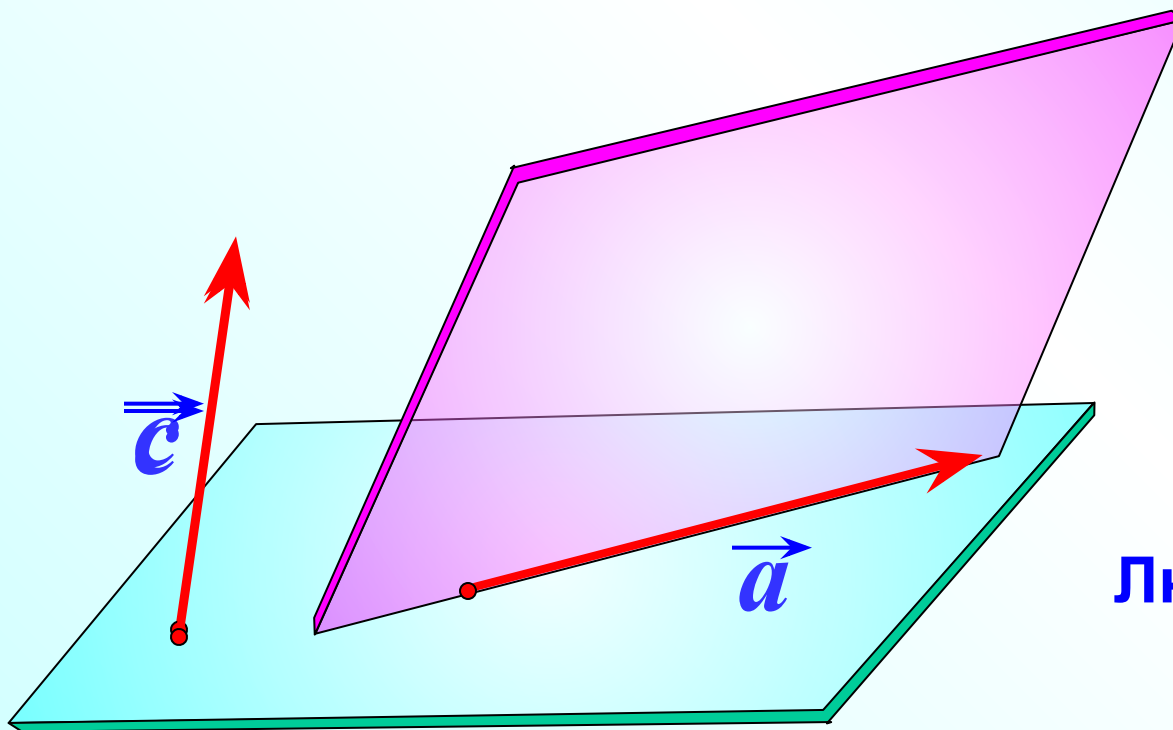


Компланарные векторы

Л.С. Атанасян "Геометрия 10-11"

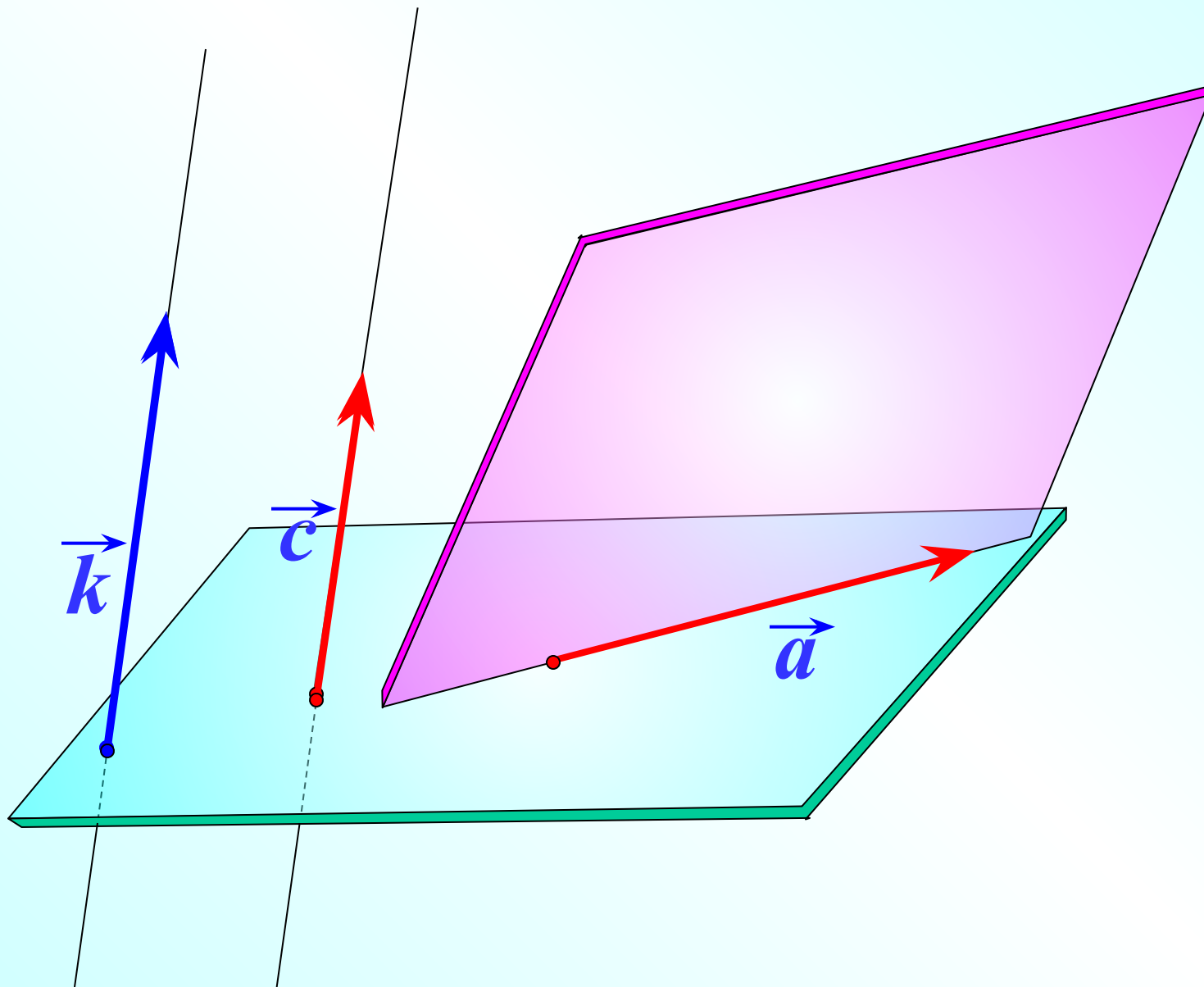
Векторы называются **компланарными**, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.

Другими словами, векторы называются **компланарными**, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.

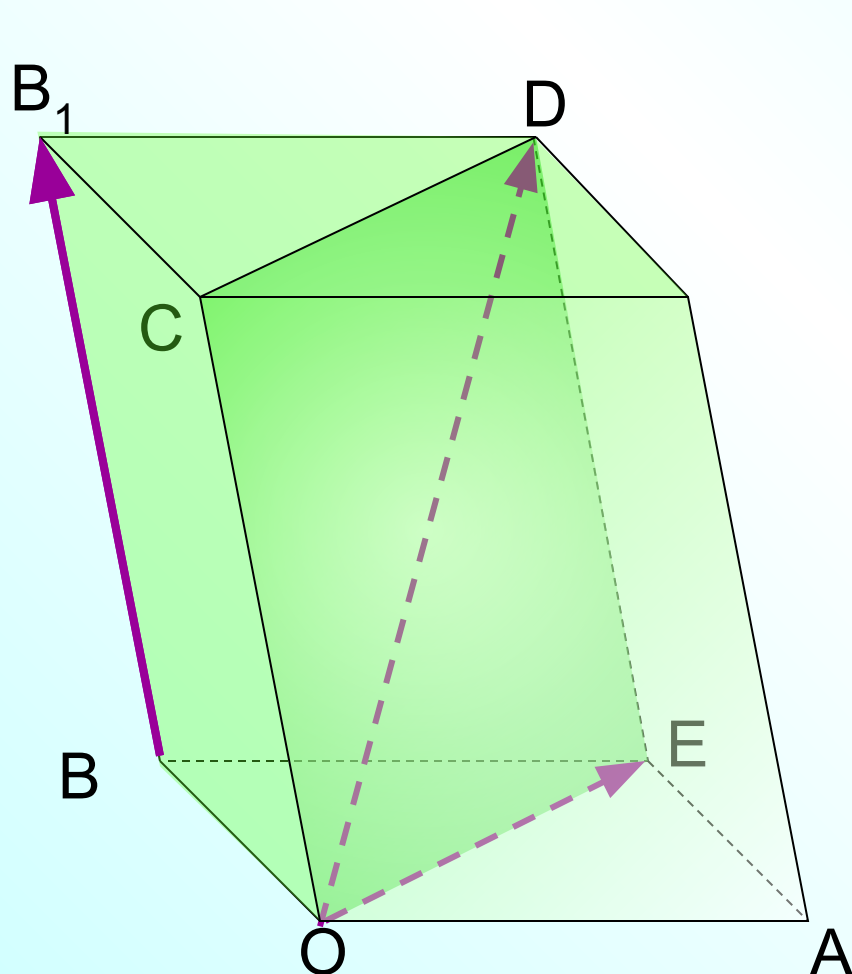


Любые два вектора
компланарны.

Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, также компланарны.



Три произвольных вектора могут быть как компланарными, так и не компланарными. На рисунке изображен параллелепипед.

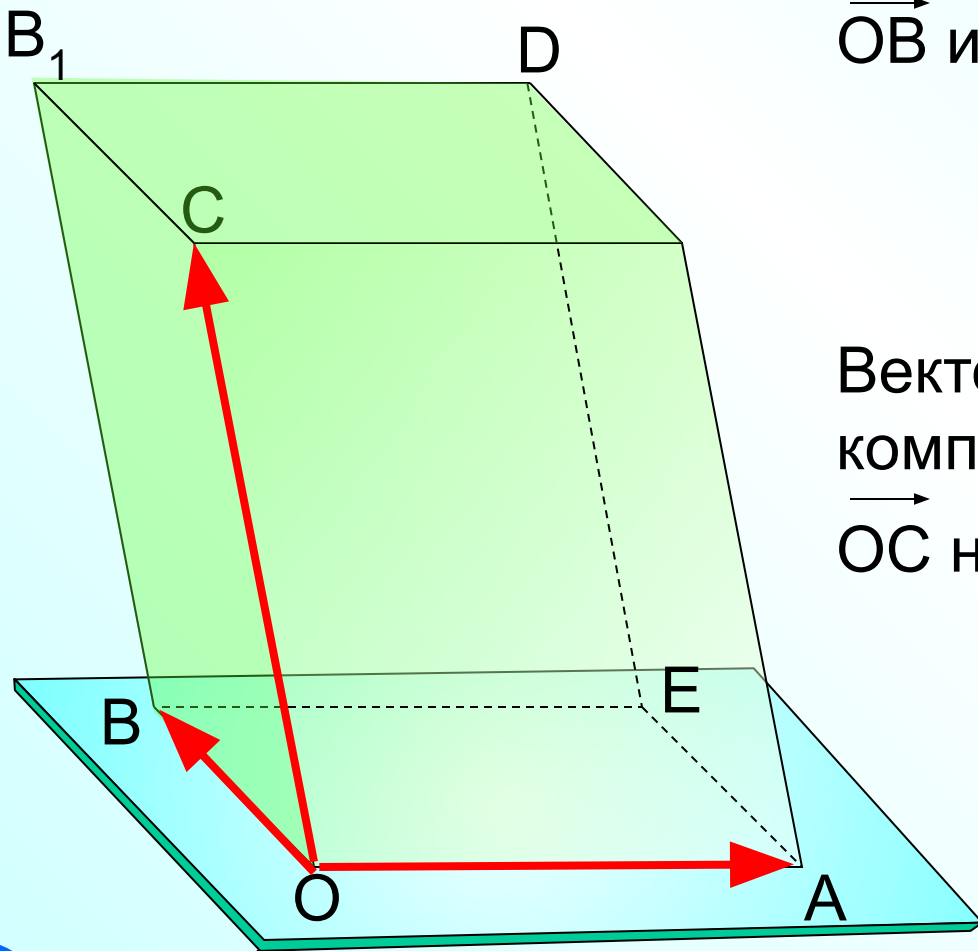


Являются ли векторы $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$ компланарными?

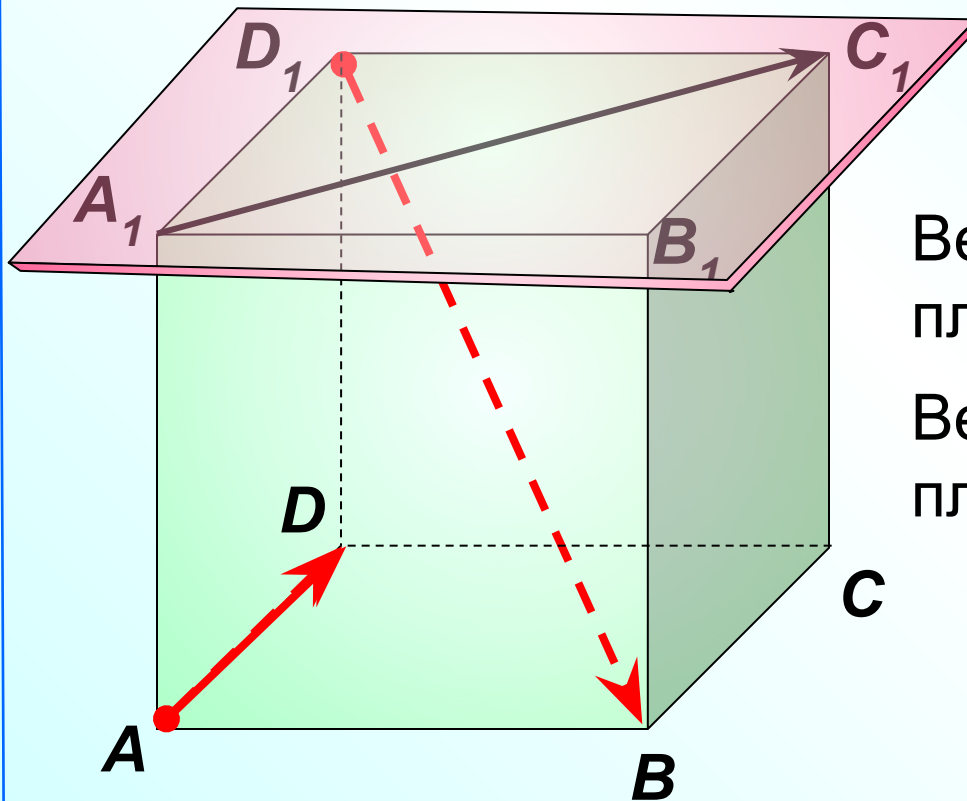
Три произвольных вектора могут быть как компланарными, так и не компланарными. На рисунке изображен параллелепипед.

Являются ли векторы $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$ компланарными?

Векторы $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$ не компланарны, так как вектор $\vec{OC}$ не лежит в плоскости OAB .



Являются ли векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{D_1B}$ компланарными?



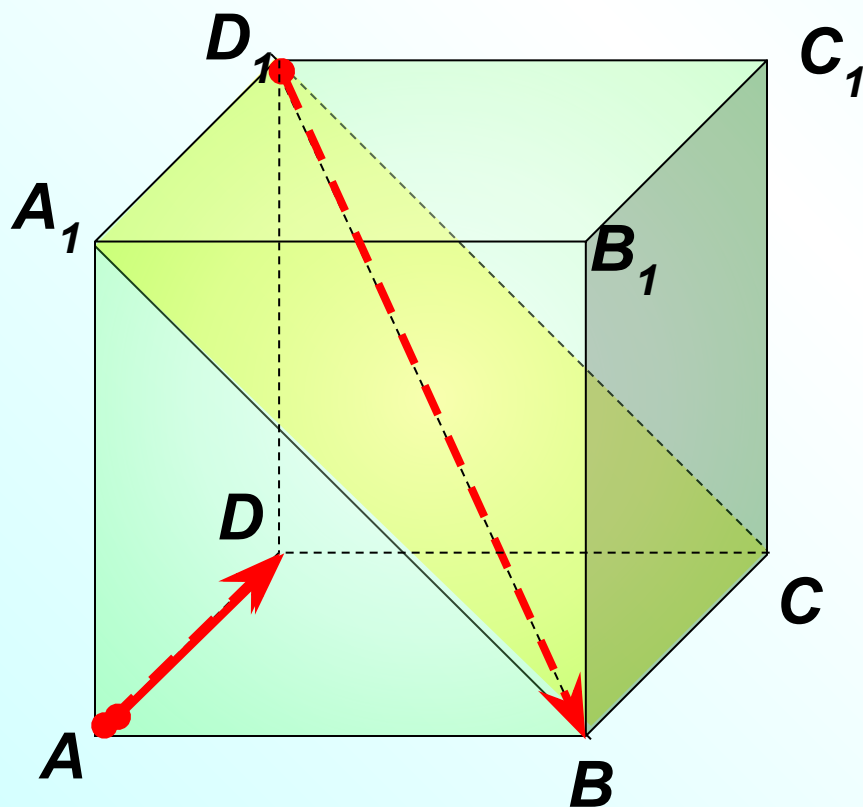
Векторы $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$ лежат в плоскости $A_1D_1C_1$.

Вектор $\overrightarrow{D_1B}$ не лежит в этой плоскости.

Векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{D_1B}$ не компланарны.

Являются ли векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{D_1B}$ компланарными?

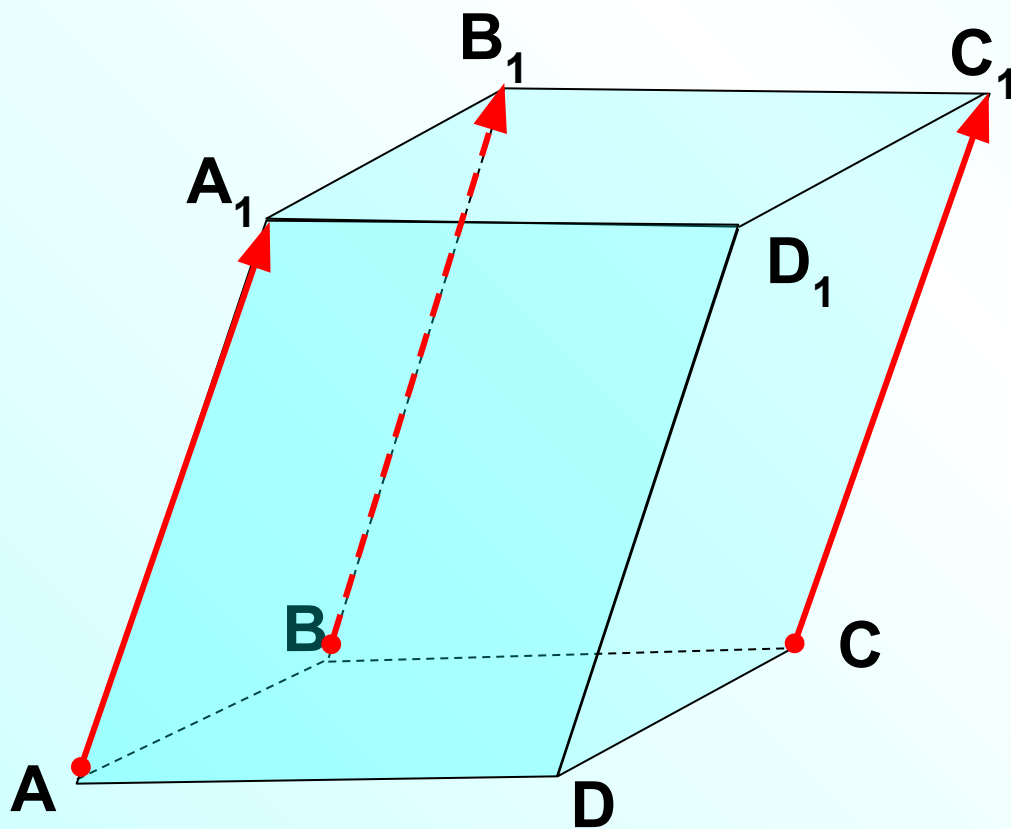
Любые два вектора компланарны.



№355 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$.
Компланарны ли векторы?

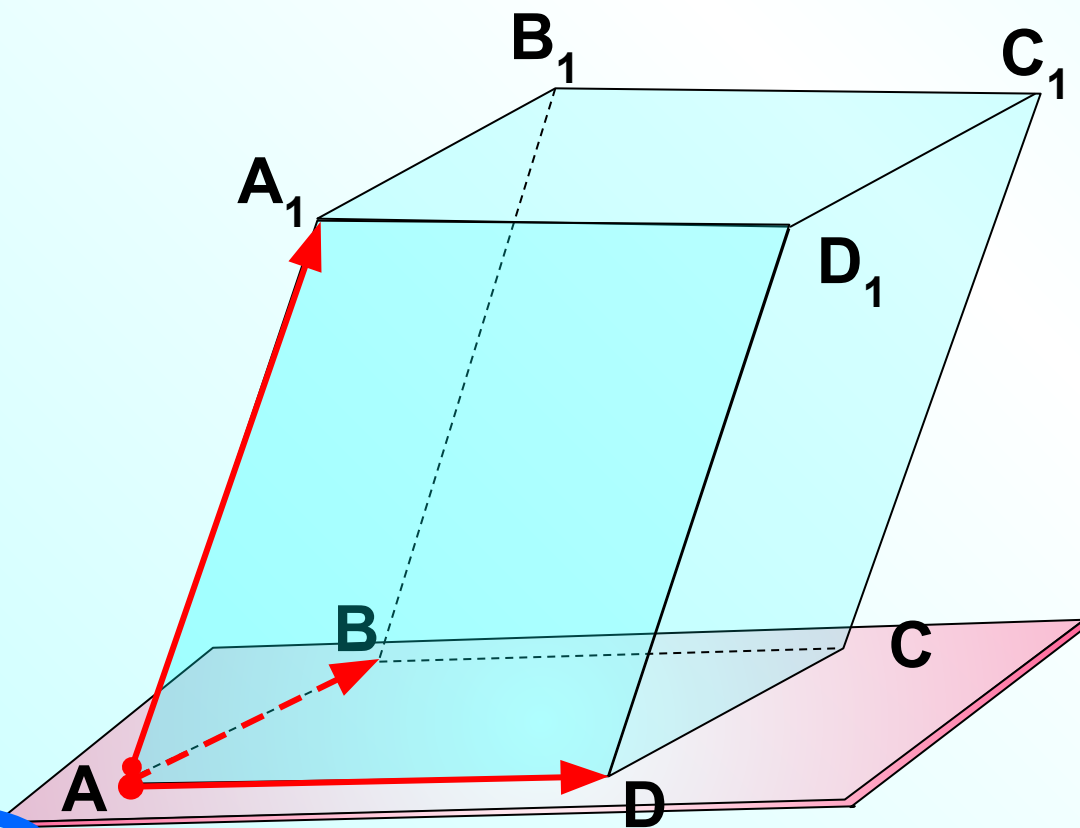
$\vec{AA_1}$, $\vec{CC_1}$, $\vec{BB_1}$

Три вектора, среди которых имеются
два коллинеарных, компланарны.



№355 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$.
Компланарны ли векторы?

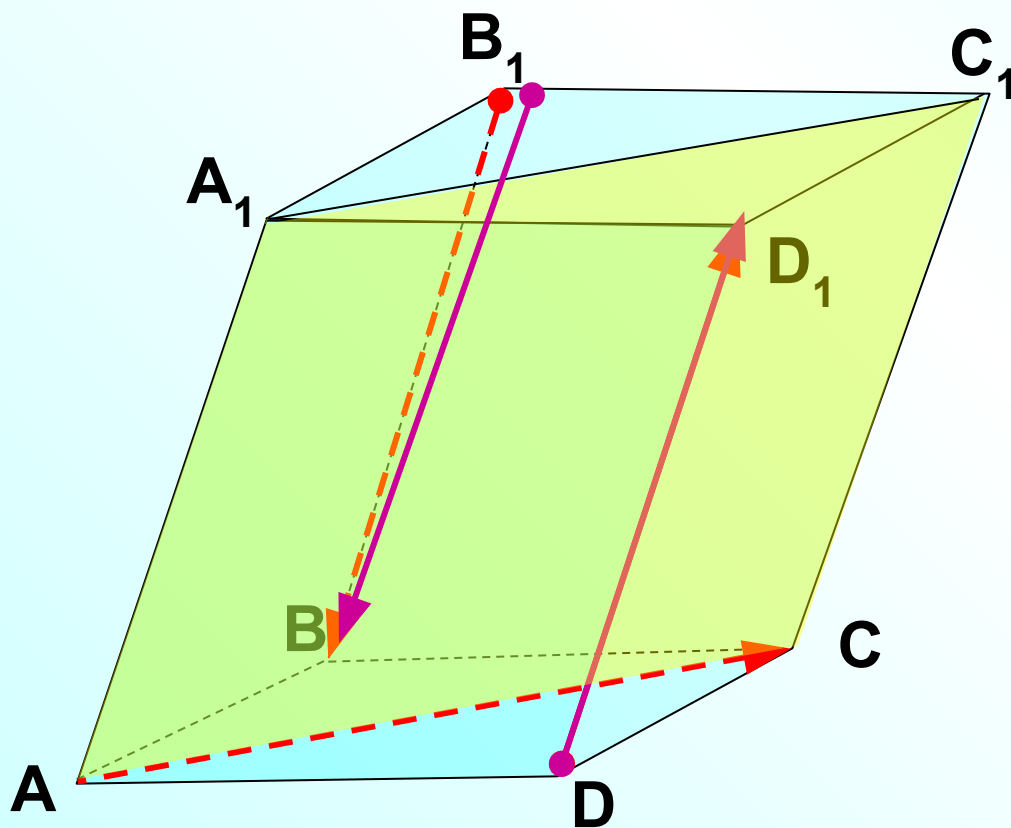
$\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AA_1}$ Векторы $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ и $\vec{AA_1}$ не компланарны, так как вектор $\vec{AA_1}$ не лежит в плоскости ABC .



№355 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$.
Компланарны ли векторы?

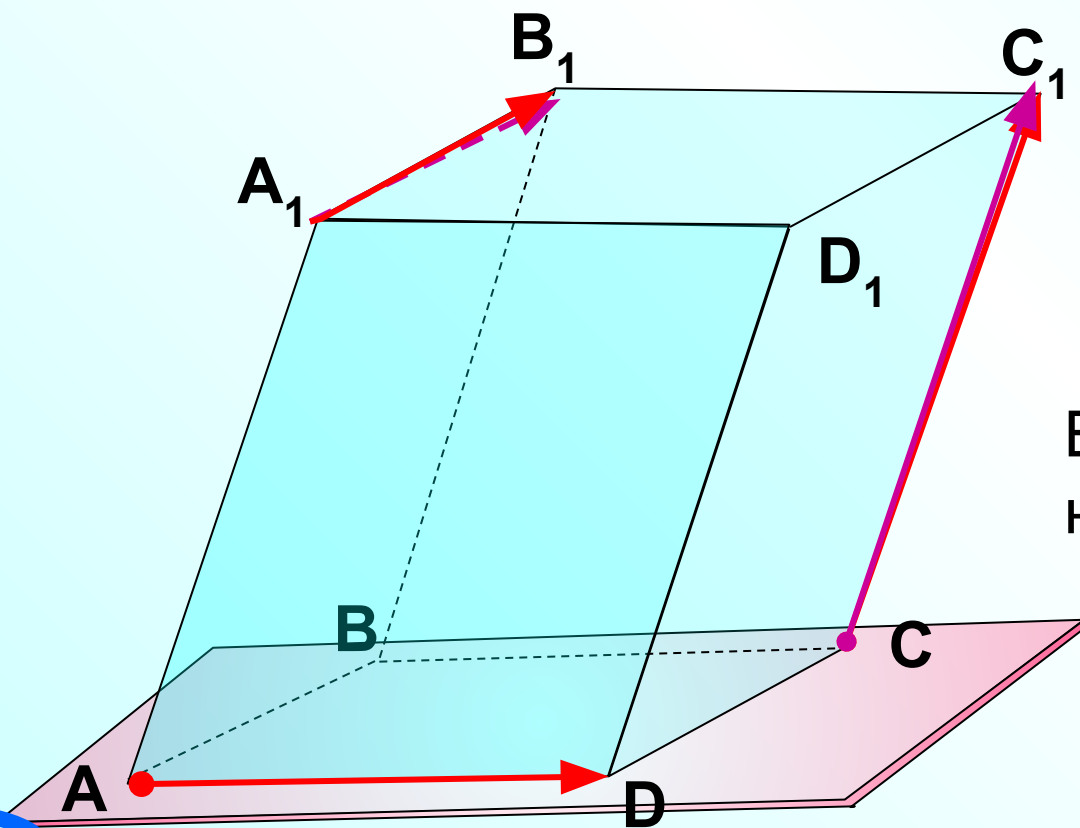
$\overrightarrow{B_1B}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DD_1}$

**Три вектора, среди которых имеются
два коллинеарных, компланарны.**



№355 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$.
Компланарны ли векторы?

$\vec{AD}$, $\vec{CC_1}$, $\vec{A_1B_1}$ Векторы $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ и $\vec{AA_1}$ не компланарны, так
как вектор $\vec{AA_1}$ не лежит в плоскости ABC .



Векторы $\vec{AD}$, $\vec{CC_1}$, $\vec{A_1B_1}$
не компланарны

Любые два вектора компланарны.

Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, также компланарны.

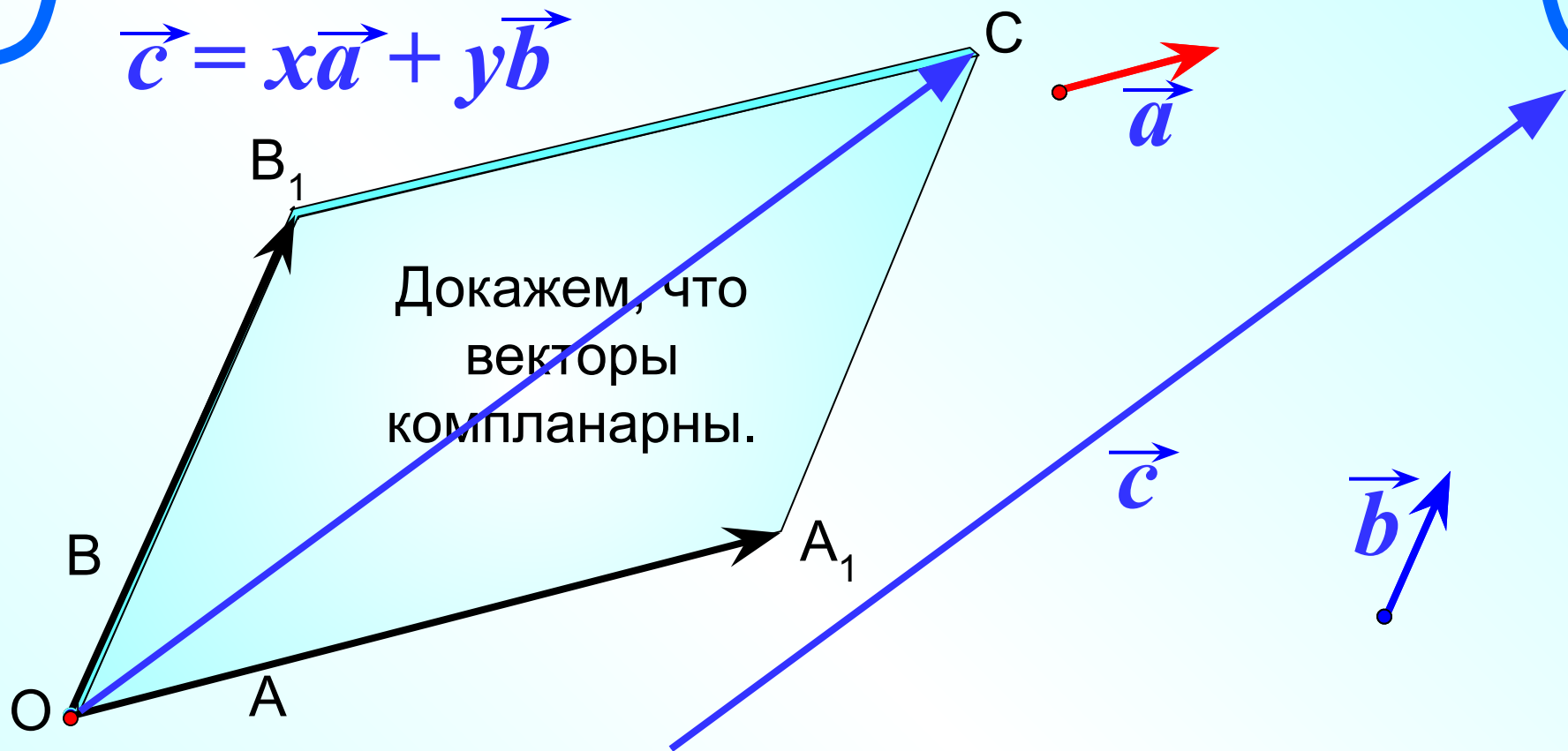
Признак компланарности

Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам

$\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. представить в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$

где x и y – некоторые числа, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$



Векторы $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ лежат в одной плоскости OAB .

$$\vec{OA_1} = x \vec{OA} \quad \vec{OB_1} = y \vec{OB}$$

Векторы $\vec{OA_1}$ и $\vec{OB_1}$ также лежат плоскости OAB .

А следовательно, и их сумма – вектор $\vec{OC} = x \vec{OA} + y \vec{OB}$,
равный вектору $\vec{c}$.

Справедливо и обратное утверждение.

Признак компланарности

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам

$\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. представить в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$

разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где x и y – некоторые числа, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$

компланарны. $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, причем

коэффициенты разложения определяются

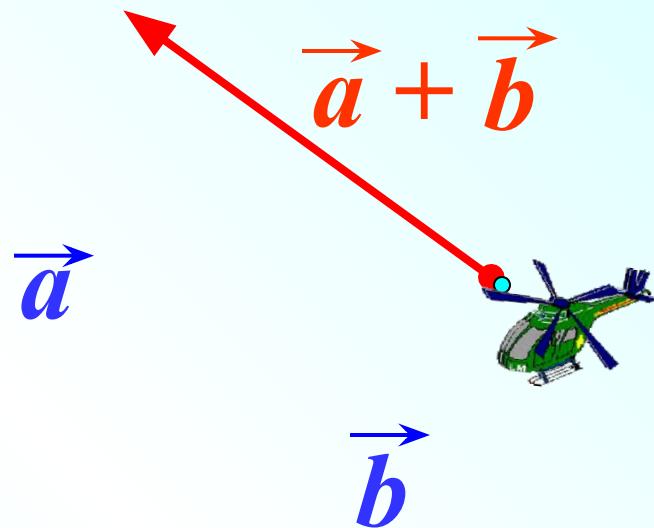
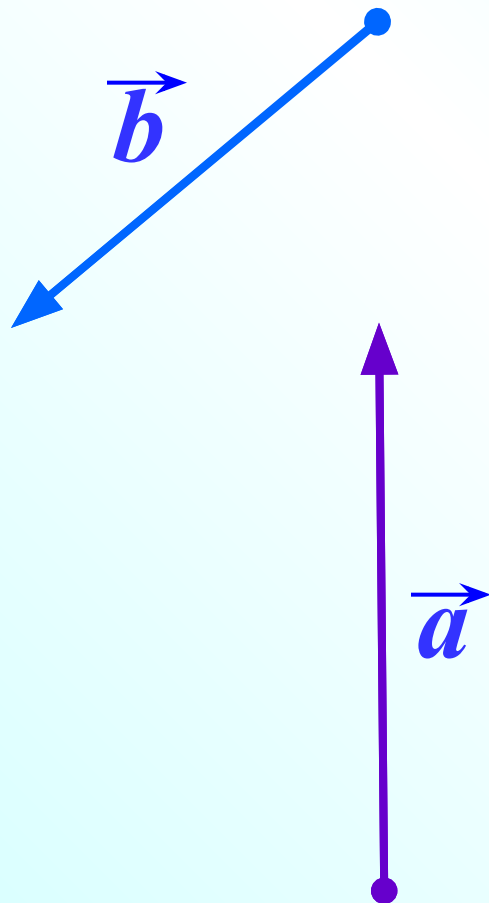
единственным образом.

Сложение векторов.

Правило треугольника.

$$\vec{AB} + \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{AC}$$

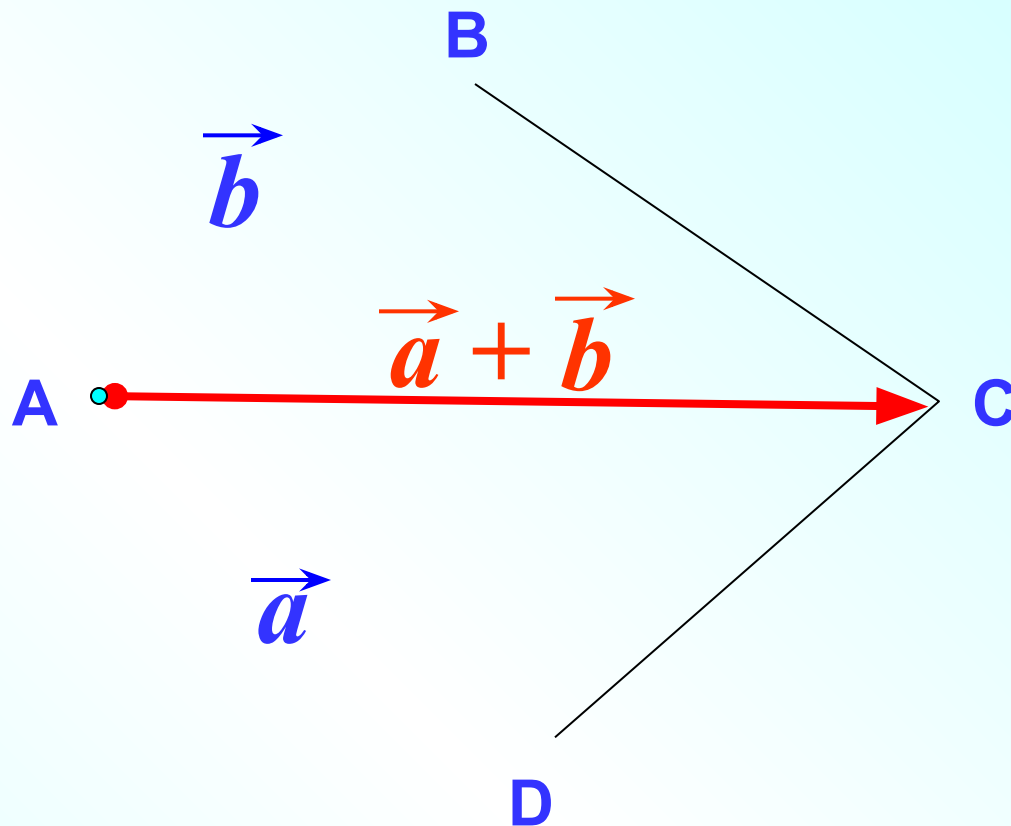
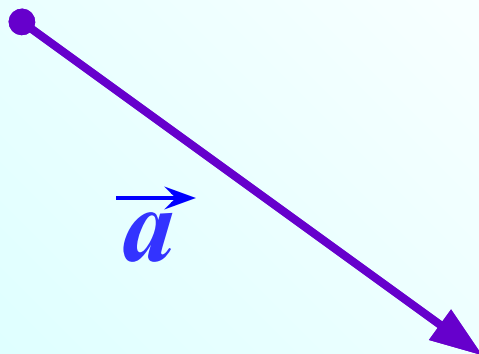
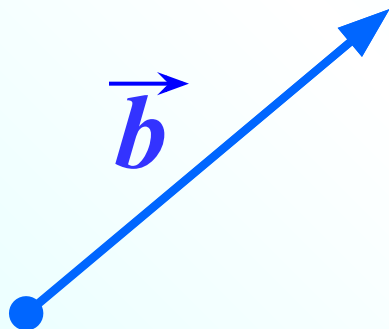
П
О
В
Т
О
Р
И
М



Сложение векторов. Правило параллелограмма.

$$\vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{AB} + \vec{AD} \Leftrightarrow \vec{AC}$$

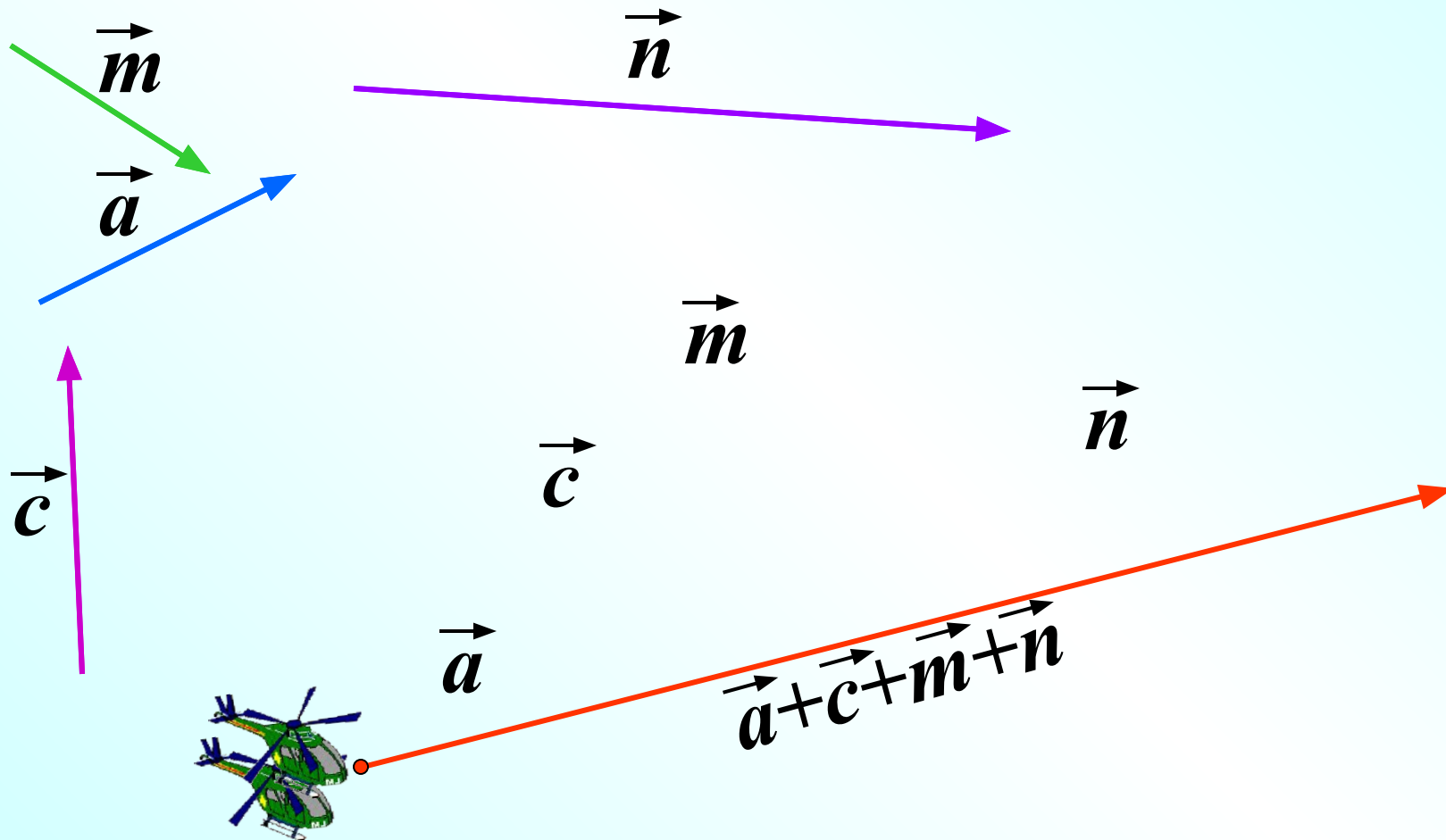


П
О
В
Т
О
Р
И
М

Сложение векторов.

Правило многоугольника.

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DO} = \vec{AO}$$



П
О
В
Т
О
Р
И
М

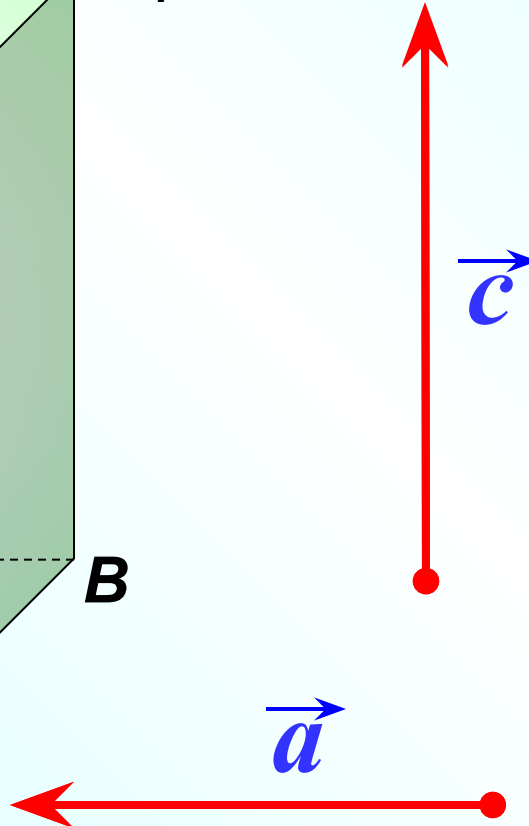
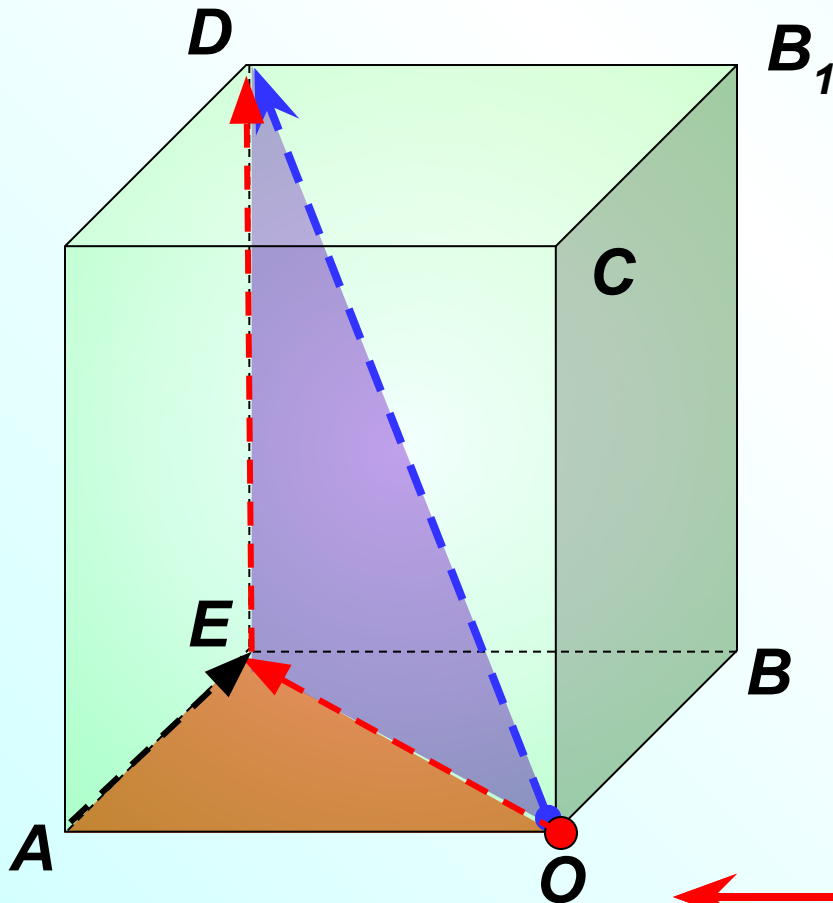
Правило параллелепипеда. $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} \Leftrightarrow \vec{OD}$

из $\triangle OED$

из $\triangle OAE$

$$\vec{OD} = \underbrace{\vec{OE}} + \vec{ED} = (\vec{OA} + \vec{AE}) + \vec{ED} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} =$$

$$= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$



Разложение вектора по трем некопланарным векторам. Если вектор представлен в виде

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

где x , y и z - некоторые числа, то говорят, что вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Числа x , y и z называются коэффициентами разложения.

Теорема о разложении вектора по трем некопланарным векторам.

Любой вектор можно разложить по трем данным некопланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

По правилу многоугольника $\vec{OP} = \vec{OP}_2 + \vec{P_2P_1} + \vec{P_1P}$
 Докажем, что любой вектор $\vec{p}$ можно представить в виде $\vec{OP} = x \cdot \vec{OA} + y \cdot \vec{OB} + z \cdot \vec{OC}$

$$\vec{OP} = x \cdot \vec{OA} + y \cdot \vec{OB} + z \cdot \vec{OC}$$

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \neq x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

$$\overrightarrow{P_1P} = z \cdot \overrightarrow{OC}$$



Докажем теперь, что коэффициенты разложения определяются единственным образом. Допустим, что это не так и существует другое разложение вектора

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

Это равенство выполняется
только тогда,

$$\vec{0} = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c} \quad \text{когда}$$

Если предположить, например, что $z - z_1 \neq 0$, то из этого

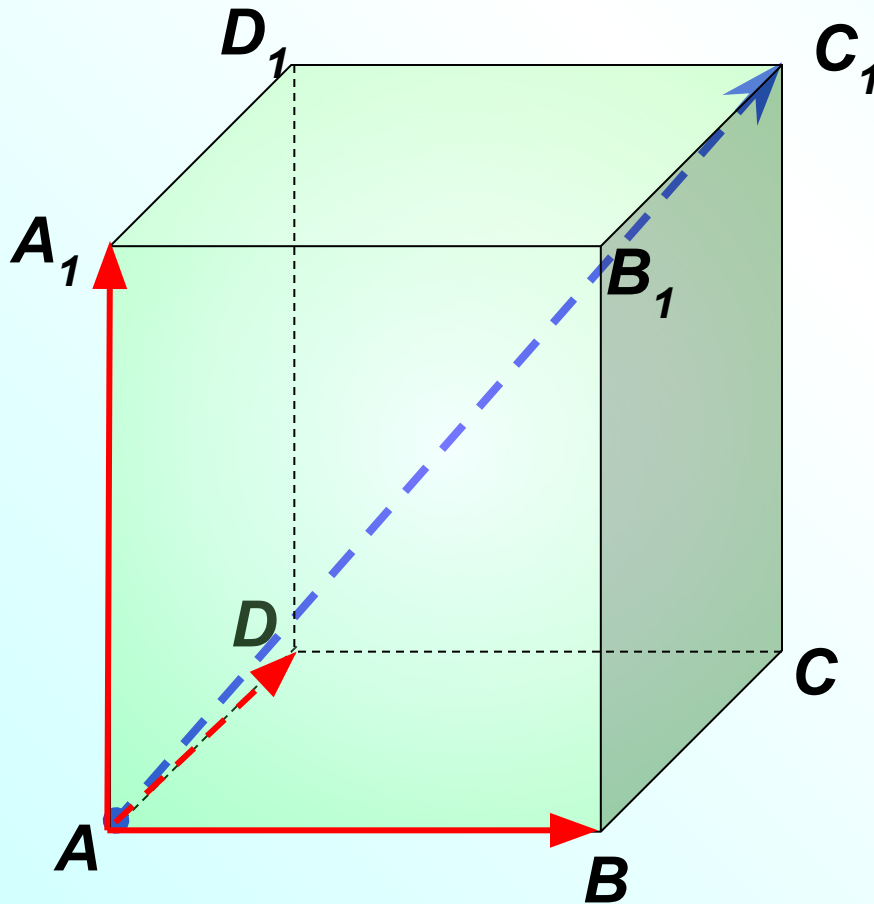
равенства можно найти

$$\vec{c} = -\frac{x - x_1}{z - z_1}\vec{a} - \frac{y - y_1}{z - z_1}\vec{b}$$

Тогда векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Это противоречит условию теоремы. Значит, наше предположение не верно, и $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$. Следовательно, коэффициенты разложения $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ определяются единственным образом.²¹

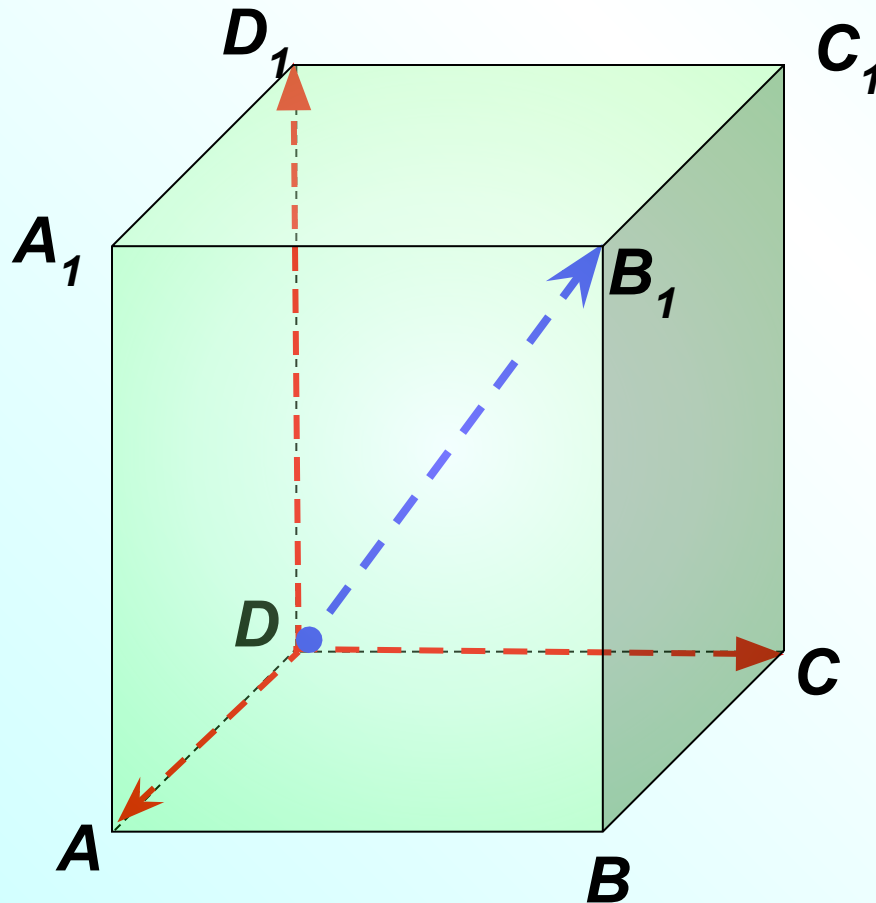
№358 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC_1}$$

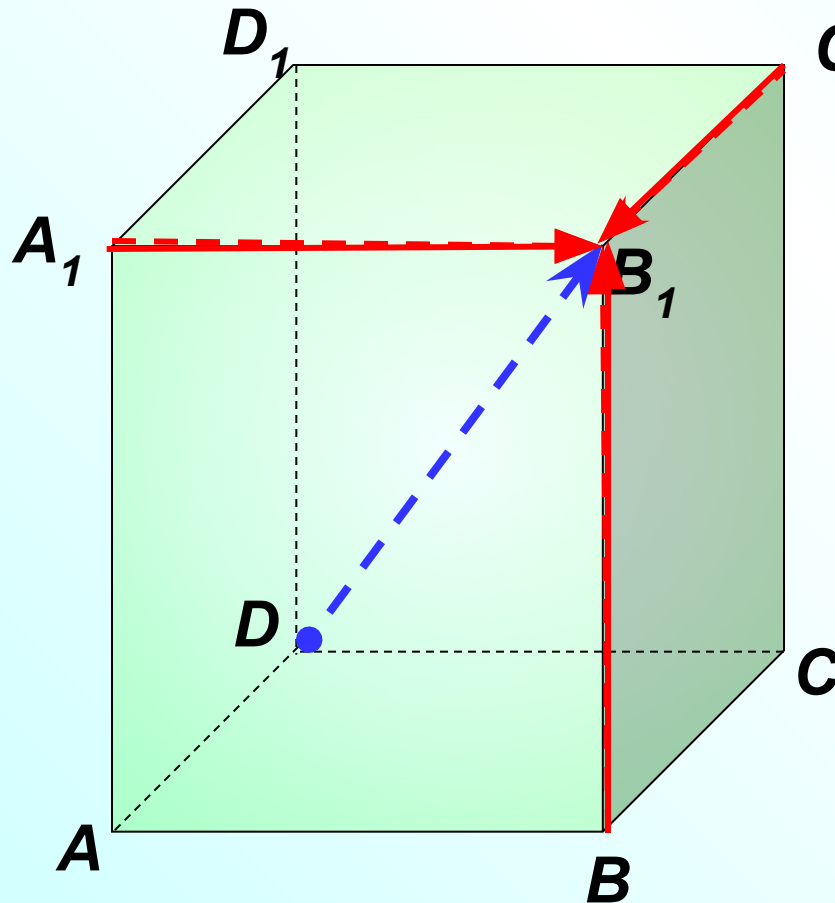


№358 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов:

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{DB_1}$$

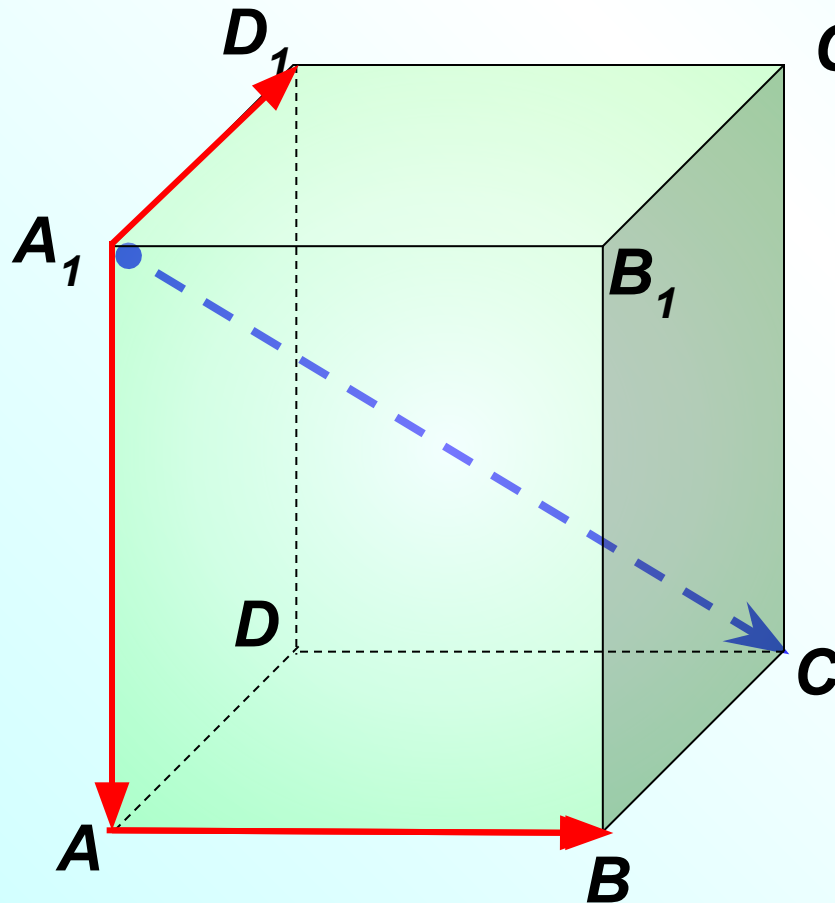


№358 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов:



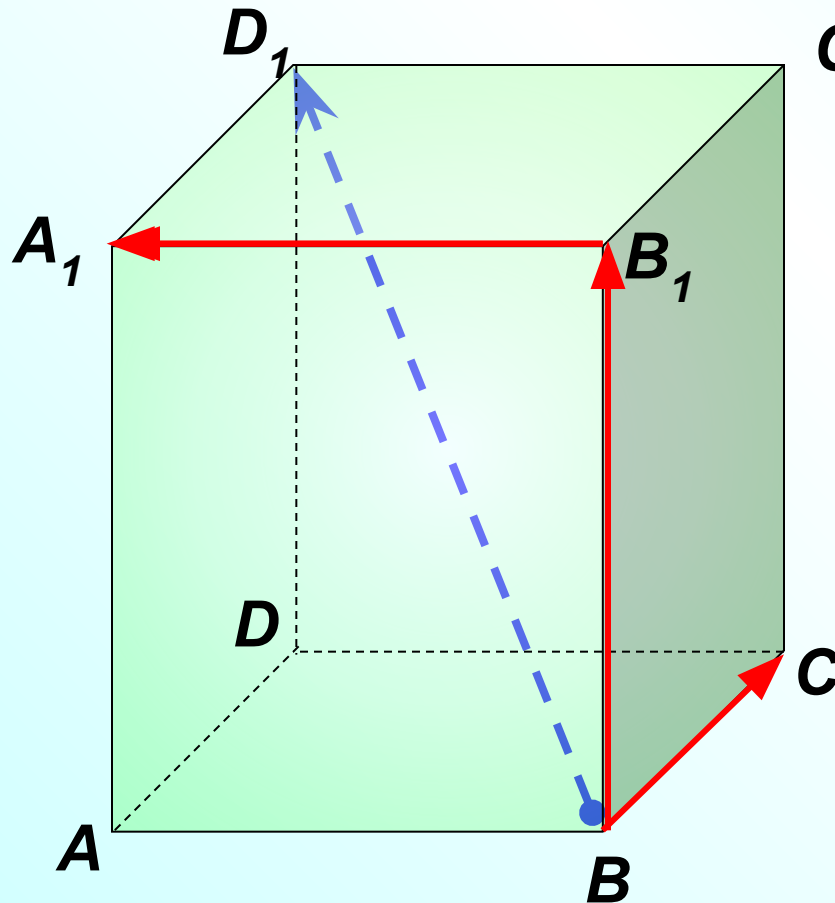
$$\begin{array}{l} \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{BB_1} \\ \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{DB_1} \end{array}$$

№358 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов:



$$\begin{array}{l} \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1C} \end{array}$$

№358 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов:

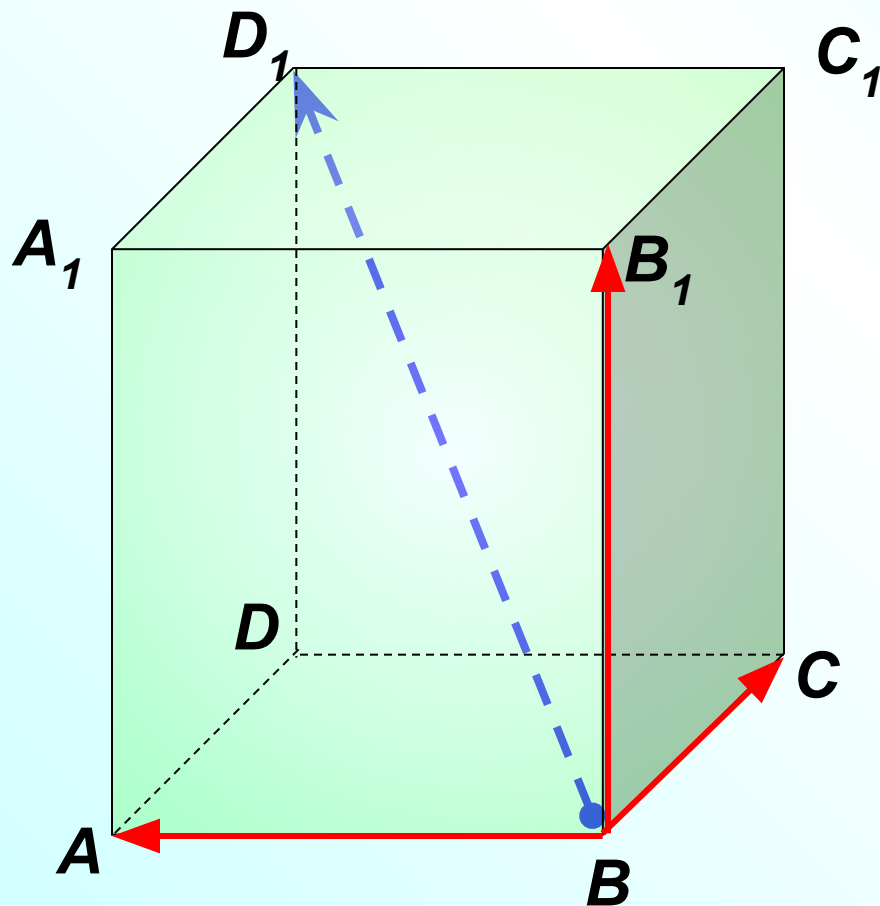


$$\begin{matrix} \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC} \end{matrix} = \overrightarrow{BD_1}$$

№359 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$.

Разложите вектор $\overrightarrow{BD_1}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BB_1}$.

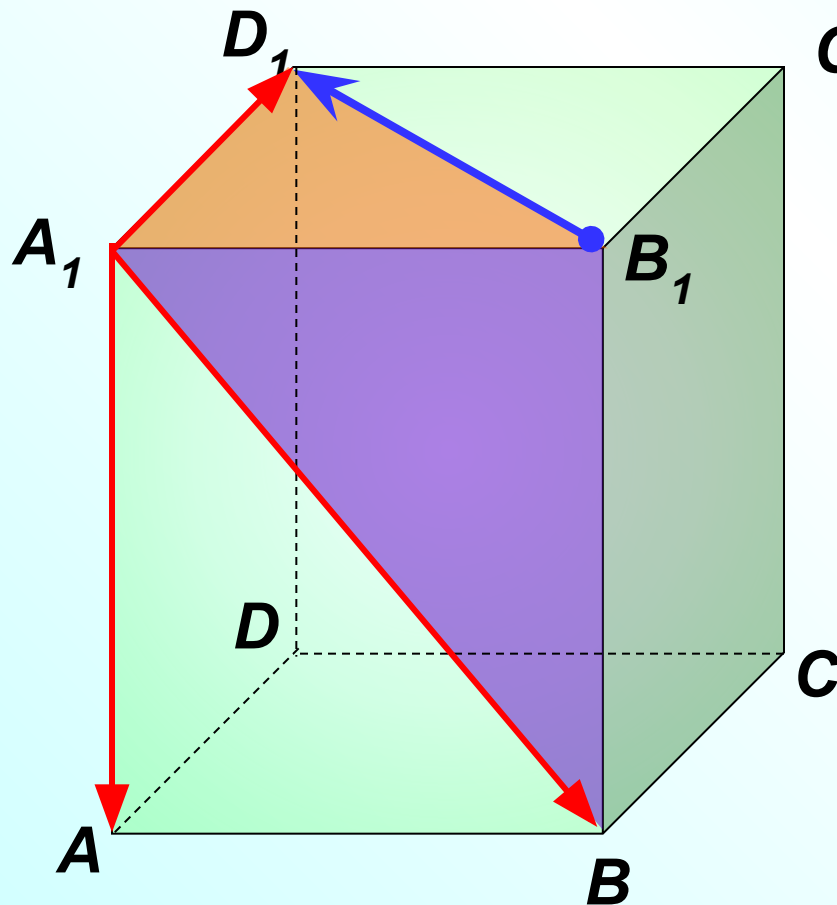
По правилу параллелепипеда $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}$



№359 Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$.

Разложите вектор $\overrightarrow{B_1D_1}$ по векторам $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{A_1B}$ и $\overrightarrow{A_1D_1}$.

По правилу треугольника из $\triangle A_1B_1D_1$:



$$\begin{aligned} \text{С}_1 \quad \overrightarrow{B_1D_1} &= \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{A_1D_1} = \\ &\text{из } \triangle A_1B_1B \\ &= (\overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BA_1}) + \overrightarrow{A_1D_1} = \\ &= (\overrightarrow{A_1A} - \overrightarrow{A_1B}) + \overrightarrow{A_1D_1} = \\ &= \overrightarrow{A_1A} - \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{A_1D_1} \end{aligned}$$