

11.6. Интегрирование некоторых видов иррациональностей

В ряде случаев замена переменной позволяет свести интегралы от иррациональных функций к интегралам от рациональных.

Пусть $R(u, v)$ – функция от переменных u, v и некоторых постоянных, которая построена с использованием всего четырех действий: сложения, вычитания, умножения и деления, например:

$$R(u, v) = u^2 + \frac{5}{v}$$

Интегралы вида:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{x}\right) dx$$

Замена переменной:

$$t = \sqrt[n]{x}$$

Пример.

Вычислить интеграл:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$$

Решение

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt[6]{x} \\ x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{6t^5}{t^3 + t^2} dt =$$

$$= 6 \int \frac{t^3}{t+1} dt = \left| \begin{array}{l} t+1 = u \\ dt = du \end{array} \right| = 6 \int \frac{(u-1)^3}{u} du =$$

$$= 6 \int \frac{u^3 - 3u^2 + 3u - 1}{u} du =$$

$$= 6 \int u^2 du - 18 \int u du + 18 \int du - 6 \int \frac{1}{u} du =$$

$$= 2u^3 - 9u^2 + 18u - 6 \ln|u| + C =$$

$$= 2(t+1)^3 - 9(t+1)^2 + 18(t+1) - 6 \ln|t+1| + C =$$

$$= 2(\sqrt[6]{x} + 1)^3 - 9(\sqrt[6]{x} + 1)^2 + 18(\sqrt[6]{x} + 1) - 6 \ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C$$

Интегралы вида:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

Замена переменной:

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

Пример.

Вычислить интеграл:

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{1+x} dx$$

Решение

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{1+x} dx = \left| \begin{array}{ll} t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} & x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} & 1+x = \frac{2}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int t \cdot \frac{\cancel{1+t^2}}{2} \cdot \left(-\frac{4t}{(1+t^2)^{\cancel{2}}} \right) dt =$$

$$= -2 \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = -2 \int \frac{(t^2+1)-1}{1+t^2} dt =$$

$$= -2 \int \frac{\cancel{(t^2 + 1)}}{\cancel{1 + t^2}} dt + 2 \int \frac{1}{1 + t^2} dt =$$

$$= -2t + 2 \operatorname{arctgt} t + C =$$

$$= -2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C$$

Интегралы вида:

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

Под корнем выделяется полный квадрат и делается линейная замена переменной, так что интеграл сводится к виду:

$$\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ex^2 + f}} dx = M \underbrace{\int \frac{x}{\sqrt{ex^2 + f}} dx}_1 + N \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{ex^2 + f}} dx}_2$$

Для нахождения первого интеграла делается замена:

$$t = ex^2 + f$$

Тогда

$$\int \frac{x}{\sqrt{ex^2 + f}} dx = \left| \begin{array}{l} ex^2 + f = t \\ dt = 2ex dx \end{array} \right| = \frac{1}{2e} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt =$$

$$= \frac{1}{e} \sqrt{t} + C = \frac{1}{e} \sqrt{ex^2 + f} + C$$

Второй интеграл при $e \cdot f > 0$ будет табличным:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$$

а при $e \cdot f < 0$ будет табличным:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

Примеры.



Вычислить интеграл:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx$$

Решение

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{(x+2)^2 + 1}} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x+2 = t \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{t-2}{\sqrt{t^2 + 1}} dt =$$

$$= \int \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} dt - 2 \int \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t^2 + 1 = u \\ du = 2t dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du - 2 \ln|t + \sqrt{t^2 + 1}| =$$

$$= \sqrt{u} - 2 \ln|t + \sqrt{t^2 + 1}| + C =$$

$$= \sqrt{t + 1} - 2 \ln|t + \sqrt{t^2 + 1}| + C =$$

$$= \sqrt{x + 2 + 1} - 2 \ln|x + 2 + \sqrt{(x + 2)^2 + 1}| + C$$



2

Вычислить интеграл:

$$\int \frac{x}{\sqrt{8 + 4x - 4x^2}} dx$$

Решение

$$\int \frac{x}{\sqrt{8+4x-4x^2}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{9-(1-2x)^2}} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 1-2x=t \\ dt = -2dx \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1-t}{2}}{\sqrt{9-t^2}} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) dt =$$

$$= -\frac{1}{4} \int \frac{1-t}{\sqrt{9-t^2}} dt =$$

$$= -\frac{1}{4} \int \frac{1}{\sqrt{9-t^2}} dt + \frac{1}{4} \int \frac{t}{\sqrt{9-t^2}} dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 9 - t^2 = u \\ du = -2t dt \end{array} \right| = -\frac{1}{4} \arcsin \frac{t}{3} - \frac{1}{8} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du =$$

$$= -\frac{1}{4} \arcsin \frac{t}{3} - \frac{1}{4} \sqrt{u} + C =$$

$$= -\frac{1}{4} \arcsin \frac{t}{3} - \frac{1}{4} \sqrt{9 - t^2} + C =$$

$$= -\frac{1}{4} \arcsin \frac{1-2x}{3} - \frac{1}{4} \sqrt{9 - (1-2x)^2} + C$$