

Введение в математическое
моделирование
организационно-экономических и
технических систем

Дисциплина
«Моделирование систем»

Общие понятия

- **Моделирование** - это изучение объекта путем построения и исследования его модели, осуществляемое с определенной целью и состоит в замене эксперимента с оригиналом экспериментом на модели.
- Необходимым условием моделирования является **подобие** объекта и его модели.

Цели и задачи моделирования:

- **Оптимальное проектирование** новых и **интенсификация** действующих процессов .
- **Контроль** за ходом процесса, получение необходимой информации о нем и обработка полученной информации с целью **управления** деятельностью организации.
- Решение задач **исследования** объектов, где невозможно проводить активные эксперименты — макроэкономические системы, реакторы, космические объекты и т.д.
- Максимальное **ускорение переноса результатов исследований** в промышленные масштабы.

Требования к модели:

- **Затраты** на создание модели должны быть значительно меньше затрат на создание оригинала.
- Должны быть четко определены **правила интерпретации результатов** вычислительного эксперимента.
- Основное требование - модель должна быть **существенной**, то есть отражать необходимые, существенные для решения конкретной задачи свойства объекта.

Классификация моделей

по способу
познания:

- житейские
- научные
- художественные
- символические
- формальные

по природе
моделей:

- знаковые
- научные
- алгебраические
- материальные
- естественные / физические
- предметные

Классификация моделей

- **Материальные модели** - уменьшенное (увеличенное) отражение оригинала с сохранением физической сущности (реактор - пробирка).



Классификация моделей



- **Мысленная модель** - отображение оригинала, отражающая существенные черты и возникающая в сознании человека в процессе познания.

ARХИТЕКТУРА ОРГАНИЗАЦИИ - The Casewise framework.						
Миссия, Видение, Основные ценности						
	Мотивация [Почему]	Процессы [Как]	Люди [Кто]	Местоположения [Где]	Данные [Что]	Время [Когда]
Область Контекстуальн	Список стратегических бизнес-целей	Список бизнес-процессов верхнего уровня	Список основных типов организационных единиц	Список местоположений организации	Список важных для бизнеса данных	Список важных для бизнеса событий
(Планирование)						
Организационно- Бизнесовый	Бизнес-план	(BPM) Модель динамики бизнес-процессов	Организационная структура, основанная на ролях	Система бизнес-единиц	Концептуальная модель данных	Основные планы / Временные диаграммы
(Взаимодействие)						
Модель системы: Логическая	Отчет о всех событиях и результатах уровня SCM	(BEM) Модель динамики бизнес-функций	Фактическая организационная структура и матрица	Логическая модель сети	Логическая модель данных	Имитация модели динамики системы
(Трансформация)						
Модель, технологично- Финансовая	Отчет о всех событиях и результатах уровня FEM	(FEM) Модель динамики функций - связи с логическими системами	Матрицы "Орг. единицы / Структуры"	Детальная архитектура технологий	Финансовая модель данных	Имитация модели динамики функций
(Реализация)						
Детальная Финансово- Высококонтекстная	Например, Голубой план Финансовый (система умовозв.)	Например, клиентский процесс, структура умовозв.	Например, ИТ-факты и системы	Например, Фактически сеть и местоположения	Например, банк данных	Например, моделирование цикла поставок...
(Субоптимизация)						

$$\frac{d(T_s - T_0)}{dt} = \frac{2}{c_T \rho_T \lambda_T} q_{\Sigma}^2 + \frac{2Q}{c_T} (1 - \eta_s) (T_s - T_0) k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT_s}\right)$$

$$\frac{d\eta_s}{dt} = (1 - \eta_s) (T_s - T_0) k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT_s}\right)$$

Начальные условия:
 $T_s(\tau=0) = T_0, \quad \eta_s(\tau=0) = 0, \quad q_{\Sigma} = \bar{\alpha}(T_s - T_1)$

Средний коэффициент теплообмена

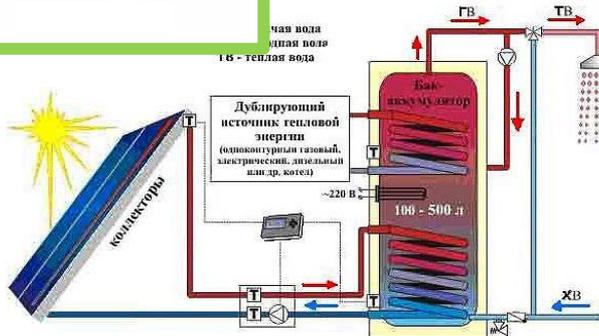
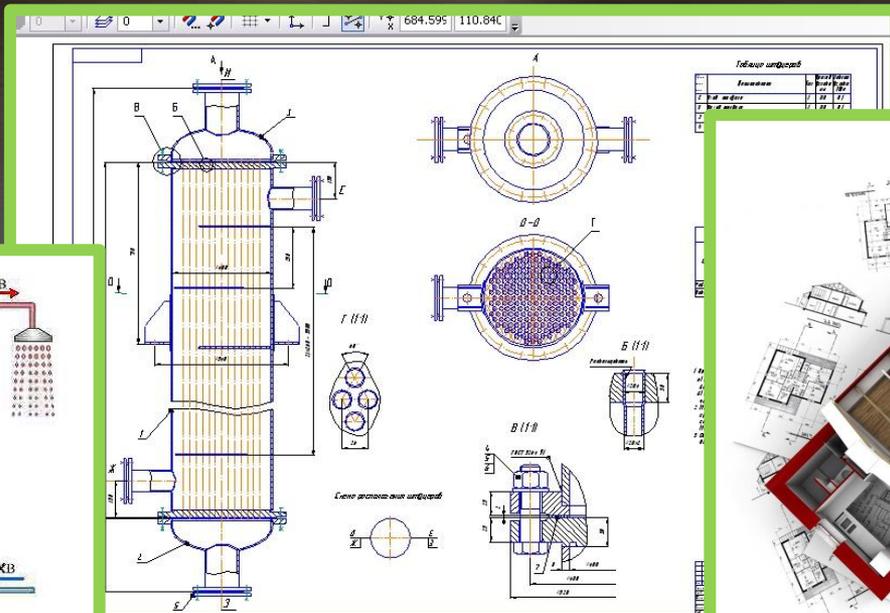
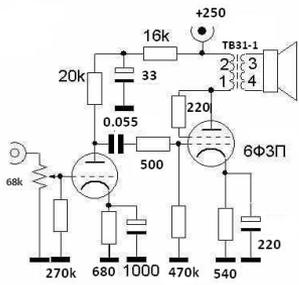
В зоне ускоренного течения ($0 < \tau^* < 1$)

$$\bar{Nu}_0 = \frac{\bar{\alpha} d_0}{\lambda} = \frac{1}{\pi R_+^2} \int_0^{R_+} 2 \pi u_0 r_+ dr_+$$

$$\bar{Nu} = \frac{2.16 \left(\frac{Pr_+}{\bar{t}_0}\right)^{1/2} Pr_+^{1/2} Re_0^{1/2}}{R_+^2} \left[1 - \left(1 - 0.33 R_+^2\right)^{2.2}\right]$$

Классификация моделей

- **Образные модели** носят описательный характер.
- **Знаковые модели** - являются математическими описаниями процессов, явлений, объектов и обычно называются математическими моделями. Знаковые модели могут также включать в себя схемы и чертежи



Физическое моделирование

- **Физическое моделирование** - это метод исследования на моделях, которые имеют одинаковую физическую природу с объектом моделирования, т.е. представляют собой некоторый макет изучаемого объекта.
- Физические модели воспроизводят весь комплекс свойств изучаемых явлений.
- В физическом моделировании важную роль играет теория подобия.

Физическое моделирование

Достоинства метода физического моделирования:

- наглядность, т. к. физическая модель воспроизводит практически все стороны исследуемого оригинала;
- возможно изучение процесса без составления его математического описания;
- возможность воспроизведения производственного процесса в лабораторных условиях.

Физическое моделирование

Недостатки метода физического моделирования:

- отсутствие универсальности, т.к. для каждого нового процесса необходимо создавать новую модель;
- высокая стоимость моделей для исследования сложных процессов;
- невозможность применения этого метода для моделирования большей части экономических процессов, а также других сложных объектов.

Математические модели

- **Математическая модель** - совокупность математических зависимостей, отражающая в явной форме сущность объекта, процесса или явления, т.е. все существенные параметры исследуемого объекта связаны системой математических уравнений.

Математические модели

- **Математическая модель** - совокупность математических зависимостей, отражающая в явной форме сущность объекта, процесса или явления, т.е. все существенные параметры исследуемого объекта связаны системой математических уравнений.
- **Математическое моделирование** - это важнейший метод современного научного исследования, основной аппарат системного анализа.
- **Математическое моделирование** - это изучение поведения объекта в тех или иных условиях путем решения уравнений его математической модели.

Математические модели

Математическое моделирование:

- - позволяет осуществить с помощью одного устройства (ЭВМ) решение целого класса задач, имеющих одинаковое математическое описание;
- - обеспечивает простоту перехода от одной задачи к другой, позволяет вводить переменные параметры, возмущения и различные начальные условия;
- - дает возможность проводить моделирование по частям («элементарным процессам»), что особенно существенно при исследовании сложных объектов;
- экономичнее метода физического моделирования как по затратам, так и по стоимости.

Этапы построения математических моделей

- 1) построение математического описания;
- 2) исследование математической модели;
- 3) принятие оптимальных решений.

Этапы построения математических моделей

1) Построение модели в общем случае включает:

- составление математического описания;
- решение уравнений математического описания (аналитическое либо путем создания моделирующего алгоритма);
- проверку адекватности модели;
- окончательный выбор модели (при наличии нескольких моделей).

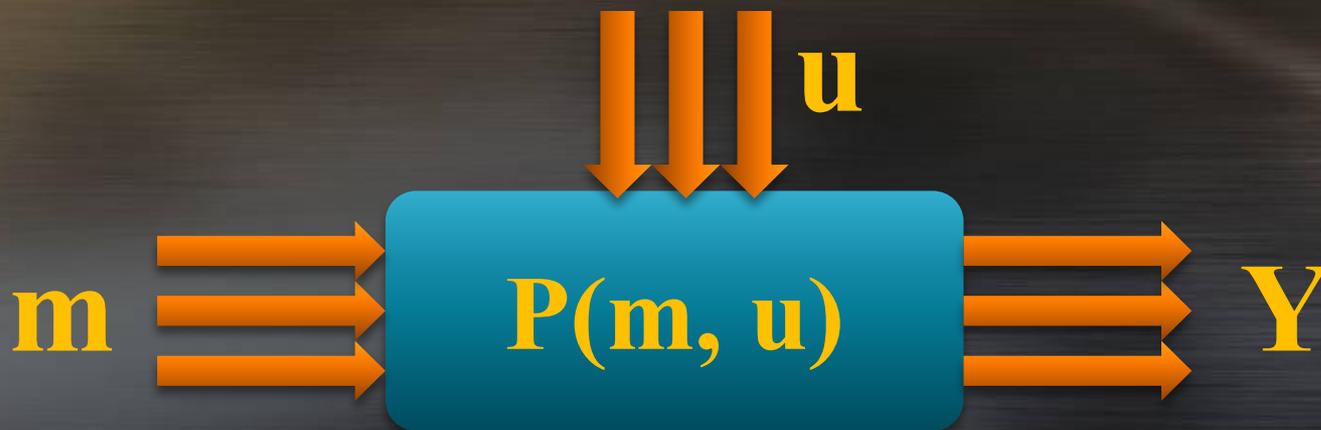
Классификация математических методов и моделей

Критерии классификации:

- I. Классификация по целям моделирования
- II. Классификация по принципам моделирования
- III. Классификация по критериям оценки
- IV. Классификация по условиям принятия решений
- V. Классификация решений по уровням или функциям управления
- VI. Классификация по управляемости системы
- VII. Классификация по фактору времени
- VIII. Классификация по степени абстрактности моделей
- IX. Классификация по виду используемых функций
- X. Классификация по дискретности
- XI. Классификация по степени учета вероятностных факторов

I. Классификация по целям

- **моделирование** Это разомкнутые модели, предполагающие построение описания объекта или процесса P , содержащего функциональные или алгоритмические связи между входами (m, u) и выходами Y . Входами являются внешние воздействия на объект (неуправляемые и управляемые), выходами - реакция объекта (процесса).

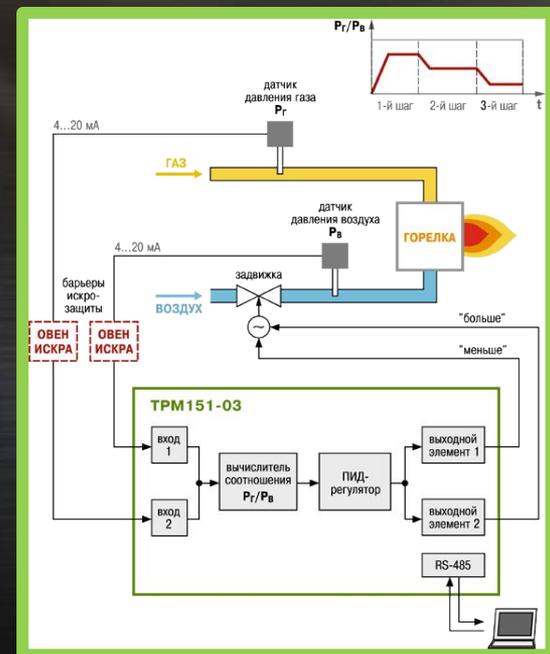


I. Классификация по целям

- **Моделирование** в этом случае на характеристики связей между входами и выходами объекта (процесса) накладываются укрупненные технологические или экономические характеристики, связывающие его с внешней средой, что позволяет оценить те или иные состояния комплекса «объект — орган управления — среда».
- С этой целью принято использовать целевые *функции управляемого объекта* (иногда *функции качества состояния*), это некоторая зависимость $G=G(m, u)$ (которая может быть векторной функцией G), где m - управляемые переменные; u – неуправляемые воздействия среды.

I. Классификация по целям

- **моделирование.** Предполагают постановку оптимизационной задачи, например, определить такое значение $m^* \in M$, которое обеспечивает максимум $G=G(m, u)$ при известном u . Множество альтернатив задается ограничениями $m \in M$ - допустимых значений управляемых переменных. Иногда известны только пределы изменения неуправляемых переменных



II. Классификация по принципам

• моделирования

- **кибернетические модели.** Предполагается более или менее точное знание структуры системы (объекта или процесса), оператор $Y=P(m, u)$ представляет собой функцию, систему уравнений (например обыкновенных дифференциальных, конечно-разностных или рекурсивных), автомат или какой-либо другой подходящий абстрактный объект-аналог исследуемой системы.
- При различных начальных условиях, внешних воздействиях (управляемых — m и неуправляемых — u) данные модели позволяют получить реакцию Y_c целью последующей оценки стратегий или оптимизации управления.

II. Классификация по принципам

- **моделирования**. Здесь применяется обратный подход - восстановление структуры систем (первоначально это - «черный ящик») по ее реакциям на внешние воздействия («справа налево»). Иногда такие операции называют идентификацией системы. Обычно это статистические методы, предполагающие наличие объективно обусловленной связи между m и Y , «зашумленной» случайными воздействиями u .

Эти методы многомерного статистического анализа включают:

- *корреляционный* анализ;
- *регрессионный* анализ;
- *дисперсионный* анализ;
- *факторный* анализ.

II. Классификация по принципам моделирования

Наблюдения за входами и выходами системы могут быть:

Пассивными

Пассивными называют модели, в которых не учитываются внутренние процессы системы, а только ее взаимодействие с окружающей средой. Такие модели используются для анализа поведения системы в целом, а не для изучения ее внутренней структуры.

Активными

Активными называют модели, в которых учитываются внутренние процессы системы, а не только ее взаимодействие с окружающей средой. Такие модели используются для изучения внутренней структуры системы и ее поведения в различных условиях.

III. Классификация по критериям

• **Оценки**

- Модели оценки и оптимизации предполагают использование некоторого **критерия** (или критериев) $G = G(m, u)$.
- **Критерий оптимальности** — показатель, выражающий меру экономического эффекта принимаемого решения для сравнительной оценки возможных решений (альтернатив) и выбора наилучшего из них.

III. Классификация по критериям

- **Оценки**
 - **Модели с векторным критерием оценки.** Критерий часто оказывается *векторным*, т. е. включает множество показателей, иногда противоречащих друг другу.
 - **Модели со скалярным критерием оценки.**

Многообразие критериев оценки создает ряд проблем, которые решаются двояко:

- один из критериев объявляется главным (глобальным), а все остальные используются в качестве ограничений (в этом обычно заключается постановка и решение задачи математического программирования);
- ставится задача скаляризации векторного критерия (приведения его к скаляру).

IV. Классификация по условиям принятия решений

- принятие решений в условиях **определенности**, если $G = G(m, u)$ известна и u - фиксирована (детерминированная модель объекта);
- принятие решений в условиях **риска**, здесь функция $G = G(m, u)$ известна, а внешние неуправляемые переменные ($u \in U$) являются случайными величинами с известными законами распределения (стохастическая, или вероятностная модель);
- принятие решений в условиях **конфликта**, $G = G(m, u)$ известна, $u \in U$ - выход враждебно настроенной системы (например, игровая модель),
- принятие решений в условиях **неопределенности** – $G = G(m, u)$ неточно известна или не полностью построена (формализована), либо нет информации об u или U .

V. Классификация решений по уровням или функциям управления

Принято выделять следующие уровни управления:

целеобразование (целеполагание) — определение цели системы (формально — целевой функции и ограничений);

организация — структурообразование, построение такой структуры системы, которая наилучшим образом удовлетворяет поставленным целям;

планирование — определение желаемого состояния системы и путей его достижения;

контроль — анализ отклонений реального протекания процесса от плановых характеристик.

V. Классификация решений по уровням или функциям управления

Данные уровни управления обладают следующими взаимными свойствами (при перемещении «снизу вверх»):



период принятия решения увеличивается;

задачи, решаемые на уровнях, становятся все более неопределенными и слабоформализуемыми;

VI. Классификация по управляемости системы

- **Организация** жестко регламентируется уставом и иерархией подчинения (идеальный образец этого — армия).
Экономические отношения здесь аттестуются коротко и ясно - коррупция и продажность.
- **Экономика**, наоборот, совокупность свободно взаимодействующих целеустремленных индивидов (идеальный пример здесь — рыночное взаимодействие мелких производителей в эпоху первоначального капитализма).
Организационные отношения здесь также нелицеприятно аттестуются - преступный сговор с целью установления высоких (низких) цен.
- В связи с этим целесообразно классифицировать модели и по данному принципу — **модели экономики** (децентрализация управления, диффузные, многосвязные, многоцелевые системы) и **модели организации** (централизация управления, одноцелевые системы).

VII. Классификация по фактору времени

- **Статические модели** или модели статических систем — предполагают, что переменные или координаты ее состояния на изучаемом отрезке времени остаются неизменными.
- **Динамические модели** — модели системы, которые изменяются во времени (в отличие от статической системы). Математически это принято выражать через переменные (координаты), изменяющиеся во времени. Процесс изменения характеризуется траекторией (т. е. наборами координат, каждая из которых является функцией времени).

VIII. Классификация по степени абстрактности моделей

- **Аналитические модели** представляют собой некоторые математические соотношения, выраженные в общей форме, предполагающие аналитический метод решения, поиски максимума, интегрирования дифференциального уравнения или систем, исследования на устойчивость и пр.
- **Вычислительные модели.** Предполагают использование вычислительных средств для решения аналитических моделей высокой размерности или с использованием функций, которые удобнее представлять в табличной форме (кусочно-постоянная или кусочно-линейная аппроксимация), нежели аналитически. Используют численные методы (интегрирования дифференциальных уравнений, поиска экстремумов, решения систем уравнений и пр.). Являются переходными к имитационным моделям.

VIII. Классификация по степени абстрактности моделей

- **Имитационные модели.** Реализация наиболее сложных и громоздких алгоритмов описания сложных систем, включающих случайные процессы, дифференциальные, конечно-разностные, интегральные и рекурсивные уравнения.
- Фактически, это экспериментальный метод изучения объекта с помощью ЭВМ.
- Процесс имитации заключается в следующем: сначала строится математическая модель изучаемого объекта (имитационная модель), затем эта модель преобразуется в программу для ЭВМ. В машину вводятся необходимые данные и ведется наблюдение за тем, как изменяются интересующие исследователя показатели: они подвергаются анализу, в частности статистической обработке.

VIII. Классификация по степени абстрактности моделей

- **Статистическое моделирование** — разновидность имитационного моделирования, способ исследования процессов поведения вероятностных систем в условиях, когда неизвестны внутренние взаимодействия в этих системах.
- Заключается в машинной имитации изучаемого процесса, который как бы копируется на вычислительной машине со всеми сопровождающими его случайностями; используется главным образом при решении задач исследования операций, в анализе производственной деятельности.
- Один из наиболее распространенных *методов статистических испытаний* — *метод Монте-Карло*. Смысл метода Монте-Карло состоит в том, что исследуемый процесс моделируется путем многократных повторений его случайных реализаций. Единичные реализации называются статистическими испытаниями — отсюда второе название метода.

IX. Классификация по виду используемых функций

- **Линейные модели** — тип моделей, в основе которых лежат линейные зависимости, связывающие вход системы с выходом или целевую функцию с выходными переменными.
- В прикладных математических моделях, линейные зависимости обычно вводятся для упрощения модели путем замены реально наблюдаемых нелинейных зависимостей (линеаризация).
- К линейным прежде всего относятся методы и модели линейного программирования.
- **Нелинейные модели.** В данном типе моделей либо учитываются действительные нелинейные связи между факторами или переменными, либо используются более реалистичные, нежели линейные, методы аппроксимации нелинейных зависимостей (квадратичные, логарифмические, показательные функции).

Х. Классификация по дискретности

- **Дискретные модели** относятся к системам, все элементы которых, а также связи между ними (т. е. обращающаяся в системе информация) имеют дискретный характер. Следовательно, все параметры такой системы дискретны.
- **Непрерывные модели.** Противоположное понятие — непрерывная система. Однако деление систем на непрерывные и дискретные во многом произвольно, зависит от цели и глубины исследования. Часто непрерывные системы приводятся к дискретным (при этом непрерывные параметры представляются как дискретные величины путем введения разного рода шкал, балльных оценок и т. п.).
- Дискретные системы изучаются с помощью аппарата теории алгоритмов и теории автоматов. Их поведение может описываться с помощью разностных уравнений.

XI. Классификация по степени учета вероятностных факторов

- **Детерминированные модели.** В данном типе моделей либо полностью известны все функциональные зависимости, либо неизвестными влияниями можно пренебречь без особой потери в точности результатов. Классический пример — модели небесной механики.
- **Вероятностные (стохастические) модели** — такие математические модели, в которых параметры, условия функционирования и характеристики состояния моделируемого объекта представлены случайными величинами и связаны стохастическими (т. е. случайными, нерегулярными) зависимостями, либо исходная информация также представлена случайными величинами. Следовательно, характеристики состояния в модели определяются не однозначно, а через законы распределения их вероятностей. При этом реалистичнее, чем при детерминированном подходе, отражаются процессы, которые, как правило, имеют вероятностный (стохастический) характер.

Требования к математическим моделям

- **Адекватность.** Модель считается адекватной, если отражает заданные свойства с приемлемой точностью.
- **Точность** определяется как степень совпадения значений выходных параметров модели и объекта.
- **Универсальность** - определяется в основном числом и составом учитываемых в модели внешних и выходных параметров.
- **Экономичность** модели характеризуется затратами вычислительных ресурсов для ее реализации - затратами машинного времени и памяти.
- **Простота** – модель должна описывать объект как можно более простым уравнением или системой уравнений, обеспечивая заданную точность.
- **Дешевизна** – стоимость построения и исследования модели должна быть ниже стоимости исследования оригинала (если такое исследование возможно).