Численное интегрирование функции с одной переменной

Постановка задачи численного интегрирования

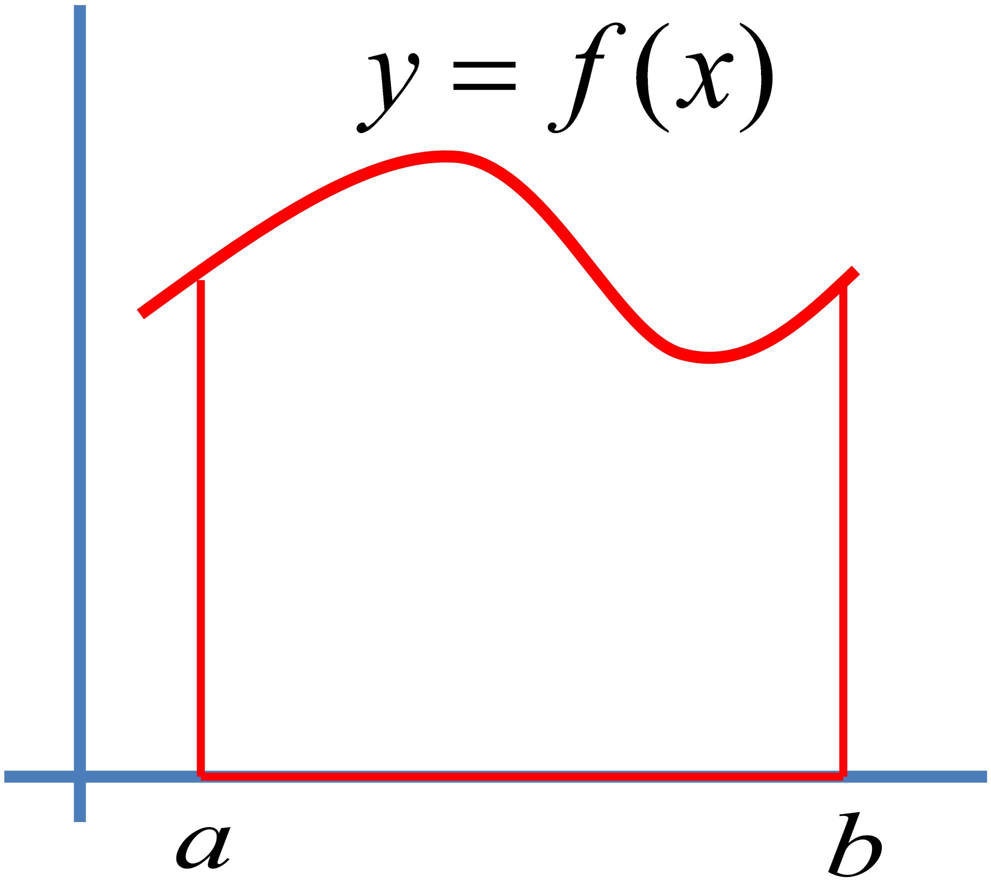
- Численными методами можно вычислить только **определенные** интегралы

Заданы пределы интегрировани я

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

$$a < b$$

Геометрический смысл определенного интеграла



Вычисление определенного интеграла – это вычисление площади криволинейной трапеции.

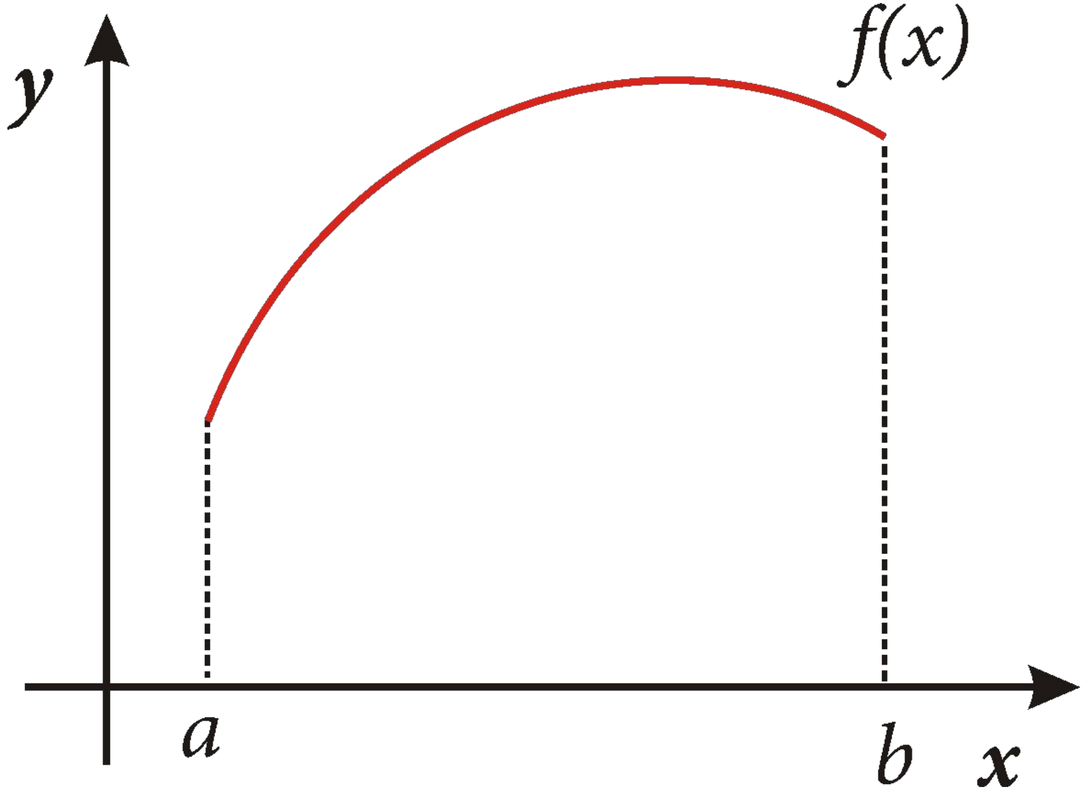
Трапеция это …

Формула Ньютона-Лейбница

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Первообразная функции f(x)

Метод прямоугольников

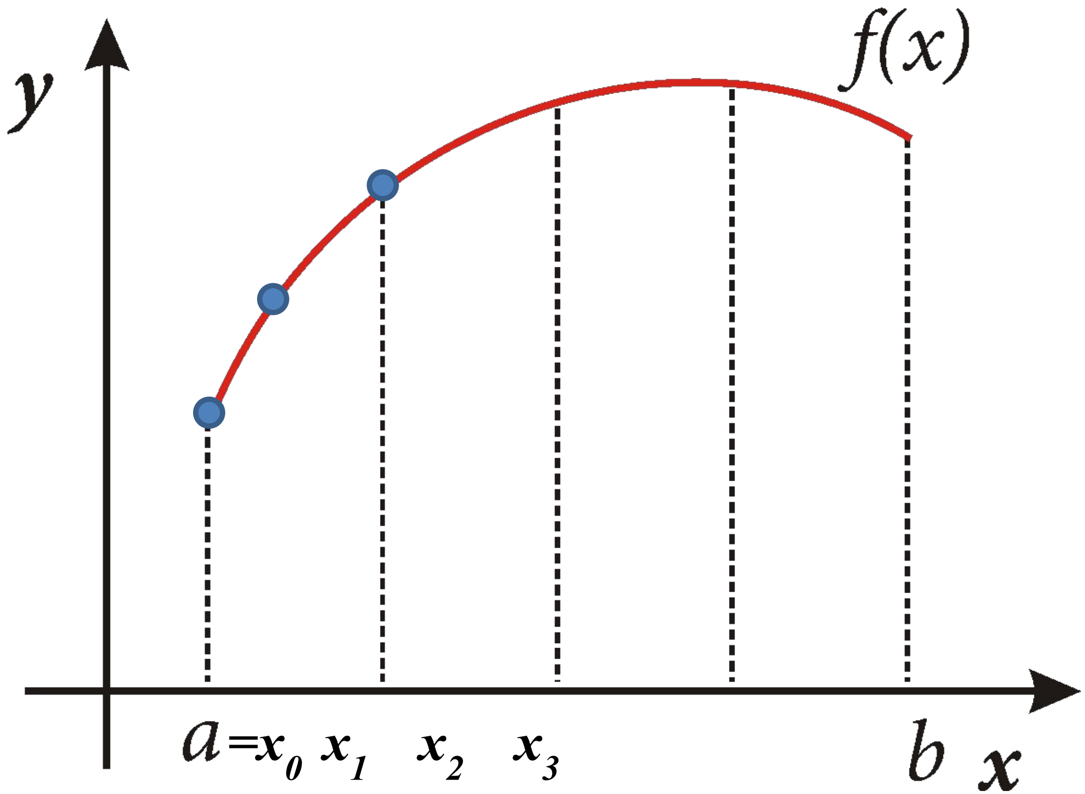


Шаг интегрирования

$$h = \frac{b-a}{n}$$

n частей одинаковой длины

Метод прямоугольников



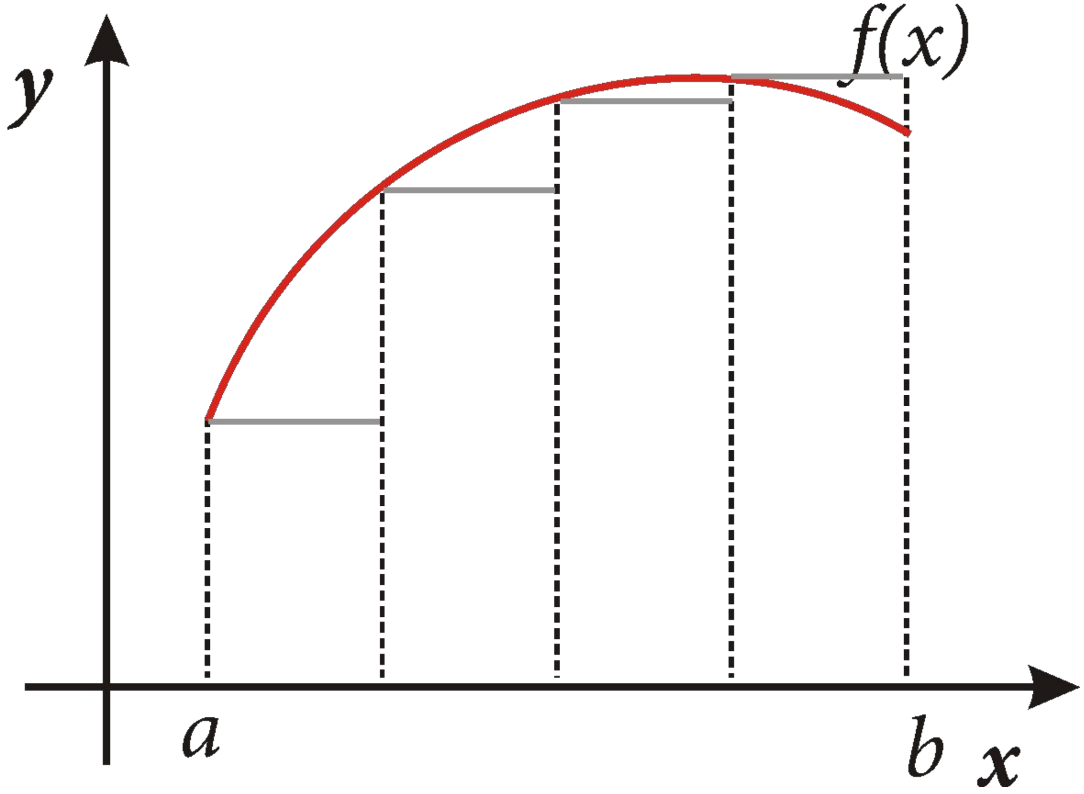
$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

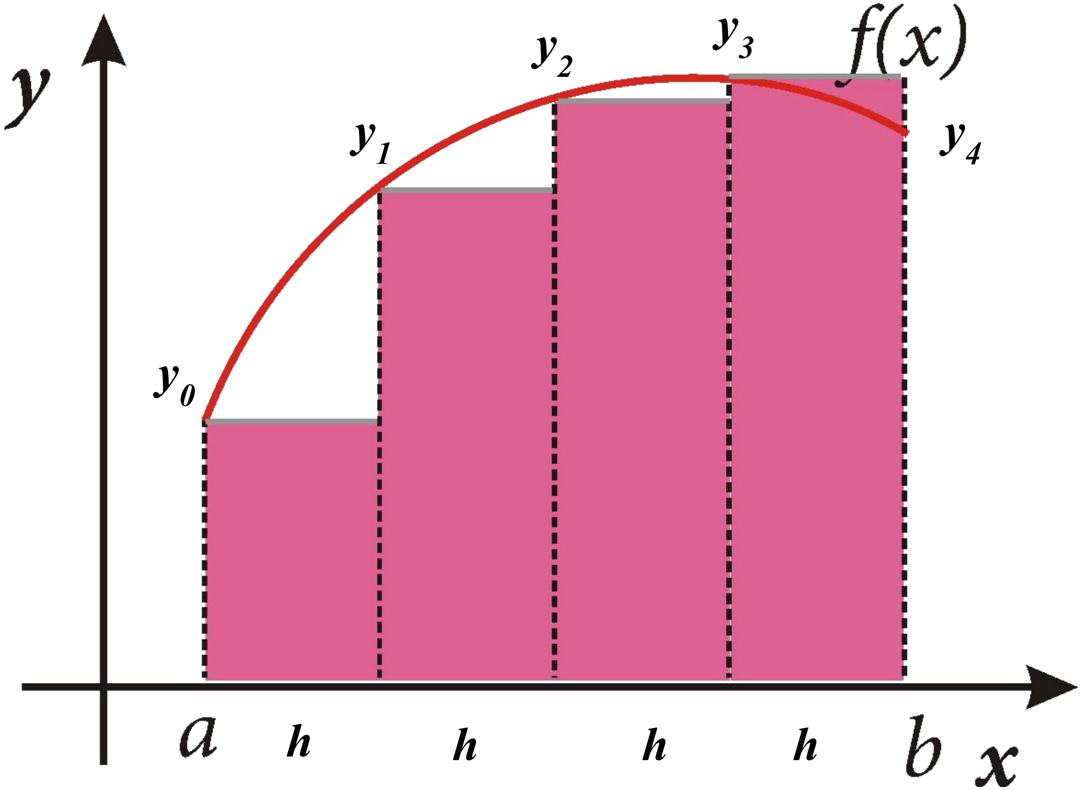
$$i = 0, 1, 2, ..., n-1$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

Метод левых прямоугольников



Метод левых прямоугольников



$$S_1 = h \cdot y_0$$

$$S_2 = h \cdot y_1$$

$$S_3 = h \cdot y_2$$

$$S_4 = h \cdot y_3$$

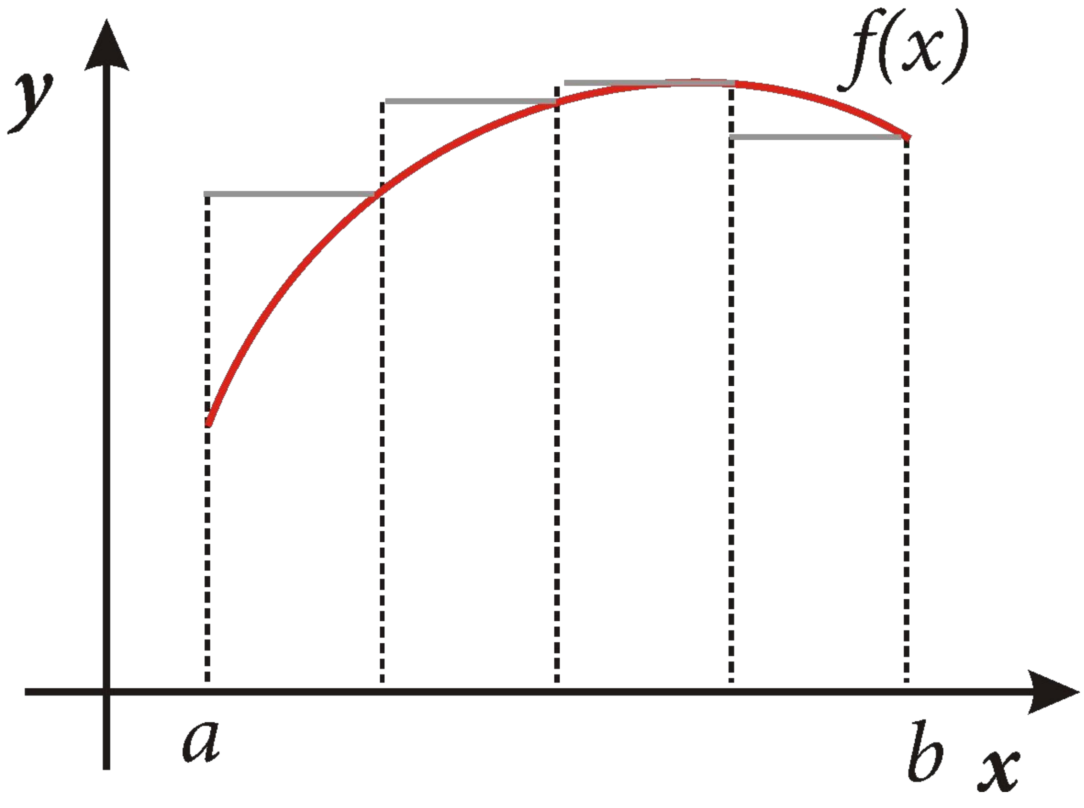
$$\boxed{S = h(y_0 + y_1 + y_2 + y_3)}$$

Метод левых прямоугольников

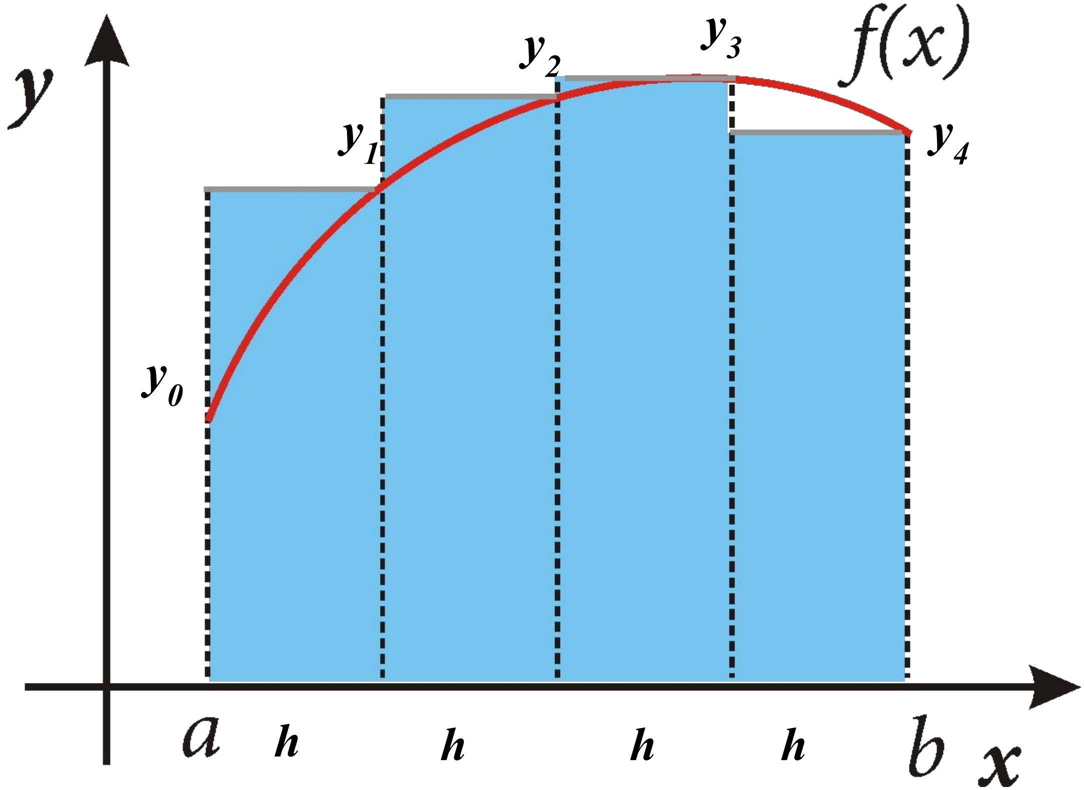
$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1})$$

$$I \approx I^{л} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Метод правых прямоугольников



Метод правых прямоугольников



$$S_1 = h \cdot y_1$$

$$S_2 = h \cdot y_2$$

$$S_3 = h \cdot y_3$$

$$S_4 = h \cdot y_4$$

$$\boxed{S = h(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)}$$

Метод правых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$$

$$I \approx I^{np} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Оценка погрешности

- **Теорема.** Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема на отрезке [a;b]. Тогда для формулы прямоугольников справедлива следующая оценка погрешности:

$$\left| I - I_{прям} \right| \le \frac{M_2 (b-a)}{24} h^2$$

где $M_2 = \max\limits_{[a,b]} \left| f''(x) \right|$

Пример: вычислить значение интеграла $\int_0^1 e^{x^2}dx$ по формуле левых прямоугольников с шагом $h=0,1$

$$I \approx I^{л} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Составим таблицу значений функции

вычисления

x	y
0,00	1,0000000
0,10	1,0100502
0,20	1,0408108
0,30	1,0941743
0,40	1,1735109
0,50	1,2840254
0,60	1,4333294
0,70	1,6323162
0,80	1,8964809
0,90	2,2479080
1,00	2,7182818

∑=13,8126060

$$I_{прям}^{л} = 13{,}8126060 \cdot 0{,}1 = 1{,}3812606$$

вычисления

x	y	y''
0,00	1,0000000	2,0000000
0,10	1,0100502	2,0605023
0,20	1,0408108	2,2481513
0,30	1,0941743	2,5822513
0,40	1,1735109	3,0980687
0,50	1,2840254	3,8520763
0,60	1,4333294	4,9306532
0,70	1,6323162	6,4639722
0,80	1,8964809	8,6479528
0,90	2,2479080	11,7790379
1,00	2,7182818	$\boxed{16,3096910}$

$$f''(x) = (e^{x^2})'' = (4x^2 + 2)e^{x^2}$$

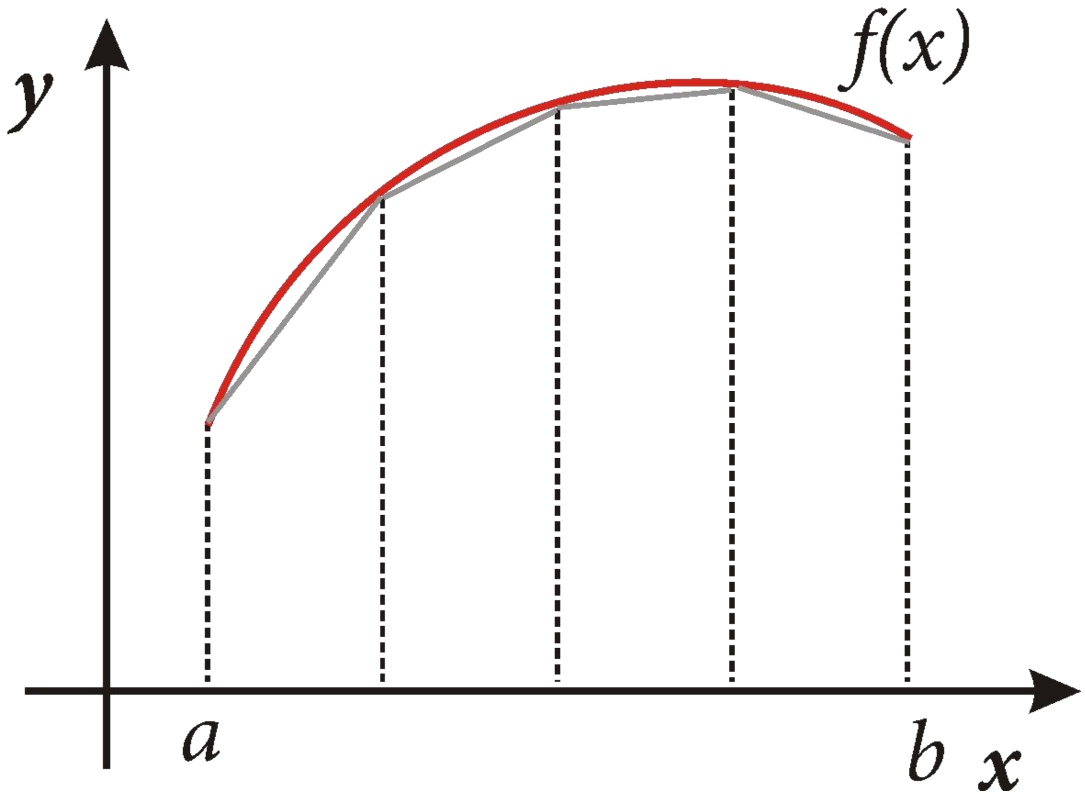
$$\left| I - I_{прям} \right| \le \frac{16,3097 \cdot 1}{24} (0,1)^2 \approx 0,0068$$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 1,38$$

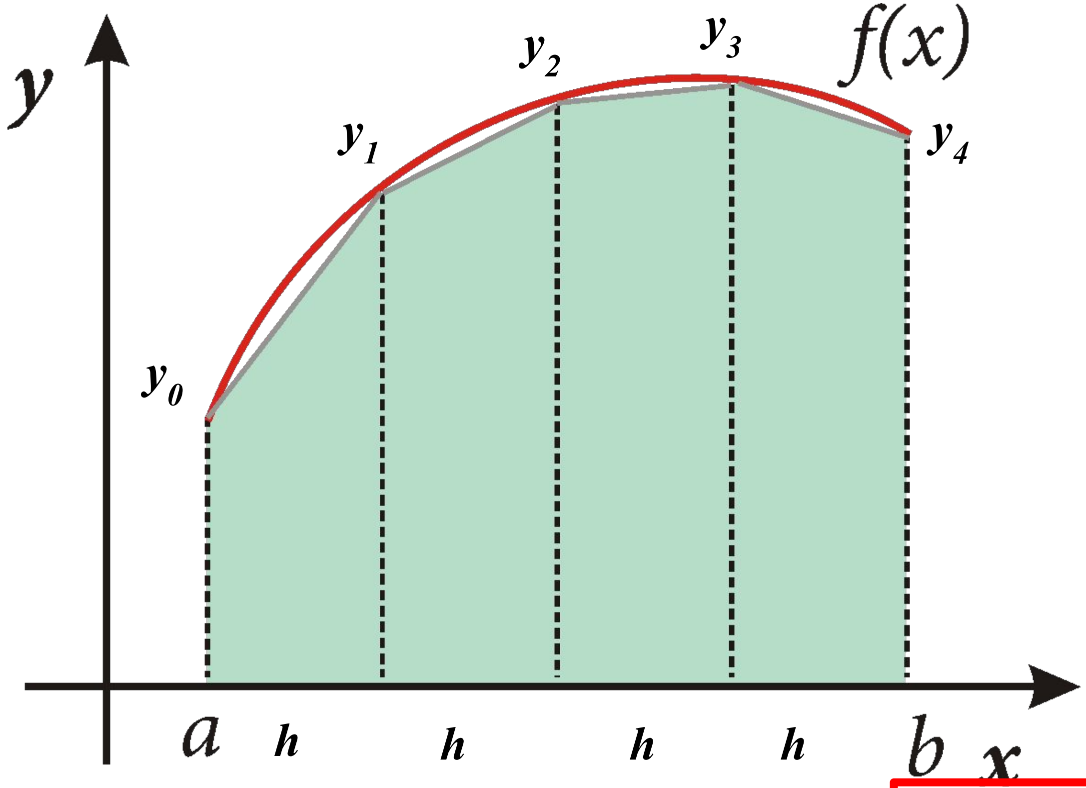
Метод трапеций

- Трапеция это…
- Площадь трапеции…

Метод трапеций



Метод трапеций



$$S_1 = h \cdot \frac{y_0 + y_1}{2}$$

$$S_2 = h \cdot \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$S_3 = h \cdot \frac{y_2 + y_3}{2}$$

$$S_4 = h \cdot \frac{y_3 + y_4}{2}$$

$$\boxed{S = h\left(\frac{y_0 + y_4}{2} + y_1 + y_2 + y_3\right)}$$

Метод трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + ... + y_{n-1})$$

$$I \approx I_{mpan} = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

Оценка погрешности

- **Теорема.** Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема на отрезке [a;b]. Тогда для формулы прямоугольников справедлива следующая оценка погрешности:

$$\left|I - I_{прям}\right| \leq \frac{M_2(b-a)}{12} h^2$$

где $$M_2 = \max_{[a,b]} \left|f''(x)\right|$$

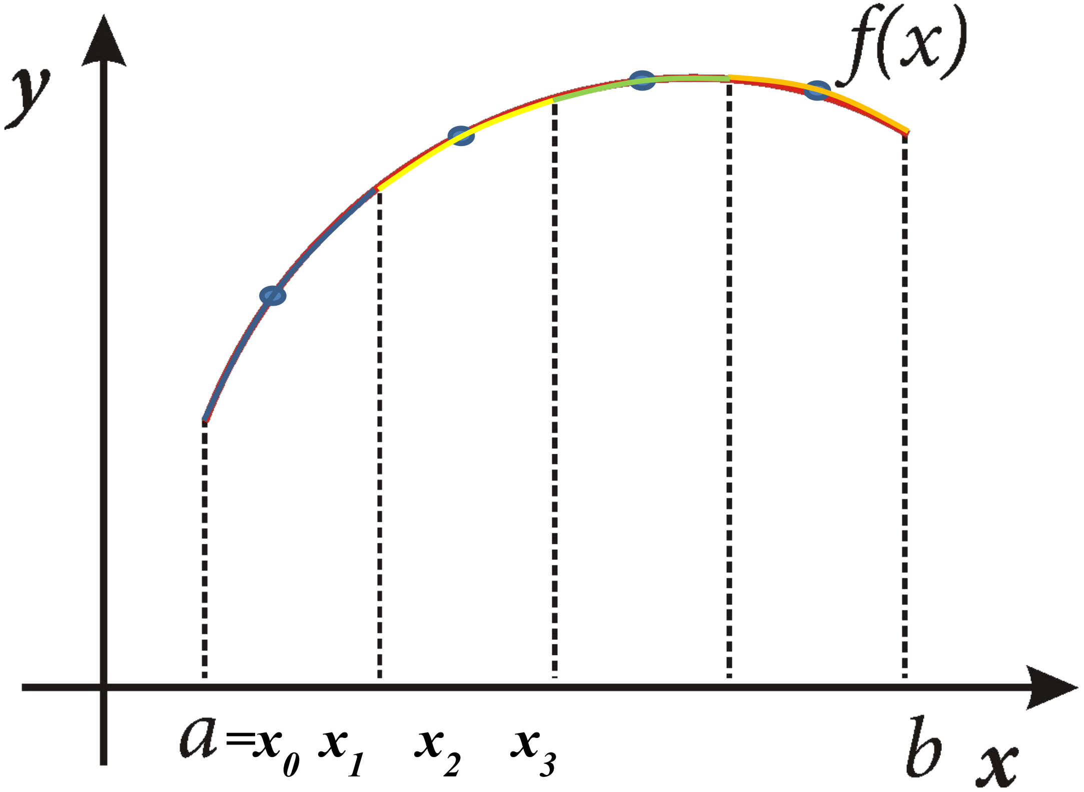
Пример: $\int_0^1 e^{x^2} dx$

x	y
0,00	1,0000000
0,10	1,0100502
0,20	1,0408108
0,30	1,0941743
0,40	1,1735109
0,50	1,2840254
0,60	1,4333294
0,70	1,6323162
0,80	1,8964809
0,90	2,2479080
1,00	2,7182818

$$S = 0{,}1\left(\frac{y_0 + y_{10}}{2} + \sum_{i=1}^{9} y_i\right)$$

$$I_{трап} = 1{,}467175$$

Метод Симпсона



Метод Симпсона

$$y = L_2(x) = f(x_i') + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}(x - x_i') +$$

$$+ \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i') + f(x_i)}{\frac{h^2}{2}}(x - x_i')^2$$

Метод Симпсона

$$I_i \approx \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} L_2(x)dx = \frac{h}{6}\left(f(x_i) + 4f(x_i') + f(x_{i+1})\right)$$

$$\boxed{I \approx I_c = \tfrac{h}{6}\left(f(x_0) + f(x_n) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i') + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)}$$

Правило Рунге практической оценки погрешности

- Оценки погрешности зависят по h
- Чем меньше h, тем выше точность

$$I - I^{h} \approx Ch^{k}$$

$$I - I^{\frac{h}{2}} \approx \frac{1}{2} Ch^{k} \approx \frac{1}{2^{k}} (I - I^{h})$$

Правило Рунге практической оценки погрешности

$$I - I^{\frac{h}{2}} \approx \frac{I^{\frac{h}{2}} - I^{h}}{2^{k} - 1}$$

Для формул прямоугольников и трапеций **k=2**
Для формулы Симпсона **k=4**

Правило Рунге практической оценки погрешности

$$I - I_{np} \approx \frac{1}{3}\left(I_{np}^{\frac{h}{2}} - I_{np}^{h} \right)$$

$$I - I_{mp} \approx \frac{1}{3}\left(I_{mp}^{\frac{h}{2}} - I_{mp}^{h} \right)$$

$$I - I_{C} \approx \frac{1}{15}\left(I_{C}^{\frac{h}{2}} - I_{C}^{h} \right)$$

Вычисление интеграла с заданной точностью

Определить точность ε и начальную величину шага h

Вычислить значение интеграла I^h

Уменьшить значение h в 2 раза и вычислить $I^{h/2}$

Сравнить I^h и $I^{h/2}$ по формуле Рунге

Процедура прекращается когда результаты двух вычислений отличаются меньше чем на ε

Пример: Вычислить значение интеграла с точностью ε=0,0001 методом трапеций $\int_0^1 e^{x^2}dx$

h	I трап	$\varepsilon = \frac{1}{3}\left(I^h - I^{\frac{h}{2}}\right)$
0,1	1,46717469	
0,05	1,46378389	0,00113
0,025	1,46293487	0,00028
0,0125	1,46272253	0,00007