

Лекция 3. Матрицы, операции над матрицами, теорема существования обратной матрицы. Матричная запись систем линейных алгебраических уравнений. Метод обратной матрицы решения СЛАУ, формулы Крамера. Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли, теорема о базисном миноре, метод Гаусса решения СЛАУ. Однородные системы линейных алгебраических уравнений, фундаментальная система решений ОСЛАУ.

§1. Матрицы и действия над ними.

Определение. Матрица – прямоугольная таблица из $m \times n$ действительных чисел, расположенных в m строк и n столбцов.
Обозначение: $A, B, C, D \dots \dots (), [], \| \|$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxtimes & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \boxtimes & a_{2n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a_{m1} & a_{m2} & \boxtimes & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Матрица, все элементы которой нули, называется **нулевой**.

Матрицы у которых соответственно равны числа строк и столбцов называются **матрицами одного размера**.

Две матрицы одного размера у которых соответствующие элементы равны, называются **равными**.

Различные виды матриц

Матрица состоящая из 1 строки называется строкой.

Матрица состоящая из 1 столбца называется столбцом.

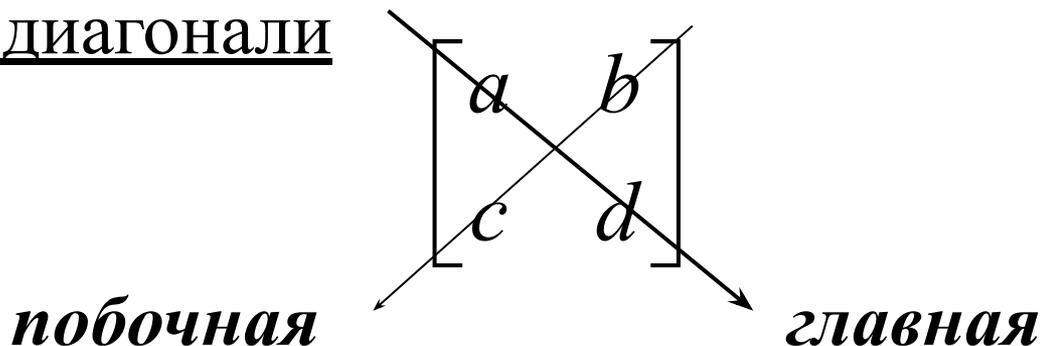
Если $m \neq n$, то матрица прямоугольная.

Если $m = n$, то матрица квадратная.

$A = (a_1, a_2, a_3)$ - матрица строка

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ - матрица столбец

Для квадратной матрицы вводят понятия главной и побочной диагонали



Матрица у которой отличны от нуля лишь элементы главной диагонали называется **диагональной**.

$$\begin{bmatrix} a & & 0 \\ & b & \\ 0 & & c \end{bmatrix}$$

Диагональная матрица у которой элементы главной диагонали равны называется **скалярной**.

$$\begin{bmatrix} a & & 0 \\ & a & \\ 0 & & a \end{bmatrix}$$

Скалярная матрица у которой элементы главной диагонали единицы называется **единичной**.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Операции над матрицами

1.) Транспонирование – замена всех строк матрицы столбцами с сохранением номеров (A^t)

для $A \rightarrow A^t$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Если $A = A^t$, то A – симметричная.

2.) Линейные операции над матрицами: сложение матриц, умножение матрицы на число.

2.1. Операция сложения возможна для матриц одного размера.

Определение: Суммой двух матриц $A_{m \times n} = [a_{ij}]$ и $B_{m \times n} [b_{ij}]$ наз. третья матрица C , того же размера $C_{m \times n} = [c_{ij}]$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

т.е. при сложении матриц их соответствующие элемент складываются

$$C = A + B$$

2.2. Произведением $A_{m \times n}$ на $\lambda \in R$ (или $\lambda \in R$ на A)

называется $B_{m \times n} [b_{ij}]$, $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ ($A = [a_{ij}]$) $B = \lambda \cdot A$

Матрица $(-1) \cdot A$ называется противоположной для A и обозначается $-A$.

Сумма матриц C и $-A$ называется их разностью и обозначается $C - A$.

2.3. Свойства линейных операций (+) и (·)

1. $\forall A, B \Rightarrow A + B = B + A$

2. $\forall B, A, C \Rightarrow A + (B + C) = (A + B) + C$

3. $\forall A \Rightarrow A + 0 = A$

4. $\forall A \Rightarrow A + (-A) = 0$

5. $\forall A \Rightarrow 1 \cdot A = A$

6. $\forall A, \forall \lambda, \mu \in R \quad (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) = \mu(\lambda A)$

7. $\forall \alpha, \beta \in R, \forall A \quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

8. $\forall A, B, \forall K \in R \quad K(A + B) = KA + KB$

План доказательства.

1.) Показать, что матрицы слева и справа имеют один и тот же размер

2.) Показать, что соответствующие элементы этих матриц равны.

3.) Произведение матрицы A на матрицу B определено лишь в случае, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B .

Определение: Произведением матрицы $A_{m \times p} [a_{ij}]$ на матрицу $B_{p \times n} [b_{ij}]$ называется матрица $C_{m \times n} [c_{ij}]$, элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i -ой строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B .

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad A \cdot B_{2 \times 2}$$

$$A \cdot B_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \\ 0 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 22 \end{pmatrix} \quad AB \neq BA$$

В общем случае $AB \neq BA$, если $AB = BA$, то матрицы A и B называются перестановочными.

Можно показать, что единичная матрица перестановочна с любой квадратной матрицей того же размера, причем $A \cdot E = E \cdot A = A$

Свойства операции умножения.

Предположим, что все указанные операции выполнимы

$$1. \quad \forall A, B, C \quad \Rightarrow \quad A(BC) = (AB)C$$

$$2. \quad \forall A, B, C \quad \Rightarrow \quad (A + B)C = AC + BC$$

$$3. \quad \forall A, B, C \quad \Rightarrow \quad A(B + C) = AB + AC$$

$$4. \quad A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB), \quad \forall A, B \quad \text{и} \quad \forall \lambda \in R$$

$$5. \quad \forall A \quad \text{и} \quad B \quad \Rightarrow \quad (AB)^t = B^t \cdot A^t$$

§2. Обратная матрица. Матричные уравнения.

Формулы Крамера.

Теорема об определителе квадратных матриц.

Теорема: Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{показать} \quad |AB| = |A| \cdot |B|$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 28 \end{pmatrix}; \quad |AB| = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 28 \end{vmatrix} = -28 - 10 = -38$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \quad |B| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 19 \quad |A| \cdot |B| = -2 \cdot 19 = -38$$

(2) Определение квадратной матрицы.

Определение: Квадратная матрица A называется вырожденной (особенной), если ее определитель $= 0$ и невырожденной(не особенной), если ее определитель $\neq 0$.

Определение: Матрица A называется обратной для матрицы B если $A \times B = B \times A = E$ (единичной матрице)

Теорема существования обратной матрицы.

Теорема: Для того чтобы матрица A имела обратную необходимо и достаточно, чтобы она была не вырожденной.

Необходимость. Пусть A имеет обратную B . Тогда по определению $AB = BA = E, AB = E$. (*)

По теореме об определителе квадратной матрице

$$\left. \begin{array}{l} |AB| = |A| \cdot |B| \\ |E| = 1 \end{array} \right\} (**)$$

Из (*) \Rightarrow что если матрицы $=$, то $=$ их определители

$$|AB| = |E|$$

Из (*) $\Rightarrow |A| \cdot |B| = 1 \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0$ (невырожденная)

Достаточность. A - невырожденная, т.е. $|A| \neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad i - \text{я} \quad A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & \left| \begin{array}{c} j-\text{й} \\ A_{j2} \end{array} \right| \dots & A_{n1} \\ A_{12} & \left| \begin{array}{c} A_{j2} \end{array} \right| \dots & A_{n2} \\ A_{1n} & \left| \begin{array}{c} A_{jn} \end{array} \right| \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{|A|} \cdot A^*; \quad AB = BA = E \quad \text{Обозначим} \quad AB = C \quad [C_{ij}]$$

$$C_{ij} = \frac{1}{|A|} (a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}) = \frac{1}{|A|} \begin{cases} |A|, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

$$C_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \quad \text{т.е. } C - \text{единственная}$$

Единственность обратной матрицы.

Теорема: Если A имеет обратную, то она (обратная) единственная.

Доказательство: Пусть B обратная для A . Предположим, что C тоже обратная для A и C совпадает с B , $C = B$.

Так как B обратная для A , то $AB = E$

Умножим обе части равенства слева на матрицу C

$$\begin{array}{ll} C(AB) = CE & EB = C \\ (CA)B = C & B = C \\ E & C = B \end{array}$$

Обозначение A обратная A^{-1}

Например, $n = 3$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}$$

$$A = 2 \quad = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Свойства обратной матрицы.

$$1. \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$2. \quad (A^{-1})^{-1} = A$$

$$3. \quad (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \quad (\text{множители переставляются})$$

$$4. \quad (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = A^{-t}$$

Доказательство 1: $AA^{-1} = E$

$$|AA^{-1}| = |E|$$

$$|A| \cdot |A^{-1}| = 1 \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Доказательство 3: $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$$C \cdot C^{-1} = C^{-1} \cdot C = E$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1}) \cdot A^{-1} = (AE) \cdot A^{-1} = AA^{-1} = E$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = \text{св-во произв.} = B^{-1}(A^{-1}A)B = (B^{-1}E)B = B^{-1}B = E$$

Матричные уравнения.

Матричными уравнениями называются уравнения вида:

$$AX = B \quad (1) \quad XC = D \quad (2), \text{ где}$$

$|A| \neq 0$, $|C| \neq 0$ – невырожденные матрицы

X - неизвестная матрица,

B , D - известные матрицы размеры которых не противоречат операциям умножения.

т.к. $|A| \neq 0$, то A^{-1} существует. Умножим обе части уравнения (1) слева на A^{-1} .

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B \quad EX = A^{-1}B \quad X = A^{-1}B \quad (1)$$

т.к. $|C| \neq 0$, то C^{-1} существует. Умножим обе части уравнения (2) слева на C^{-1} .

$$C^{-1}(XC) = C^{-1}D$$
$$X(C^{-1}C) = D C^{-1} \quad XE = D C^{-1} \quad X = D C^{-1} \quad (2)$$

Если A и C – вырожденные матрицы, то уравнения могут не иметь решения или иметь их бесчисленное множество.

Матричная запись системы уравнений.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \boxtimes \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \quad (1)$$

Введем A - матрицу системы (1), полученную из коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$A_{m \times n}$ $X_{n \times 1}$ $b_{m \times 1}$

$AX = B(1')$
*матричная
запись системы(1)*

Пример.

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot X = B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B; A^{-1} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Замечание: неизвестные и свободные члены можно расположить в строки, то запись имела бы соответствующий вид.

Теорема Крамера.

Рассмотри систему n линейных уравнений с n неизвестными

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right. \quad (1)$$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных - определитель системы.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Теорема. Если определитель квадратной системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам:

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad \dots \quad X_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}; \quad (*)$$

Δ - определитель системы

Δ_k ($k = 1, 2, \dots$) - определитель, полученный из определителя системы заменой k -ого столбца, столбцом свободных членов.

(*) – формулы Крамера, а применение их к решению системы называют **Правилом Крамера**.

Доказательство:

- 1.) доказательство существования решения
- 2.) доказательство единственности решения
- 3.) вывод формул (*)

Пример.

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; |A| = -3, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

то есть решение $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{3}; x_2 = \frac{1}{3}$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Для решения СЛУ с матрицей A размера выше 4 метод Крамера не стоит применять, т.к. число операций при применении этого метода имеет порядок $n!$, т.е. быстро растет с порядком системы. ($n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$).

При решении СЛУ высокого порядка лучше применять метод Гаусса. Суть метода Гаусса состоит в том, что при помощи преобразований, не нарушающих равносильности, исходная система сводится к треугольному виду.

Ранг матрицы, его свойства и вычисление. Системы линейных уравнений

Рассмотрим прямоугольную матрицу $A_{m \times n}$.

Определение.

Минором матрицы A k -го порядка называется любой определитель, составленный из элементов матрицы A , состоящих на пересечении k строк и k столбцов, где $k \leq \min(m, n)$.

Пример.

$$A_{3 \times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

У этой матрицы миноры первого порядка это: $M^1 = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10, 0\}$,

второго порядка – $M^2 = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \dots \right\}$,

третьего порядка – $M^3 = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 6 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \dots \right\}$.

При этом так как $k \leq \min(3, 5)$, то $k = 3$.

Определение.

Рангом матрицы называется число равное наивысшему порядку миноров этой матрицы, отличных от нуля.

Обозначение ранга $Rg(A) \Leftrightarrow \text{rang}(A) \Leftrightarrow r(A)$.

Для рассмотренной выше матрицы $A_{3 \times 5}$ ранг равен 3. Действительно $r(A_{3 \times 5}) =$

$$3, \text{ так как существует } M^3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Свойства ранга.

Ранг матрицы не изменяется:

- 1) При транспонировании;
- 2) При перестановке строк или столбцов местами;
- 3) При отбрасывании строки или столбца из нулей;
- 4) При умножении строки или столбца на число не равное нулю;
- 5) При удалении строки или столбца, являющегося линейной комбинацией других строк (столбцов);
- 6) При добавлении к строке или столбцу линейной комбинации других строк или столбцов.

Преобразования не изменяющие ранга матрицы называются эквивалентными, и матрицы, получающиеся при таких преобразованиях, называются эквивалентными также.

Обозначения эквивалентных матриц таково $A \sim B$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В литературе эквивалентные преобразования могут называться элементарными преобразованиями. Используя эквивалентные преобразования ранг матрицы может быть определен сведением ее к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \square & a_{1r} & \square & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \square & a_{2r} & \square & a_{2k} \\ 0 & 0 & a_{33} & \square & a_{3r} & \square & a_{3k} \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & \square & a_{rr} & \square & a_{rk} \end{pmatrix}, \quad a_{ii} \neq 0, i=1,2,\dots,r, r \leq k.$$

Пример.

$$A_{4 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -5 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -21 & 7 \end{pmatrix},$$

тогда существует $M^3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -21 \end{vmatrix} = -84 \neq 0$, значит $r(A)=3$.

Назовем *системой линейных уравнений* (СЛУ) систему вида

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases} (1) \Leftrightarrow A \cdot X = B \quad (2)$$

где a_{ij} – известные коэффициенты, x_i – неизвестные переменные, b_i – известные свободные члены,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Решением системы называется такой набор чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, который после подстановки вместо существующих неизвестных (x_1, x_2, \dots, x_n) обращает каждое уравнение в верное равенство.

Если такой набор чисел существует, то говорят что система (1) или (2) совместна, если нет - то не совместна.

Расширенной матрицей для систем (1) или (2) называют матрицу, составленную из элементов матриц A и B следующего вида:

$$A_p = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Имеется теорема позволяющая судить о существовании решения систем вида (1) или (2).

Теорема. (Кронеккера - Капелли).

Для существования решения системы (1) необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы A равнялся рангу расширенной матрицы A_p ($r(A) = r(A_p)$).

ЗАМЕЧАНИЕ

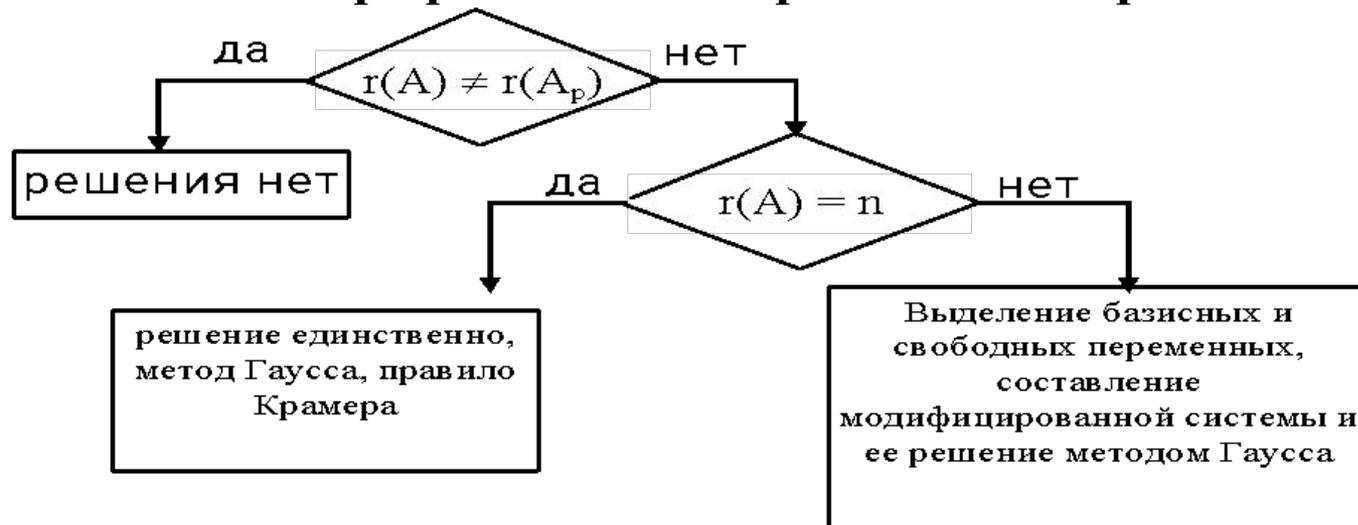
- 1) Если $r(A) \neq r(A_p)$, то система (1) несовместна
- 2) Если $r(A) = r(A_p)$, то система (1) совместна, причем решение системы единственно, если $r(A) = r(A_p) = n$ – числу неизвестных, если же $r(A) = r(A_p) < n$, то система имеет бесконечное множество решений.

Алгоритм применения теоремы к решению СЛУ (систем линейных уравнений)

- 1) Вычисляем $r(A)$ и $r(A_p)$ и сравниваем их
- 2) Если $r(A) \neq r(A_p)$, то решения СЛУ нет
- 3) Если $r(A) = r(A_p)$, то проверяем справедливость равенства $r(A) = r(A_p) = n$
- 4) Если равенство выполняется, то для нахождения единственного решения применяют метод Гаусса или правило Крамера.

5) Если равенство не выполняется ($r(A) = r(A_p) < n$), то перестановкой строк (столбцов) матрицы A находят любой, отличный от нуля минор (базисный минор) так, чтобы в СЛУ первыми стояли r строк базисного минора. При этом $(m-r)$ оставшихся строк системы можно отбросить как не влияющих на решение системы, а $(n-r)$ столбцов с соответствующими неизвестными можно перенести в правую часть системы, задав произвольным образом свободные переменные x_j . Полученную систему r уравнений с r неизвестными можно решить к примеру методом Гаусса.

Графическое изображение алгоритма



Среди СЛУ особое место занимают однородные системы линейных уравнений (ОСЛУ)

$$A_{m \times n} \cdot X_{n \times 1} = 0 \quad (3)$$

Решение ОСЛУ всегда существует, т.к. $r(A) = r(A_p)$. Если $m = n$, а определитель $|A| \neq 0$, то система (3) имеет нулевое (тривиальное) решение. Не нулевые решения системы (3) возможны тогда и только тогда, когда $r(A) < n$, при этом решений бесчисленное множество. Найти это множество решений можно используя понятие базисных и свободных переменных (см. Теорему Кронеккера-Капелли).

Пример.

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{a}_{11} \cdot x_1 + \tilde{a}_{12} \cdot x_2 + \tilde{a}_{13} \cdot x_3 = \tilde{b}_1 \\ 0 + \tilde{a}_{22} \cdot x_2 + \tilde{a}_{23} \cdot x_3 = \tilde{b}_2 \\ 0 + 0 + \tilde{a}_{33} \cdot x_3 = \tilde{b}_3 \end{cases}$$

Переход к равносильной треугольной системе называют прямым ходом метода Гаусса. Выражая из треугольной системы $x_3 = -\frac{\tilde{b}_3}{\tilde{a}_{33}}$, затем

$$x_2 = \frac{1}{\tilde{a}_{22}} \cdot (\tilde{b}_2 - \tilde{a}_{23} \cdot \tilde{x}_3), \text{ затем}$$

$$x_1 = \frac{1}{\tilde{a}_{11}} \cdot (\tilde{b}_1 - \tilde{a}_{12} \cdot \tilde{x}_2 - \tilde{a}_{13} \cdot \tilde{x}_3), \text{ то есть выполняя обратный ход метода Гаусса,}$$

легко находим решение системы.

Равносильные преобразования в методе Гаусса - это линейные комбинации строк матрицы.

Для иллюстрации метода Гаусса рассмотрим примеры.

Пример.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Шаг 1. Делим коэффициенты первого уравнения на коэффициент $a_{11} \neq 0$, при этом получается равносильная система уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{2} \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Шаг 2. На месте 2 и 3 уравнений поставим сумму 1-го уравнения, умноженного на (-1), и 2,3- уравнений. На месте 4-го уравнения сумму 1-ой строки, умноженную на (-2), и 4-ой строки. Для краткости записей воспользуемся понятием расширенной матрицы и эквивалентных преобразований

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & +\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & -5 & +\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim$$

Т. к. во 2, 3, 4 уравнениях неизвестное x_1 - исключено, то применим схему приведенную выше для исключения неизвестных в системе, состоящей из 2, 3, 4 уравнений. Для этого вторую строку разделим на $1/2$, на месте 3, поставим сумму элементов 2 строки, умноженную на $(-7/2)$, и 3-й строки на месте 4-ой строки сумму элементов 2 строки умноженную на (-1) и 4 строки.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3/2 & 2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 12 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -4 \end{array} \right) \sim$$

Исключая неизвестные в 3 и 4 уравнениях по той же схеме завершим прямой ход метода Гаусса.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3/2 & 2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -12/5 & 7/5 \\ 0 & 0 & 0 & +18/5 & -13/5 \end{array} \right)$$

Используя обратный ход метода Гаусса, имеем:

$$\begin{aligned} x_4 &= -\frac{13}{18}, \\ x_3 &= \frac{7}{5} - \frac{12}{5} \cdot \frac{13}{18} = -\frac{1}{3}, \\ x_2 &= 3 - 3 \cdot \frac{13}{18} = \frac{5}{6}, \\ x_1 &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} + \frac{2}{3} + \frac{13}{36} = \frac{25}{9} \end{aligned}$$

Лекция 4. Определение линейного пространства. Аксиомы, линейная зависимость и независимость векторов.

Базис и размерность линейного пространства; преобразование координат вектора при переходе к новому базису. Скалярное произведение векторов, норма вектора, неравенство Коши-Буняковского, ортонормированный базис. Линейный оператор, его матрица. Матрица линейного оператора при переходе к новому базису. Собственные векторы, их нахождение. Квадратичные формы, приведение их формы к каноническому виду.

1. Линейные пространства

Определение.

Множество $L = \{x, y, z, \dots\}$ элементов любой природы называется линейным пространством над полем действительных чисел \mathbf{R} , если выполняются три условия:

1°) в множестве L определена операция сложения \oplus , которая каждому двум элементам $x, y \in L$ ставит в соответствие единственный третий элемент $z \in L$ (обозначаемый $z = x \oplus y$ и называемый их суммой);

2°) в множестве L определена операция умножения на элементы поля \mathbf{R} \otimes , которая каждому элементу $x \in L$ и каждому элементу $\lambda \in \mathbf{R}$ ставит в соответствие единственный элемент $\rho \in L$ (обозначаемый $\rho = \lambda \otimes x$ и называемый произведением действительного числа λ на x);

3°) операции сложения и умножения на действительное число удовлетворяют следующим восьми аксиомам:

1) $x \oplus y = y \oplus x$ для $\forall x, y \in L$;

2) $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ для $\forall x, y, z \in L$;

- 1) существует $0 \in L$ (называемый нулевым элементом в L) такой, что $x \oplus 0 = x$ для $\forall x \in L$;
- 2) для $\forall x \in L$ существует единственный элемент $(-x) \in L$ (называемый противоположным для x) такой, что $x \oplus (-x) = 0$;
- 5) $1 \otimes x = x$ для $\forall x \in L$;
- 6) $\lambda \otimes (\mu \otimes x) = (\lambda\mu) \otimes x$ для $\forall x \in L$ и $\forall \lambda, \mu \in R$;
- 7) $\lambda \otimes (x \oplus y) = \lambda \otimes x \oplus \lambda \otimes y$ для $\forall x, y \in L$ и $\forall \lambda \in R$;
- 8) $(\lambda + \mu) \otimes x = \lambda \otimes x \oplus \mu \otimes x$ для $\forall x \in L$ и $\forall \lambda, \mu \in R$.

Аксиомы 1) – 4) называются аксиомами сложения, аксиомы 5) , 6) – аксиомами умножения, аксиомы 7) , 8) - аксиомами дистрибутивности .

Элементы всякого линейного пространства обычно называют векторами и обозначают $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \dots$, а само линейное пространство называют **векторным пространством**.

Заметим, что в определении линейного пространства не говорится, каким именно образом определены операции сложения и умножения на действительное число. Существенно лишь то, что они должны удовлетворять перечисленным выше аксиомам 1) – 8).

2. Линейная зависимость векторов линейного пространства.

Рассмотрим произвольное линейное пространство L . Здесь и в дальнейшем операции сложения « \oplus » и умножения на число « \otimes » в нем будем обозначать проще: « $+$ » и « \cdot ».

Пусть $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$ - некоторые элементы этого пространства.

Определение. Выражение вида $\alpha_1 \cdot \overline{e_1} + \alpha_2 \cdot \overline{e_2} + \dots + \alpha_n \cdot \overline{e_n}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, называется **линейной комбинацией** векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называются коэффициентами этой линейной комбинации.

Определение. Система векторов $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n})$ линейного пространства L называется **линейно независимой**, если их линейная комбинация равна нулевому элементу пространства в том и только в том случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. В противном случае, т.е. когда равенство $\alpha_1 \cdot \overline{e_1} + \alpha_2 \cdot \overline{e_2} + \dots + \alpha_n \cdot \overline{e_n} = \overline{0}$ возможно и при условии, что хотя бы один из коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ отличен от нуля, векторы $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$ называются **линейно зависимыми**.

Итак, для линейно независимой системы векторов:

$$\alpha_1 \cdot \overline{e_1} + \alpha_2 \cdot \overline{e_2} + \dots + \alpha_n \cdot \overline{e_n} = \overline{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \dots \\ \alpha_n = 0 \end{cases} .$$

3. Размерность линейного пространства. Базис. Координаты

Определение. Линейное пространство L называется n -мерным, если в нем существует n линейно независимых векторов, а любые $(n+1)$ векторы этого пространства линейно зависимы.

Определение . Базисом n -мерного пространства L называется любая упорядоченная система из n линейно независимых векторов этого пространства.

Основная теорема о базисе:

Любой вектор пространства L может быть единственным образом разложен по базису $E = (\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n})$ этого пространства, и при этом, если $\overline{x} = \lambda_1 \overline{e_1} + \lambda_2 \overline{e_2} + \dots + \lambda_n \overline{e_n}$, то числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ называются координатами вектора \overline{x} в базисе E .

Теорема, обратная теореме о базисе:

Если в пространстве L существует n линейно независимых векторов $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n})$ таких, что любой вектор $\overline{x} \in L$ линейно выражается через $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$, то пространство является n -мерным, а система $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n})$ – одним из его базисов.

4. Матрица перехода от одного базиса к другому.

Пусть $\mathbf{E} = \{\bar{\mathbf{e}}_1; \bar{\mathbf{e}}_2; \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$ - некоторый базис в линейном пространстве \mathbf{L} .

Пусть $\mathbf{E}' = \{\bar{\mathbf{e}}'_1; \bar{\mathbf{e}}'_2; \dots, \bar{\mathbf{e}}'_n\}$ - какой-либо другой базис в этом же пространстве.

Матрицей перехода от базиса \mathbf{E} к базису \mathbf{E}' называется матрица \mathbf{T} , столбцами которой являются координаты векторов $\bar{\mathbf{e}}'_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) в базисе \mathbf{E} .

Пусть $\bar{\mathbf{x}}$ - некоторый вектор из линейного пространства \mathbf{L} .

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ - координаты этого вектора в базисе \mathbf{E} .

$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$ - координаты этого вектора в базисе \mathbf{E}' .

Тогда имеет место формула: $\mathbf{X}' = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{X}$.

5. Линейный оператор

Пусть каждому элементу \bar{x} из линейного пространства L некоторое преобразование \underline{A} ставит в соответствие элемент $\underline{A}(\bar{x})$ из этого же пространства.

Определение. Преобразование \underline{A} называется **линейным**, если:

1) для любых элементов $\bar{x}_1 \in L$ и $\bar{x}_2 \in L$ выполняется равенство

$$\underline{A}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = \underline{A}(\bar{x}_1) + \underline{A}(\bar{x}_2); \quad (1)$$

2) для любого числа $\lambda \in \mathbf{R}$ и любого элемента $\bar{x} \in L$ выполняется равенство

$$\underline{A}(\lambda \cdot \bar{x}) = \lambda \cdot \underline{A}(\bar{x}). \quad (2)$$

Замечания.

1) Линейное преобразование называется также **линейным оператором**.

2) В обозначении $\underline{A}(\bar{x})$ скобки обычно опускаются.

6. Преобразование матрицы оператора при переходе к новому базису

Пусть в линейном пространстве L дан некоторый базис $E = (\overline{e_1}; \overline{e_2}; \dots; \overline{e_n})$ и некоторый линейный оператор \underline{A} .

Найдем образы базисных векторов под действием оператора \underline{A} :

$$\begin{aligned}\underline{A}\overline{e_1} &= a_{11}\overline{e_1} + a_{21}\overline{e_2} + \dots + a_{n1}\overline{e_n} \\ \underline{A}\overline{e_2} &= a_{12}\overline{e_1} + a_{22}\overline{e_2} + \dots + a_{n2}\overline{e_n} \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \underline{A}\overline{e_n} &= a_{1n}\overline{e_1} + a_{2n}\overline{e_2} + \dots + a_{nn}\overline{e_n} .\end{aligned}$$

Тогда матрица, столбцами которой являются координатные столбцы

образов базисных векторов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdot \cdot \cdot a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdot \cdot \cdot a_{2n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdot \cdot \cdot a_{nn} \end{pmatrix} -$$

называется матрицей оператора \underline{A} в базисе E и обозначается A_E . При этом, если x_E представляет собой столбец координат вектора $\overline{x} \in L$, то столбец координат образа этого вектора будет находиться по формуле:

$$y_E = A_E \cdot x_E . \tag{1}$$

Пусть E' - какой-либо другой базис пространства L , T - матрица перехода от базиса E к базису E' . Тогда матрица оператора \underline{A} в базисе E' вычисляется по следующей формуле:

$$A_{E'} = T^{-1} \cdot A_E \cdot T . \tag{2}$$

7. Действия над линейными операторами

Рассмотрим множество линейных операторов, действующих в линейном пространстве L .

Определение 1. Суммой двух операторов \underline{A} и \underline{B} называется такой оператор \underline{C} , который на любой вектор \bar{x} пространства L действует по следующему правилу: $\underline{C}\bar{x} = \underline{A}\bar{x} + \underline{B}\bar{x}$.

В этом случае пишут: $\underline{C} = \underline{A} + \underline{B}$.

Определение 2. Произведением некоторого действительного числа λ на оператор \underline{A} называется такой оператор \underline{D} , который на каждый вектор \bar{x} пространства L действует по следующему правилу $\underline{D}\bar{x} = \lambda(\underline{A}\bar{x})$.

В этом случае пишут: $\underline{D} = \lambda\underline{A}$.

Определение 3. Оператором, противоположным к оператору \underline{A} , называется такой оператор $(-\underline{A})$, который на каждый вектор \bar{x} пространства L действует по следующему правилу: $(-\underline{A})\bar{x} = (-1)\underline{A}\bar{x}$.

В этом случае пишут: $-\underline{A} = (-1)\underline{A}$.

Определение 4. Произведением операторов \underline{A} и \underline{B} называется такой оператор \underline{F} , который на каждый вектор \bar{x} пространства L действует по следующему правилу: $\underline{F}\bar{x} = (\underline{A} \cdot \underline{B})\bar{x} = \underline{A}(\underline{B}\bar{x})$.

Рассмотрим некоторый базис $\mathbf{E} = \{\bar{\mathbf{e}}_1; \bar{\mathbf{e}}_2; \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$ в линейном пространстве

\mathbf{L} . Каждому линейному оператору соответствует матрица в выбранном базисе (см. пункт 6). Пусть $\underline{\mathbf{A}}$ и $\underline{\mathbf{B}}$ - линейные операторы в линейном пространстве \mathbf{L} .

Справедлива следующая теорема:

- 1) При сложении линейных операторов их матрицы складываются;
- 2) При умножении линейного оператора на число его матрица умножается на это число;
- 3) Произведению операторов $\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{B}}$ соответствует матрица, равная произведению матрицы оператора $\underline{\mathbf{A}}$ на матрицу оператора $\underline{\mathbf{B}}$.

8. Образ и ядро линейного оператора

Пусть в линейном пространстве L задан некоторый линейный оператор \underline{A} .

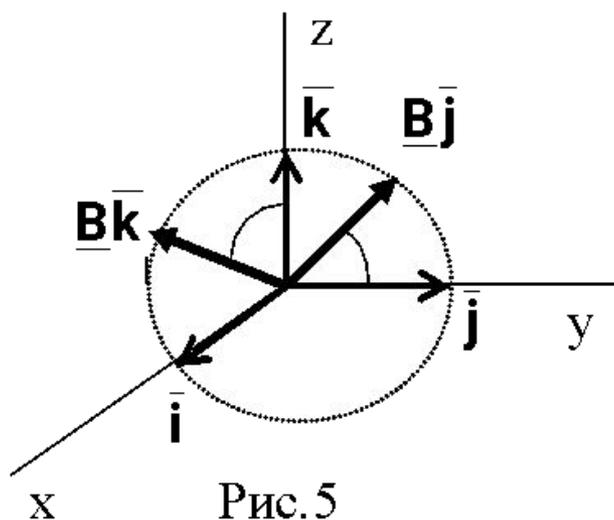
Определение 1. Множество векторов $\{\underline{A}\bar{x} \mid \bar{x} \in L\}$ называется образом (областью значений) оператора \underline{A} , действующего в этом пространстве, и обозначается $\mathbf{Jm}\underline{A}$.

Определение 2. Множество всех векторов $\bar{x} \in L$ таких, что $\underline{A}\bar{x} = \bar{0}$, называется ядром оператора и обозначается $\mathbf{Ker}\underline{A}$.

Чтобы найти матрицу оператора $\underline{\mathbf{B}}$ в базисе $\mathbf{E} = (\bar{\mathbf{i}}; \bar{\mathbf{j}}; \bar{\mathbf{k}})$, найдем образы базисных векторов. Учитывая, что поворот векторов происходит вокруг оси \mathbf{Ox} , образом вектора $\bar{\mathbf{i}}$ является вектор $\bar{\mathbf{i}}$, значит,

$$\underline{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{i}} = 1 \cdot \bar{\mathbf{i}} + 0 \cdot \bar{\mathbf{j}} + 0 \cdot \bar{\mathbf{k}}.$$

Образом вектора $\bar{\mathbf{j}}$ в результате действия оператора $\underline{\mathbf{B}}$ является вектор с координатами $(0; \cos \varphi; \sin \varphi)$, а образом вектора $\bar{\mathbf{k}}$ - вектор с координатами $(0; -\sin \varphi; \cos \varphi)$ (см. рис. 5), т.е.



$$\underline{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{j}} = 0 \cdot \bar{\mathbf{i}} + \cos \varphi \bar{\mathbf{j}} + \sin \varphi \bar{\mathbf{k}}$$

$$\underline{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{k}} = 0 \cdot \bar{\mathbf{i}} - \sin \varphi \bar{\mathbf{j}} + \cos \varphi \bar{\mathbf{k}}.$$

Теперь составим матрицу оператора $\underline{\mathbf{B}}$ (см. пункт 6):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Пусть произвольный вектор $\bar{\mathbf{x}}$ имеет координаты $(\mathbf{x}_1 ; \mathbf{x}_2 ; \mathbf{x}_3)$. По формуле (1) из пункта б вычислим столбец координат образа этого вектора:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \cos \varphi - \mathbf{x}_3 \sin \varphi \\ \mathbf{x}_2 \sin \varphi + \mathbf{x}_3 \cos \varphi \end{pmatrix}, \text{ т.е.}$$

$$\underline{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_1 \bar{\mathbf{i}} + (\mathbf{x}_2 \cos \varphi - \mathbf{x}_3 \sin \varphi) \bar{\mathbf{j}} + (\mathbf{x}_2 \sin \varphi + \mathbf{x}_3 \cos \varphi) \bar{\mathbf{k}}.$$

Тогда образом оператора $\underline{\mathbf{B}}$ является множество

$$\text{Im} \underline{\mathbf{B}} = \left\{ \mathbf{x}_1 \bar{\mathbf{i}} + (\mathbf{x}_2 \cos \varphi - \mathbf{x}_3 \sin \varphi) \bar{\mathbf{j}} + (\mathbf{x}_2 \sin \varphi + \mathbf{x}_3 \cos \varphi) \bar{\mathbf{k}} \mid \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \mathbf{R} \right\}.$$

Покажем, что это множество есть множество V^3 , т.е. каждый вектор V^3 является образом некоторого вектора $\bar{\mathbf{x}}$.

Пусть $\bar{\mathbf{y}}$ - произвольный вектор пространства V^3 с координатами $(\mathbf{y}_1 ; \mathbf{y}_2 ; \mathbf{y}_3)$. Докажем, что существует вектор $\bar{\mathbf{x}} \in V^3$ такой, что $\underline{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}}$.

Это равносильно следующему равенству:

$$\mathbf{x}_1 \bar{\mathbf{i}} + (\mathbf{x}_2 \cos \varphi - \mathbf{x}_3 \sin \varphi) \bar{\mathbf{j}} + (\mathbf{x}_2 \sin \varphi + \mathbf{x}_3 \cos \varphi) \bar{\mathbf{k}} =$$

$$= \mathbf{y}_1 \bar{\mathbf{i}} + \mathbf{y}_2 \bar{\mathbf{j}} + \mathbf{y}_3 \bar{\mathbf{k}} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{x}_2 \cos \varphi - \mathbf{x}_3 \sin \varphi = \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{x}_2 \sin \varphi + \mathbf{x}_3 \cos \varphi = \mathbf{y}_3 \end{cases}$$

Эта система является совместной, т.к. ее главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Таким образом, единственное решение этой системы $(\mathbf{x}_1 ; \mathbf{x}_2 ; \mathbf{x}_3)$ является координатами искомого вектора $\bar{\mathbf{x}}$.

Для нахождения ядра оператора $\underline{\mathbf{B}}$ решим уравнение

$$\underline{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \mathbf{x}_1 \bar{\mathbf{i}} + (\mathbf{x}_2 \cos \varphi - \mathbf{x}_3 \sin \varphi) \bar{\mathbf{j}} + (\mathbf{x}_2 \sin \varphi + \mathbf{x}_3 \cos \varphi) \bar{\mathbf{k}} =$$

$$= 0 \cdot \bar{\mathbf{i}} + 0 \cdot \bar{\mathbf{j}} + 0 \cdot \bar{\mathbf{k}} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_1 = 0 \\ \mathbf{x}_2 \cos \varphi - \mathbf{x}_3 \sin \varphi = 0 \\ \mathbf{x}_2 \sin \varphi + \mathbf{x}_3 \cos \varphi = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что эта однородная система имеет только нулевое решение:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = 0 \\ \mathbf{x}_2 = 0 \\ \mathbf{x}_3 = 0. \end{cases}$$

Поэтому ядро оператора $\underline{\mathbf{B}}$ состоит лишь из нулевого вектора:

$$\text{Ker } \underline{\mathbf{B}} = \{0 \cdot \bar{\mathbf{i}} + 0 \cdot \bar{\mathbf{j}} + 0 \cdot \bar{\mathbf{k}} = \bar{\mathbf{0}}\}.$$

9. Собственные векторы и собственные числа линейного оператора

Пусть L – некоторое линейное пространство, \underline{A} – линейный оператор, действующий в этом пространстве.

Определение. Ненулевой вектор \bar{x} называется **собственным вектором** линейного оператора \underline{A} с собственным числом λ , если $\underline{A}\bar{x} = \lambda\bar{x}$ (1), где λ – некоторое действительное число.

Пусть A – матрица оператора \underline{A} , E – единичная матрица того же размера, X – столбец координат вектора \bar{x} , 0 – нулевой столбец.

$$\text{Тогда } \underline{A}\bar{x} = \lambda\bar{x} \Leftrightarrow (A - \lambda E) \cdot X = 0, \text{ где } X \neq 0. \quad (2)$$

Отсюда следует, что число λ будет собственным числом оператора \underline{A} в том и только в том случае, когда $|A - \lambda E| = 0$. (3)

Уравнение (3) называется **характеристическим уравнением** для матрицы A . Итак, λ – собственное число \underline{A} тогда и только тогда, когда λ является корнем характеристического уравнения для матрицы A . Столбец координат X любого собственного вектора, соответствующего собственному числу λ , есть некоторое нетривиальное решение однородной системы (2).

10. Квадратичные формы

Определение. Квадратичной формой действительных переменных x_1, x_2, \dots, x_n называется однородный многочлен второй степени относительно этих переменных, т.е. многочлен, не содержащий свободного члена и членов первой степени.

Квадратичная форма имеет вид $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$, где

$a_{ij} = a_{ji}$ - коэффициенты квадратичной формы.

Например, при $n=2$:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11} \cdot x_1^2 + a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + a_{21} \cdot x_2 \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2^2 = \\ &= a_{11} \cdot x_1^2 + 2a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + a_{22} \cdot x_2^2; \end{aligned}$$

при $n=3$:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= a_{11} \cdot x_1^2 + a_{22} \cdot x_2^2 + a_{33} \cdot x_3^2 + 2a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + 2a_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + \\ &+ 2a_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 . \end{aligned}$$

Симметрическую матрицу ($a_{ij} = a_{ji}$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

составленную из коэффициентов квадратичной формы, называют **матрицей квадратичной формы**. Квадратичная форма называется **канонической** (иначе говоря, имеет канонический вид), если все $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Нахождение по данной квадратичной форме эквивалентной ей канонической квадратичной формы, называется **приведением квадратичной формы к каноническому виду**.

Преобразования, приводящие квадратичную форму к каноническому виду, могут быть найдены методом Якоби, Лагранжа, ортогональным преобразованием или другими.

Рассмотрим некоторые из них.

Метод Лагранжа –приведения квадратичной формы к каноническому виду – состоит в последовательном выделении в квадратичной форме полных квадратов.

Следует иметь в виду, что канонический вид квадратичной формы так же, как и линейное невырожденное преобразование, которое приводит квадратичную форму к каноническому виду, определяется неоднозначно. Однако при этом справедлив **закон инерции квадратичной формы**: число слагаемых с положительными каноническими коэффициентами и число слагаемых с отрицательными каноническими коэффициентами постоянно и не зависит от линейного невырожденного преобразования, приводящего квадратичную форму к каноническому виду.

Замечание. Если в записи квадратичной формы $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ отсутствует переменная x_k ($k < n$), т.е. $a_{mk} = 0$ ($1 \leq m \leq n$), то, записывая преобразование переменных, надо положить $x_k' = x_k$

11. Приведение квадратичной формы к каноническому виду при помощи ортогонального преобразования.

Ввиду того, что матрица квадратичной формы является **симметрической** (т.к. $a_{ij} = a_{ji}$), то корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ее характеристического уравнения являются действительными числами (см. свойства симметрической матрицы). Пусть $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_n$ - ортогональные нормированные собственные векторы, соответствующие характеристическим числам $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, в ортогональном базисе $I = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_n\}$.

В свою очередь, векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_n$ образуют некоторый ортонормированный базис. Разлагая вектор \overline{e}_i по базису E , составим матрицу перехода от базиса E к базису E' ($E \xrightarrow{T} E'$), и формулы преобразования координат векторов при переходе к новому ортонормированному базису из собственных векторов будут иметь вид: $x_E = T \cdot x_{E'}$.

Преобразовав при помощи этих формул квадратичную форму $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, получим квадратичную форму

$$f(x_1', x_2', \dots, x_n') = \lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2 + \dots + \lambda_n(x_n')^2,$$

не содержащую членов с произведениями $x_i' x_j'$, где $i \neq j$.

Принято говорить, что квадратичная форма при этом приведена к каноническому виду при помощи ортогонального преобразования.

Согласно сказанному, приведение квадратичной формы к каноническому виду может быть осуществлено по следующему плану.

Пусть в некотором базисе $\mathbf{E} = \{\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \dots, \overline{\mathbf{e}}_n\}$ дана квадратичная форма

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \text{ с матрицей } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \mathbf{a}_{nn} \end{pmatrix}.$$

1. Составляем характеристическое уравнение матрицы \mathbf{A} :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} - \lambda & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} - \lambda & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \dots & \mathbf{a}_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ и находим его корни } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n.$$

2. Находим n собственных векторов с собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ так, чтобы эти векторы были ортогональны друг к другу (это всегда возможно, так как преобразование является симметрическим, и, кроме того, собственные векторы симметрического оператора, соответствующие различным собственным числам, уже взаимно ортогональны), обозначим их соответственно через $\overline{\mathbf{e}}_1', \overline{\mathbf{e}}_2', \dots, \overline{\mathbf{e}}_n'$.

1. Переходим к базису из собственных векторов. В этом базисе матрица линейного преобразования будет иметь диагональный вид:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

и данная квадратичная форма получает канонический вид:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2', \dots, \mathbf{x}_n') = \lambda_1 (\mathbf{x}_1')^2 + \lambda_2 (\mathbf{x}_2')^2 + \dots + \lambda_n (\mathbf{x}_n')^2.$$

(при переходе к базису \mathbf{E}' координаты всех векторов преобразуются согласно матричному равенству $\mathbf{x}_{\mathbf{E}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}_{\mathbf{E}'}$, где \mathbf{T} – матрица перехода от базиса \mathbf{E} к базису \mathbf{E}').