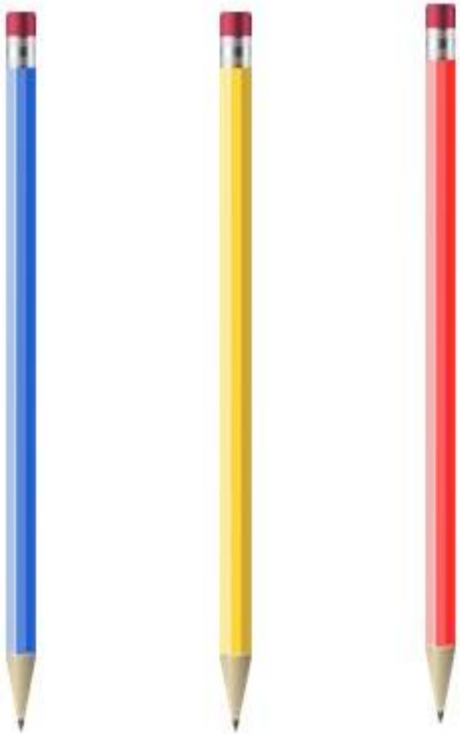
Перестановки. Правило умножения. Факториалы.

Перестановкой называется множество из n элементов, записанных в определённом порядке.

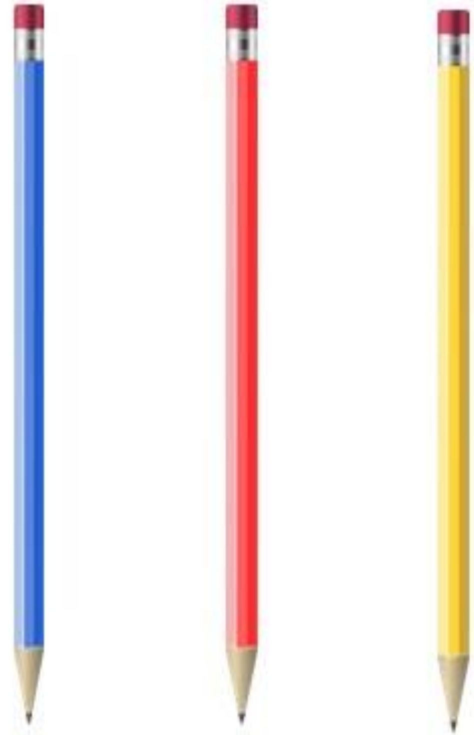
С

К

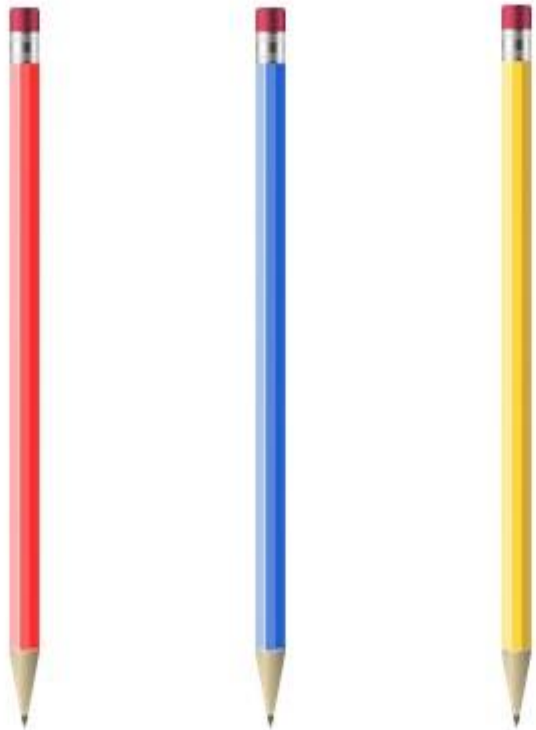
Ж



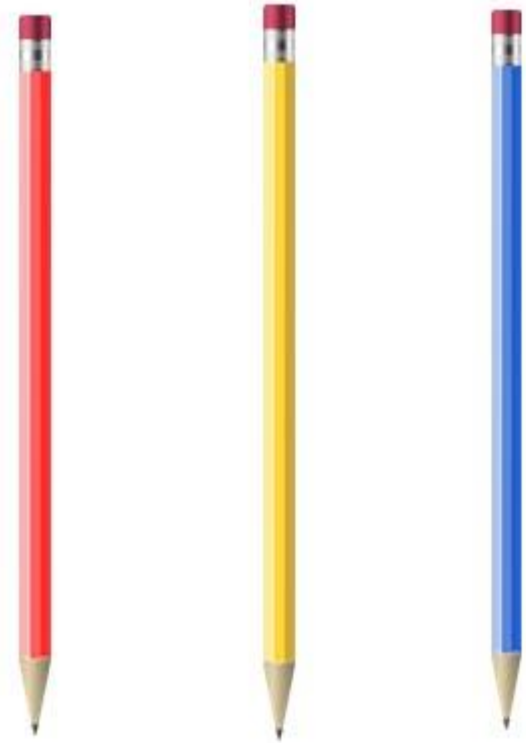
С Ж К



С К Ж



К С Ж



К Ж С

Ж К С | Ж С К

Каждое из этих расположений называют перестановкой из трех элементов.

Перестановкой из трех элементов называется каждое расположение этих элементов в определенном порядке.

Число перестановок из n элементов

$$P_n$$

В рассмотренном примере мы установили, что $P_3 = 6$.

Чтобы найти количество перестановок из трех элементов, можно не выписывать их, а воспользоваться ***комбинаторным правилом умножения.***

На первое место можно поставить любой из трех элементов.

Для каждого выбора первого элемента существует две возможности выбора второго элемента из оставшихся двух элементов.

Для каждого выбора первых двух элементов остается единственная возможность выбора третьего элемента.

Значит, число перестановок из 3 элементов равно $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Пусть имеем n элементов.

Для каждого выбора первого элемента на второе место можно поставить один из оставшихся $n - 1$ один элементов.

Для каждого выбора первых двух элементов на третье место можно поставить один из оставшихся $n - 2$ элементов и так далее.

$$P_n = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 .$$

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)\,n.$$

Для произведения первых n натуральных чисел используют специальное обозначение: **n!** (n факториал).

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

$$1! = 1$$

Число всевозможных перестановок из n элементов равно n факториал.

Теорема о перестановках элементов конечного множества

n различных элементов можно расставить по одному на n различных мест ровно n! способами.

$$P_n = n!$$

Сколькими способами можно разложить семь шаров по семи ячейкам?

Число способов равно числу перестановок из семи элементов.

$$P_7 = 7! = 5040.$$

Сколько различных четырехзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр 0, 1, 2, 3?

Из цифр 0, 1, 2, 3 можно получить из P_4 перестановок.

Надо исключить те перестановки, которые начинаются с 0, так как натуральное число не может начинаться с цифры нуль.

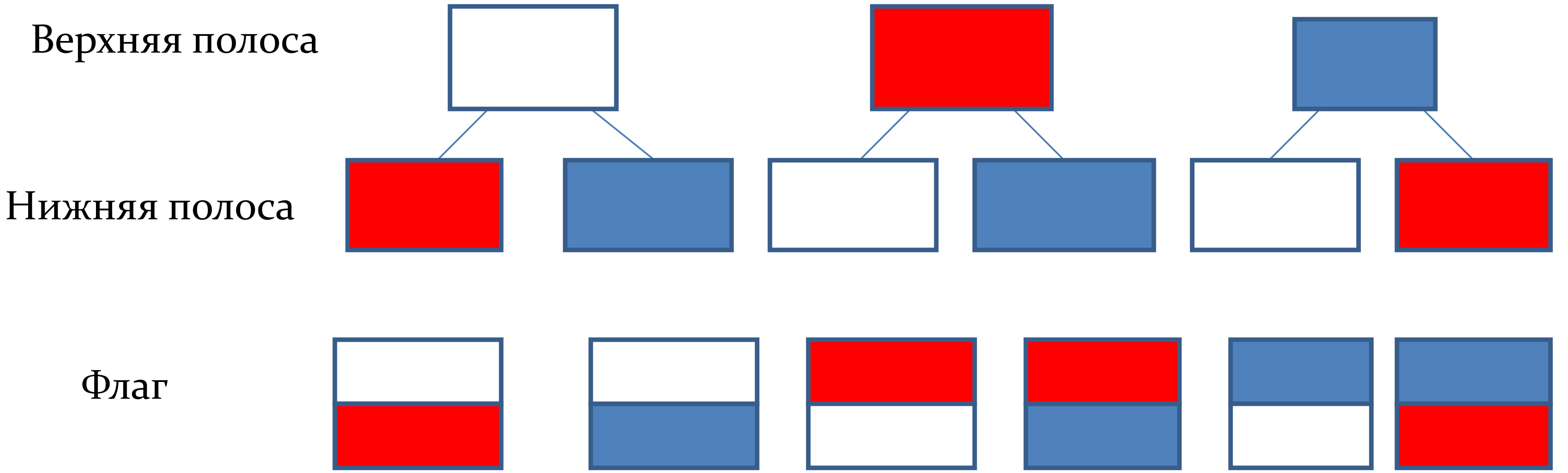
$$P_4 - P_3 = 4! - 3! = 18.$$

Правило умножения: Пусть объект А выбирается mm способами, объект В выбирается nn способами, то оба объекта можно выбрать mnmn способами.
Все очень просто – каждый из mm способов выбора объекта А комбинируется с каждым из nn способов выбора объекта В, то есть количество способов просто умножается друг на друга.

Задача 1

Государственные флаги многих стран состоят из горизонтальных или вертикальных полос разных цветов. Сколько могло бы быть различных государственных флагов, состоящих из двух горизонтальных полос одинаковой ширины и разного цвета – белого, красного и синего?

Решение.



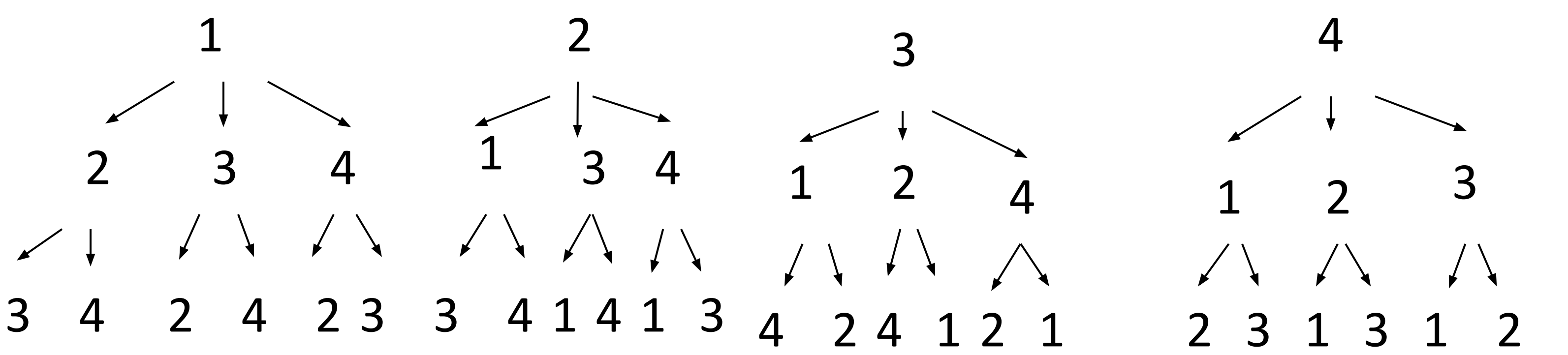
Ответ: 6 флагов

Способ решения - перебор всевозможных вариантов

Задача 2.

Из цифр 1, 2, 3, 4 необходимо составить шифр в виде трёхзначного числа так, чтобы каждая цифра встречалась только один раз. Сколькими способами можно составить такой шифр?

Решение.



123, 124, 132, 134, 142, 143, 213, 214, 231, 234, 241, 243, 312, 314, 321, 324, 341, 342, 412, 413, 421, 423, 431, 432.

Полученная схема - дерево возможных вариантов или древо графов

Второй способ решения.

Первую цифру можно выбрать четырьмя способами. Так как после выбора первой цифры останутся три, то вторую цифру можно выбрать уже тремя способами. Наконец, третью цифру можно выбрать (из оставшихся двух) двумя способами. Следовательно, общее число искомых трехзначных чисел равно произведению

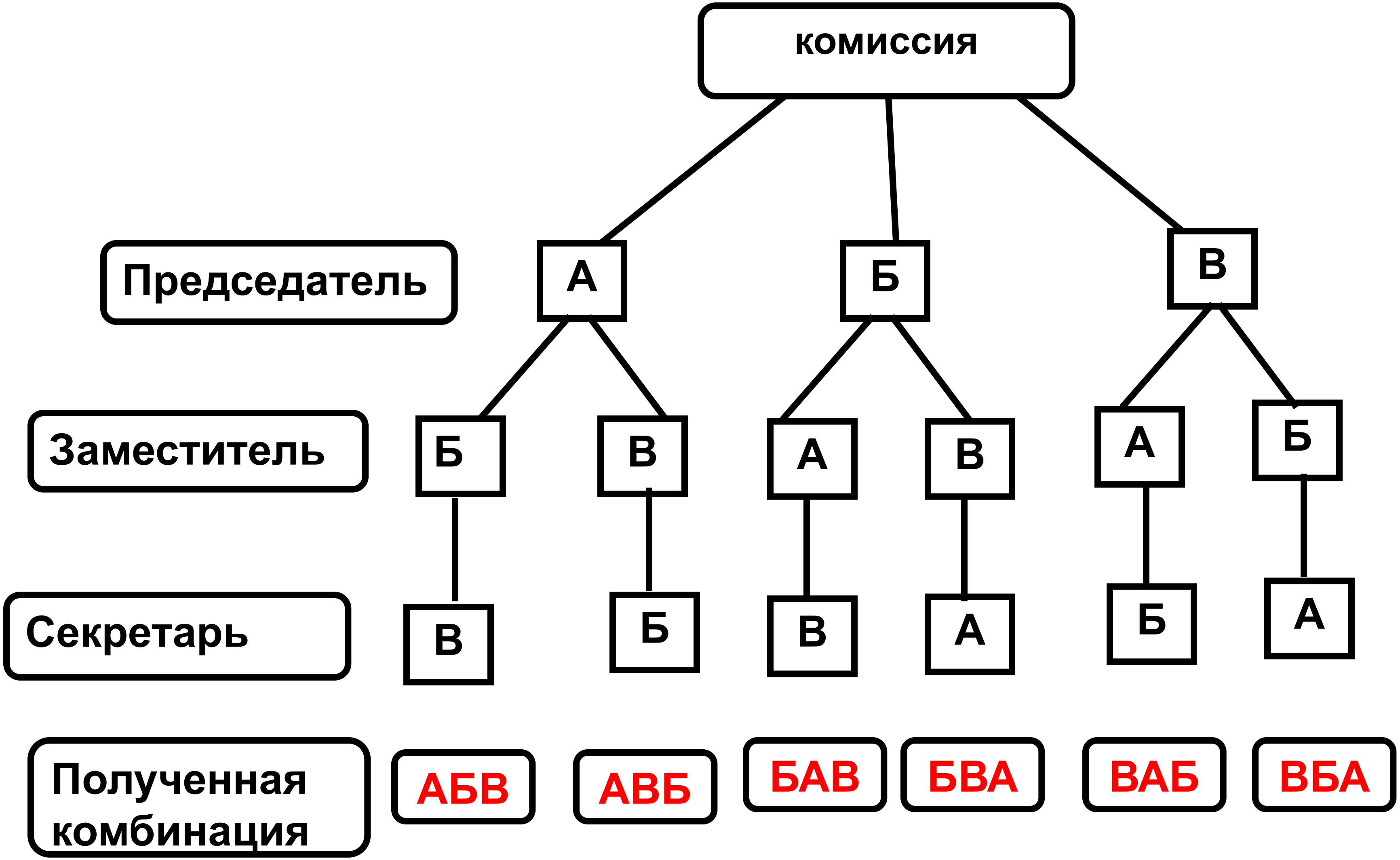
$\mathbf{4 \cdot 3 \cdot 2} = 24$

комбинаторное правило умножения

Пусть имеется $\boldsymbol{n}$ *элементов и требуется выбрать из них один за другим* $\boldsymbol{k}$ *элементов. Если первый элемент можно выбрать* $\boldsymbol{n_1}$ *способами, после чего второй элемент можно выбрать* $\boldsymbol{n_2}$ *способами из оставшихся, затем третий элемент можно выбрать* $\boldsymbol{n_3}$ *способами из оставшихся и т. д., то число способов, которыми могут быть выбраны все* $\boldsymbol{k}$ *элементов, равно произведению* $\boldsymbol{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k}$.

Собрание для проведения тайного голосования во важному вопросу избрало счетную комиссию, в состав которой вошли Антонов, Борисова и Ващенко. Члены счётной комиссии должны распределить обязанности: председатель, заместитель, секретарь. Сколькими способами они могут это сделать?

председатель	заместитель	секретарь
Антонов	Борисова	Ващенко.
Антонов	Ващенко	Борисова
Борисова	Антонов	Ващенко
Борисова	Ващенко	Антонов
Ващенко	Борисова	Антонов
Ващенко	Антонов	Борисова


комиссия
Председатель
А
Б
В
Заместитель
Б
В
А
В
А
Б
Секретарь
В
Б
В
А
Б
А
Полученная комбинация
АБВ
АВБ
БАВ
БВА
ВАБ
ВБА