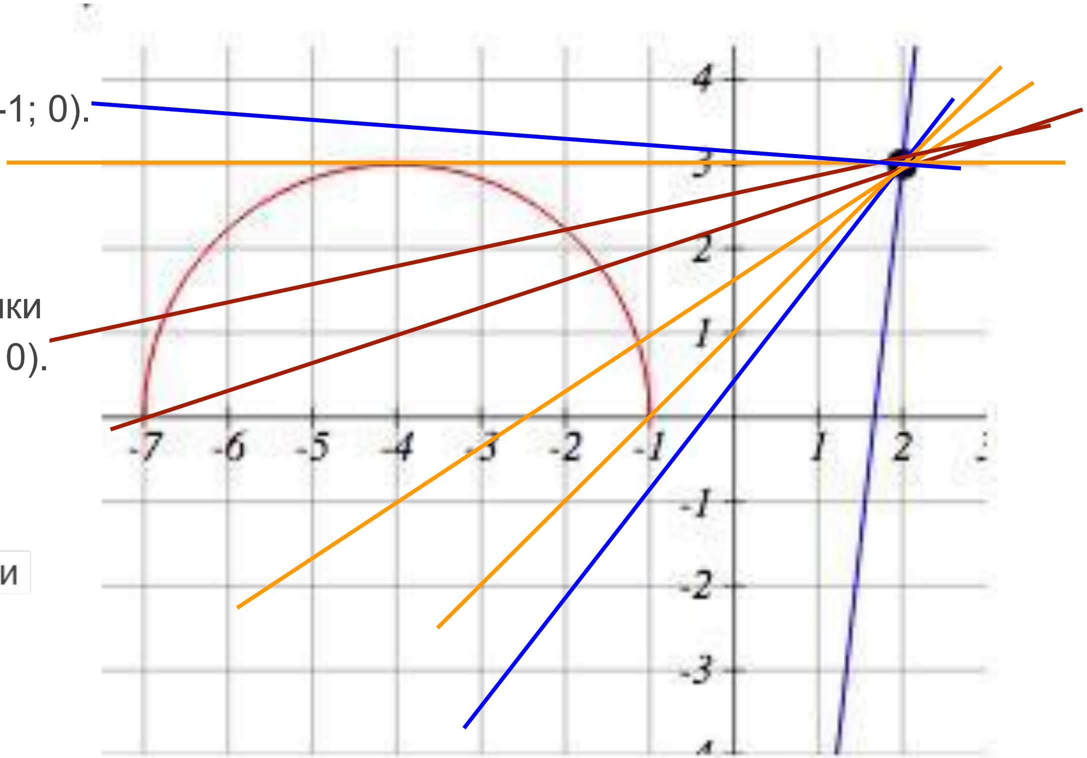
4) Получили график окружности с центром в точке (-4; 0) и радиусом 3.

Учтем ОДЗ: подкоренное выражение будет неотрицательно при $x \in [-7; -1]$.

Значения функции неотрицательны, поэтому получаем верхнюю полуокружность.

Пример №6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение: $ax + \sqrt{-7 - 8x - x^2} = 2a + 3$ имеет единственный корень.

5) Построим обе функции:



Первая подходящая точка с координатами (-1; 0).
Найдем значение параметра:

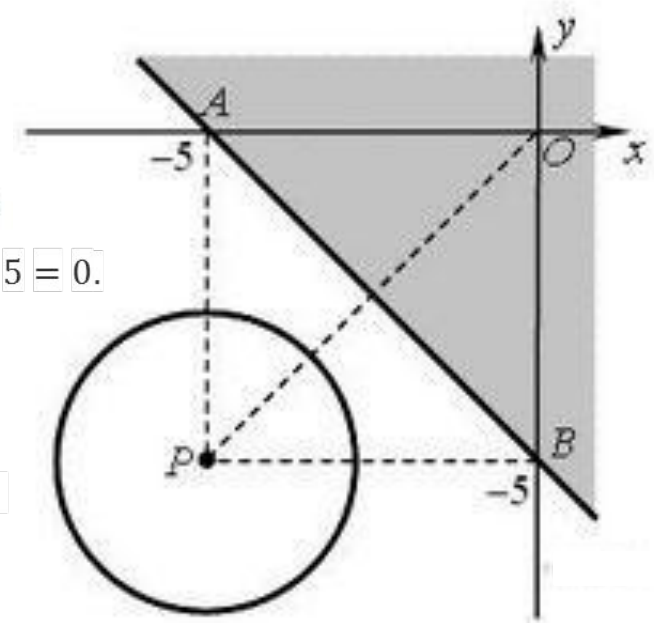
Для красной прямой появляется уже две точки пересечения графиков, одна из которых (-7; 0).
Найдем значение параметра:

$0 = -a(-7 - 2) + 3 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}.$

Последняя прямая параллельна оси Oy, при $a = 0.$

Ответ: [-1; -⅓) ∪ {0}.

Пример №7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{2xy + a} = x + y + 5$ не имеет решений.



1) Возведем обе части уравнения в квадрат с учетом ограничений:

$$\sqrt{2xy+a} = x+y+5 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+5 \geq 0, \\ 2xy + a = x^2 + y^2 + 25 + 2xy + 10x + 10y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+5 \geq 0, \\ (x+5)^2 + (y+5)^2 = a + 25. \end{cases}$$

2) Неравенство задает верхнюю полуплоскость с границей $x + y + 5 = 0$.

3) Второе уравнение – при $a > -25$ уравнение окружности с центром P(-5; -5) и радиусом: $R = \sqrt{a + 25}$

4) Окружность и полуплоскость не имеют общих точек тогда, когда радиус окружности меньше половины диагонали PO квадрата APBO, то есть $\sqrt{a + 25} < \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $-25 < a < -12.5$.

5) При $a < -25$ уравнение, а следовательно вся система не имеют решений, при $a = -25$ решение уравнения (-5; -5) не удовлетворяет заданной полуплоскости.

Ответ: $a > -12{,}5$.

Пример №8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(log_8(x+a) - log_8(x-a))^2 - 12a(log_8(x+a) - log_8(x-a)) + 35a^2 - 6a - 9 = 0$$

имеет ровно два решения.

Пусть $t = log_8(x+a) - log_8(x-a)$, тогда $t^2 - 12at + 35a^2 - 6a - 9 = 0 \Leftrightarrow$

$t = 5a - 3,$

Исходное уравнение имеет два различных корня тогда или только тогда, когда график функции: $f(x) = log_8(x+a) - log_8(x-a)$

имеет с горизонтальными прямыми $y = 5a - 3, y = 7a + 3$ ровно две общие точки.

Прямые совпадают при $a = -3$.

При $a = 0$ уравнение не имеет решений.

При ограничениях $a > 0$, то при $x > a$, $a < 0$, то при $x > -a$.

При ограничениях $f(x) = log_8(x+a) - log_8(x-a) = log_8\left(\frac{x+a}{x-a}\right) = log_8\left(1 + \frac{2a}{x-a}\right)$.

Пример №8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(log_8(x+a) - log_8(x-a))^2 - 12a(log_8(x+a) - log_8(x-a)) + 35a^2 - 6a - 9 = 0$$

имеет ровно два решения.

При ограничениях $f(x) = log_8(x+a) - log_8(x-a) = log_8\left(\frac{x+a}{x-a}\right) = log_8\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)$.

Построим эскизы графиков при $a > 0$, тогда получим убывающую функцию, при $a < 0$ получаем возрастающую функцию.

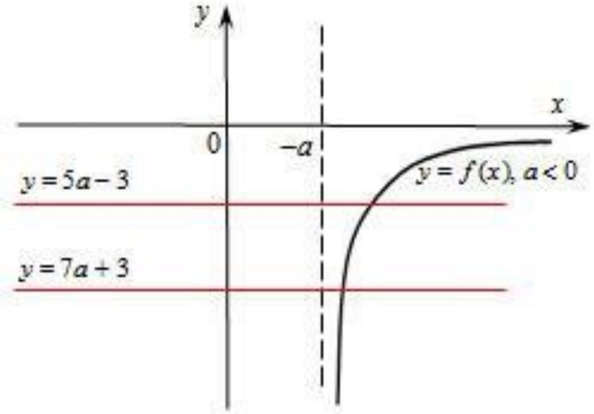
При $a > 0$, необходимо выполнение неравенств:

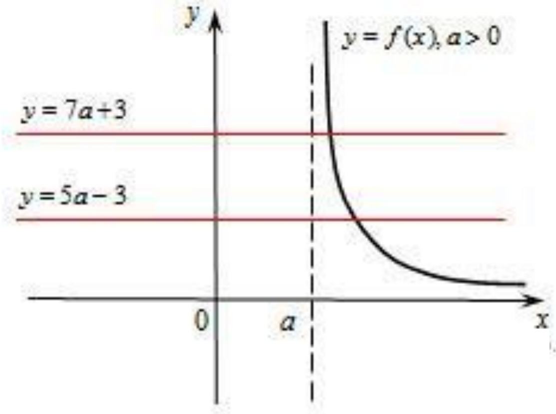
$5a - 3 > 0, 7a + 3 > 0$

$\Rightarrow a > 0{,}6.$

При $a < 0$, необходимо выполнение неравенств:

$5a - 3 < 0, 7a + 3 < 0 \Rightarrow a < -\frac{3}{7}.$





Ответ: $(-\infty;-3)\cup\left(-3;-\frac{3}{7}\right)\cup\left(\frac{3}{5};+\infty\right)$

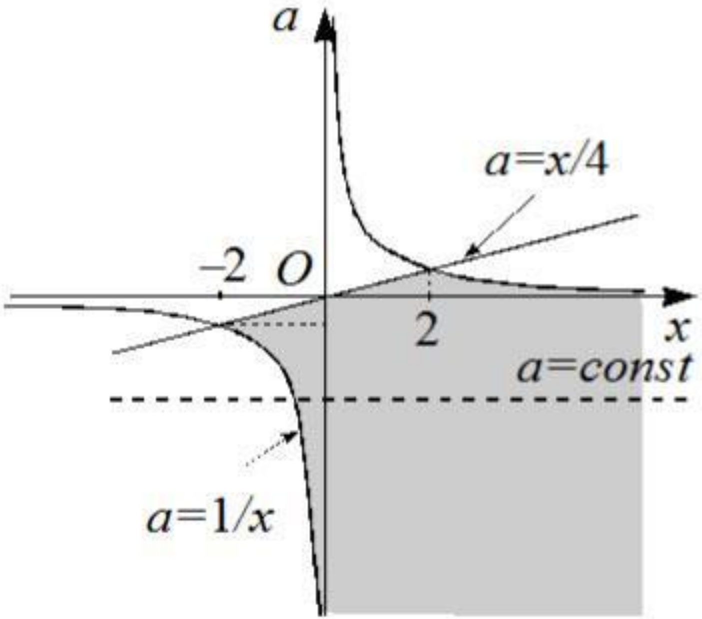
Пример №9. Определите, при каких значениях параметра а имеет хотя бы одно решение система неравенств $\begin{cases} ax - 1 \leq 0, \\ x - 4a \geq 0. \end{cases}$

1) Выразим a и построим границы неравенств. Заштрихуем на плоскости Oxa множество точек, координаты $(x; a)$ которых удовлетворяют системе неравенств

2) Первому неравенству системы удовлетворяют координаты точек, лежащих выше гиперболы $a = \frac{1}{x}$ при $x < 0$, и ниже при $x > 0$.

3) Второе неравенство выполняется для точек, лежащих ниже прямой $a = \frac{x}{4}$.

4) Данная система имеет решение, если прямая $a = const$ пересекает заштрихованную область при $a = 0{,}5$; $a < 0{,}5$.

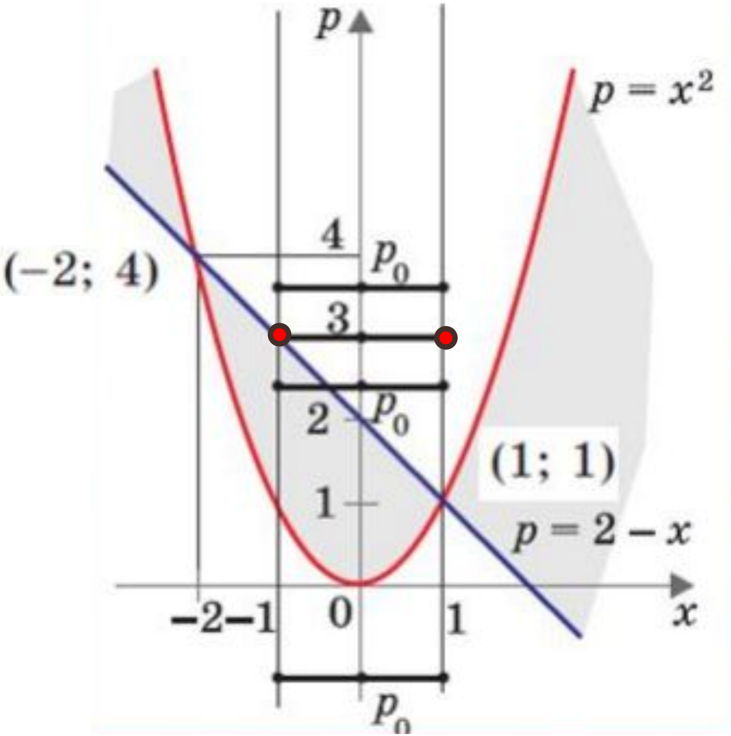


Ответ: $a \leq 0{,}5$.

Пример №10. Найти все значения параметра p, при каждом из которых множество решений неравенства $(p-x^2)(p+x-2) \le 0$ не содержит ни одной точки из отрезка $x \epsilon [-1;1]$.

Изобразим на координатной плоскости Oxp решения данного неравенства:

$$(p-x^2)(p+x-2) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} p \ge x^2, \\ p \le 2-x \end{cases} \\ \begin{cases} p \le x^2, \\ p \ge 2-x, \end{cases} \end{array}\right.$$



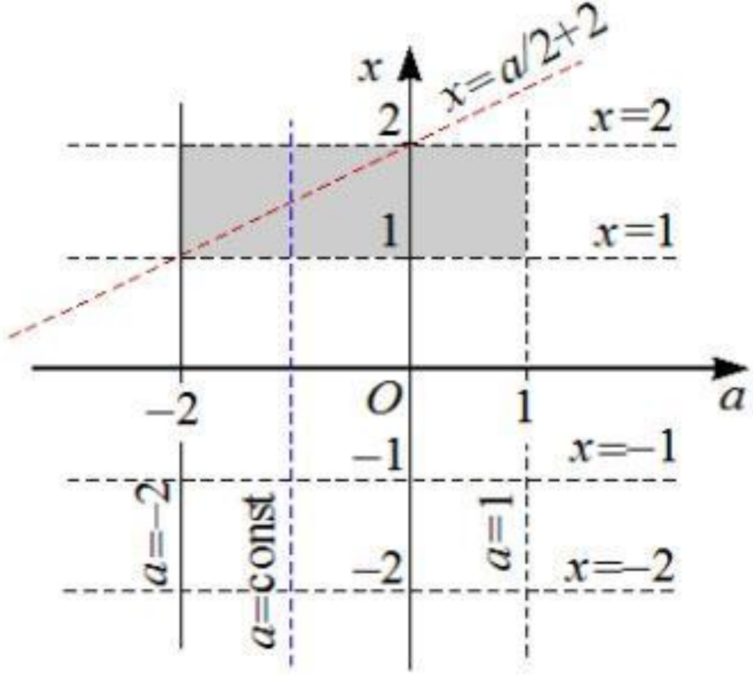
Прямые $x=-1, x=1$ пересекают параболу в точках (-1;1) и (1;1) соответственно, а прямую $p=2-x$ в точке (-1;3) и точке (1;1).

Отрезок прямой $p=p_0$, заключенный между прямыми $x=-1, x=1$, не пересекает изображенное множество.

Ответ: $p \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

Пример №11. При каждом значении параметра a решить систему неравенств.

$$\begin{cases} log_{2-|x|}(1-a) < 0, (1) \\ \sqrt{2x-2} > \sqrt{a+2}. (2) \end{cases}$$



Найдем область определения системы:

$$\begin{cases} 2-|x|>0, \\ 2-|x|\neq 1, \\ 1-a>0, \\ 2x-2\geq 0, \\ a+2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x<2, \\ -2\leq a<1 \end{cases}$$

Заштрихуем область на графике Oax

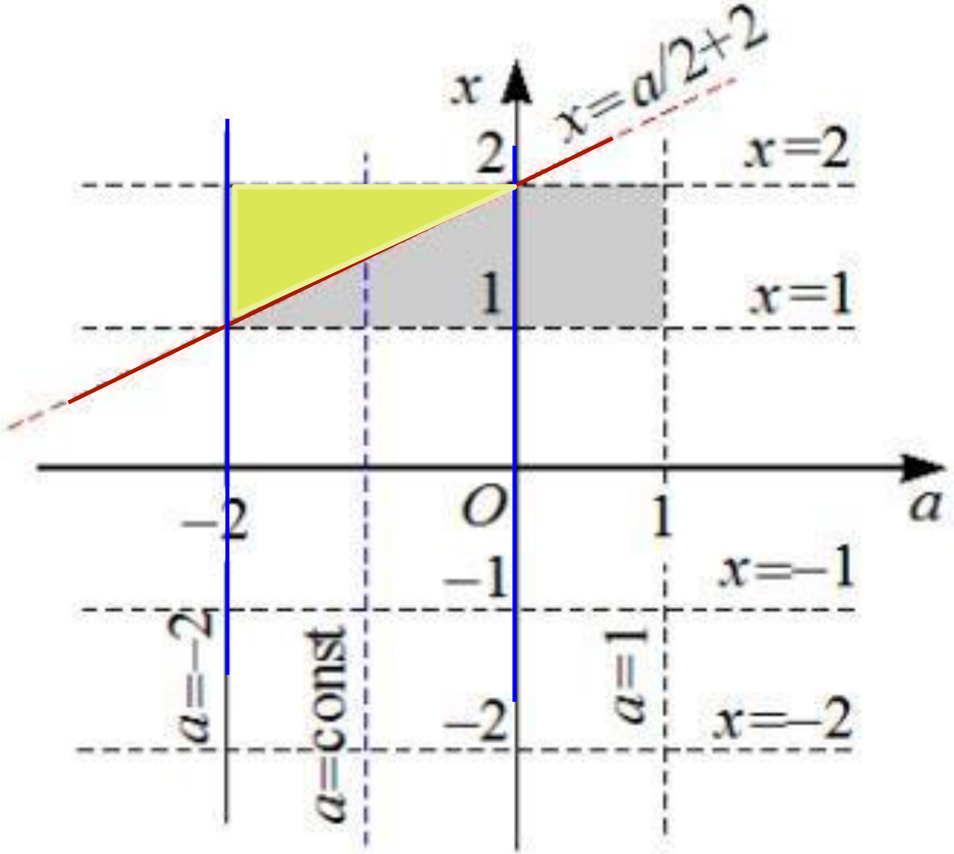
Решим неравенство:

$$log_{2-|x|}(1-a) < 0 \Leftrightarrow 1-a > 1 \Leftrightarrow a < 0 \ (1),$$

$$\sqrt{2x-2} > \sqrt{a+2} \Leftrightarrow x > \frac{a}{2} + 2 \ (2).$$

Пример №11. При каждом значении параметра a решить систему неравенств.

$$\begin{cases} log_{2-|x|}(1-a) < 0, (1) \\ \sqrt{2x-2} > \sqrt{a+2}. (2) \end{cases}$$



Решение:

$a < 0$ (1),

$x > \frac{a}{2} + 2$ (2).

ОДЗ:

$$\begin{cases} 1 < x < 2 \\ -2 \le a < 1 \end{cases}$$

С учетом области определения:

$$\begin{cases} 1 < x < 2, \\ x > \frac{a}{2} + 2, \\ -2 \le a < 0. \end{cases}$$

Ответ:

если $a < -2; a \ge 0$, то решений нет;

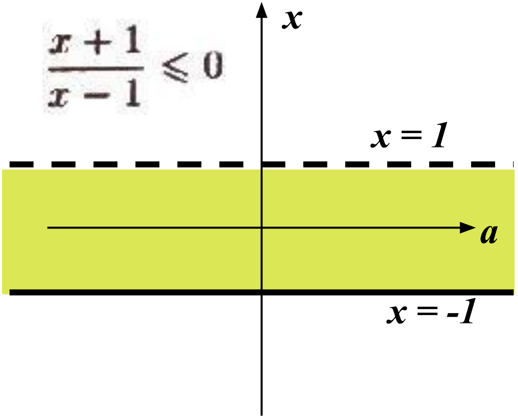
если $-2 \le a < 0$, то $\frac{a}{2} + 2 < x < 2$.

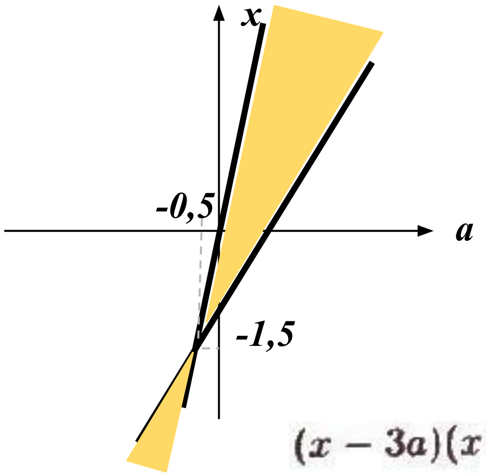
Пример №12. Решите систему неравенств при всех вещественных значениях параметра a.

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} \le 0, \\ (x-3a)(x-a+1) \le 0, \\ \dfrac{2x-3}{x}\sqrt{\dfrac{\sin\pi(x+a)}{\sin\pi(x-a)}} \le 0. \end{cases}$$

Изобразим каждое множество решений трех неравенств в системе Oxa.

$$\frac{x+1}{x-1} \leqslant 0$$



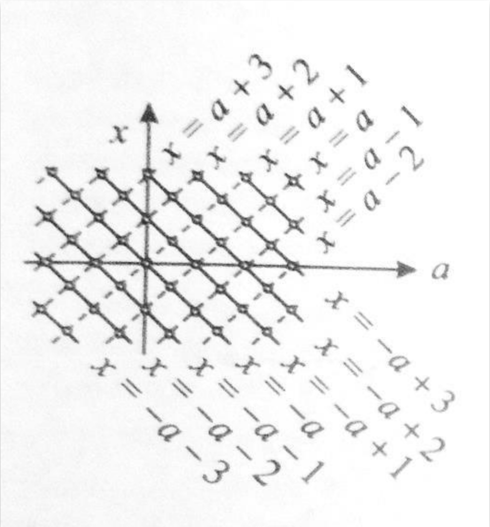


$$(x-3a)(x-a+1) \leqslant 0$$

$$\frac{2x-3}{x}\sqrt{\frac{sin\pi(x+a)}{sin\pi(x-a)}} \le 0 \Leftrightarrow \text{совокупности систем} \begin{cases} sin\pi(x+a)=0, \\ sin\pi(x-a)\neq 0, x\neq 0, \end{cases} \text{и} \begin{cases} \dfrac{sin\pi(x+a)}{sin\pi(x-a)} > 0, \\ \dfrac{2x-3}{x} \le 0. \end{cases}$$

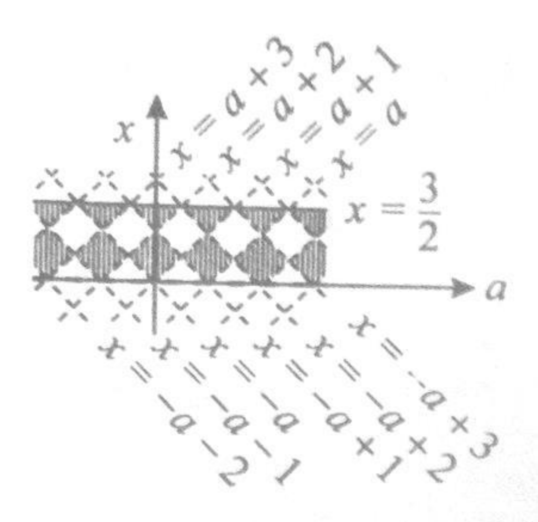
$$\begin{cases} sin\pi(x+a)=0, \\ sin\pi(x-a)\neq 0, x\neq 0, \end{cases}$$

Решением системы является множество параллельных прямых $x=-a+n, n\in Z$ с выколотыми точками $x\neq a+k, k\in Z$.



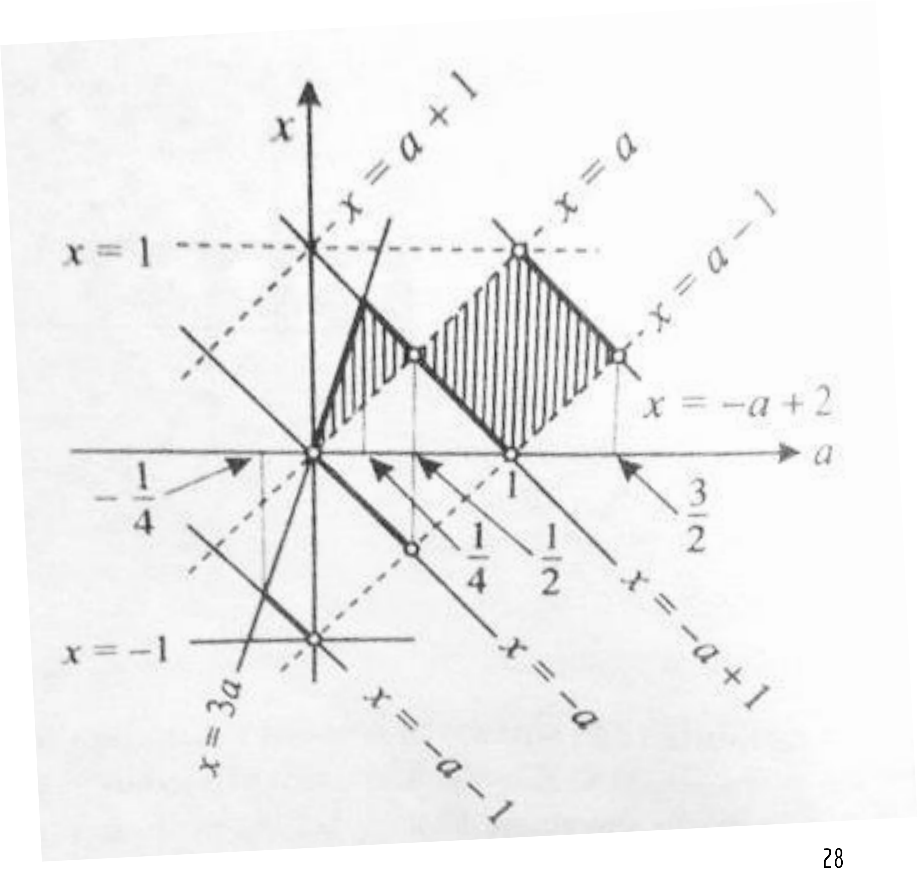
$$\begin{cases} \dfrac{sin\pi(x+a)}{sin\pi(x-a)} > 0, \\ \dfrac{2x-3}{x} \le 0. \end{cases}$$

Решением системы является множество внутренних точек квадратов, границами которых служат параллельные прямые $x=-a+n, x=a+k\ k, n\in Z$; причем последнее множество расположено в полосе $0<x\le\frac{3}{2}$ с включением верхней границы этой полосы, то есть прямой $x=1{,}5$.



Пример №12. Решите систему неравенств при всех вещественных значениях параметра a.

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} \le 0, \\ (x-3a)(x-a+1) \le 0, \\ \frac{2x-3}{x}\sqrt{\frac{\sin\pi(x+a)}{\sin\pi(x-a)}} \le 0. \end{cases}$$



Найдем пересечение всех множеств.

Ответ:

$a \in (-\infty; -0{,}25) \cup \{0\} \cup \{0{,}5\} \cup [1{,}5;\ +\infty), x \in \emptyset,$

$a \in [-0{,}25; 0), x \in \{-a-1\},$

$a \in (0; 0{,}25], x \in \{-a\} \cup (a; 3a],$

$a \in (0{,}25; 0{,}5), x \in \{-a\} \cup (a; -a+1],$

$a \in (0{,}5; 1), x \in [-a-1; a),$

$a = 1, x \in (0; 1),$

$a \in (1; 1{,}5), x \in (a-1; -a+2].$

Пример №13. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $1-\frac{a}{x}<\frac{8}{x}\left(1-\frac{a+2}{x}+\frac{2a}{x^2}\right)$ содержится в некотором отрезке длиной 7 и при этом содержит какой-нибудь отрезок длиной 4.

Преобразуем исходное неравенство:

$$\frac{x^2(x-a)-8(x-a)(x-2)}{x^3}>0 \Leftrightarrow x^3(x-a)(x-4)^2<0$$

Решим неравенство методом областей, введем функцию:

$$f(a,x)=x^3(x-a)(x-4)^2.$$

Нули функции: $x=0,\ x=4,\ x=a.$

Построим три прямые в системах координат Oxa и расставим знаки функции $f(a,x)=x^3(x-a)(x-4)^2$ на полученных промежутках путем подставления различных значений на полученных областях.

Пример №13. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $1-\frac{a}{x}<\frac{8}{x}\left(1-\frac{a+2}{x}+\frac{2a}{x^2}\right)$ содержится в некотором отрезке длиной 7 и при этом содержит какой-нибудь отрезок длиной 4.

$-4 \le a \le 4$ решение $(0; a)$ длиной, меньшей 4.

$a > 4$ решение $(0; 4) \cup (4; a)$. Содержать отрезок длиной 4 может только второй интервал, но тогда все решения не содержатся в отрезке длиной 7.

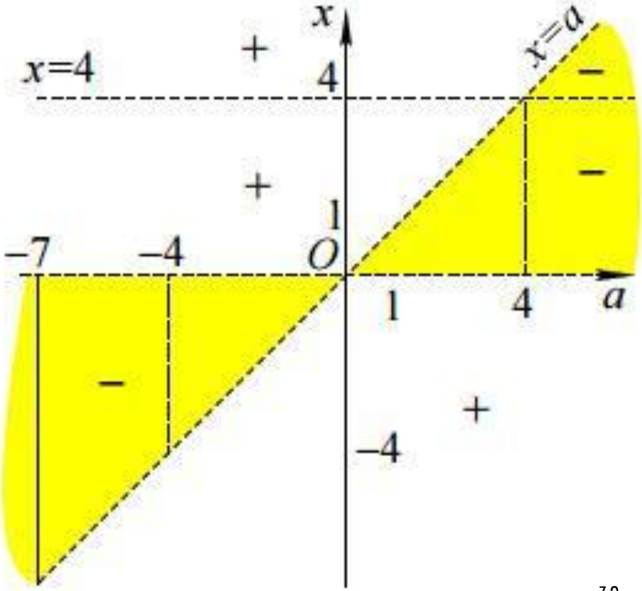
$4 < a < 8$ решения содержат отрезки длиной, меньше 4.

$a > 8$ решение содержит отрезок длиной 4, но не содержится в отрезке длиной 7.

При $a < 0$ множество решений интервал $(a; 0)$. Он содержит отрезок длиной 4, только если его длина больше 4, то есть при $a < -4$. Он содержится в отрезке длиной 7, только если его длина не больше 7, то есть при $a > -7$.

Ответ: $a \in [-7; -4)$.

$f(a,x)=x^3(x-a)(x-4)^2.$



Школа Олехника

приглашает

информация на сайте

www.olehnik.ru

7 МИНИ -олимпиад

28 февраля (воскресенье) 2016 года на сайте

http://preemstvennost.ru/

Следующий вебинар по математике для учителей, обучающихся и их родителей

17 марта (четверг) в 16.00

тема:

«Планиметрия. Задача № 16 Единого государственного экзамена по математике»

Приглашаем!