Ekonometria

Wykład 5

dr hab. Małgorzata Radziukiewicz, prof. PSW Biała Podlaska

Estymacja – po co i dlaczego?

- Jeśli jesteśmy w stanie zebrać wszystkich informacji na temat interesującej nas zbiorowości wówczas do pełnego opisu wystarczą nam metody statystyki opisowej.
- W wielu jednak sytuacjach mówiąc o zbiorowości opieramy się na danych pochodzących z próby.
- Aby prawidłowo uogólniać wyniki z próby na populację generalną należy stosować metody statystyki matematycznej.

Estymacja – po co i dlaczego?

- Procedur uogólniania wyników z próby losowej na całą zbiorowość dostarcza dział wnioskowania statystycznego.
- **Estymacja** zatem to dział wnioskowania statystycznego będący zbiorem metod pozwalających na uogólnianie wyników badania próby losowej na **nieznaną** postać i parametry rozkładu zmiennej losowej całej populacji oraz szacowanie błędów wynikających z tego uogólnienia.

W zależności od szukanej cechy rozkładu można podzielić **metody estymacji** na dwie grupy:

- **Estymacja parametryczna** - metody znajdowania nieznanych wartości parametrów rozkładu
- **Estymacja nieparametryczna** - metody znajdowania postaci rozkładu populacji

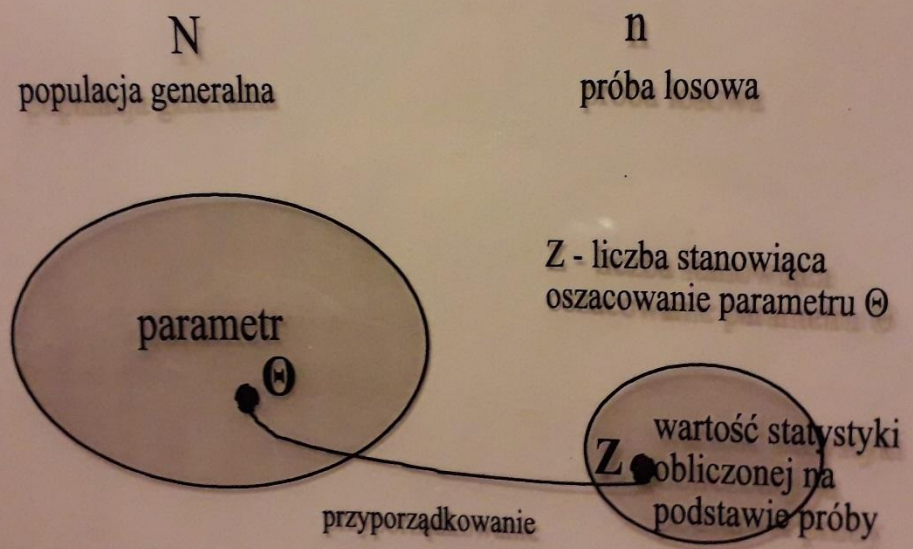
Estymacja – po co i dlaczego?

- Wnioskowanie przybiera postać:

1. **estymacji parametrów statystycznych** czyli **szacowania nieznanych wartości parametrów** np. średniej arytmetycznej **w zbiorowości generalnej**, odchylenia standardowego.
2. **testowania hipotez**, które z kolei dotyczy weryfikacji przypuszczeń **odnośnie określonego poziomu zmiennej losowej lub kształtu rozkładu w populacji generalnej**.

- Zatem losujemy z N-elementowej populacji generalnej n-elementową próbę losową
- Ze względu na niemożność poznania parametru θ z populacji generalnej wnioskujemy o wartości parametru θ w oparciu o zbadanie próby

Wnioskowanie o wartości parametru Θ (lub innych parametrów populacji generalnej) w oparciu o próbę losową nosi nazwę szacowania (lub estymacji) parametrów



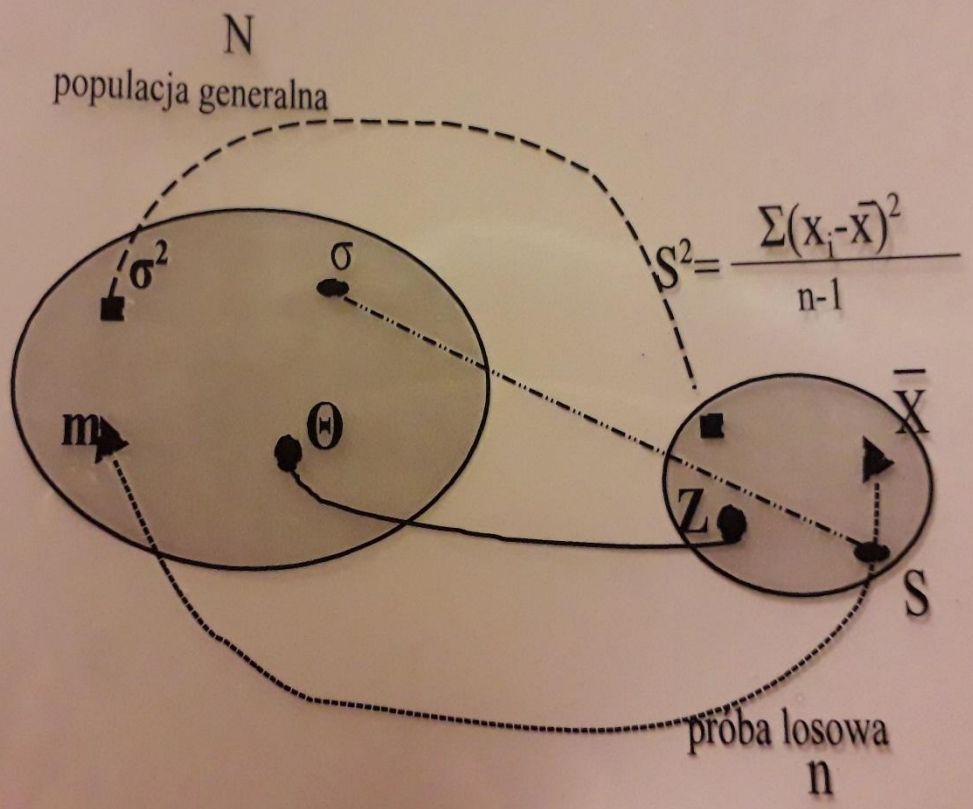
Θ - parametr w populacji generalnej

dwa podejścia szacowania (estymacji)

- 1. **punktowe szacowanie parametru θ** (lub innych parametrów populacji generalnej) – podajemy jedną liczbę odpowiadającą przypuszczalnej wartości parametru
- 2. **przedziałowe szacowanie parametru** – podajemy pewien przedział, w którym przypuszczalnie znajduje się prawdziwa wartość parametru

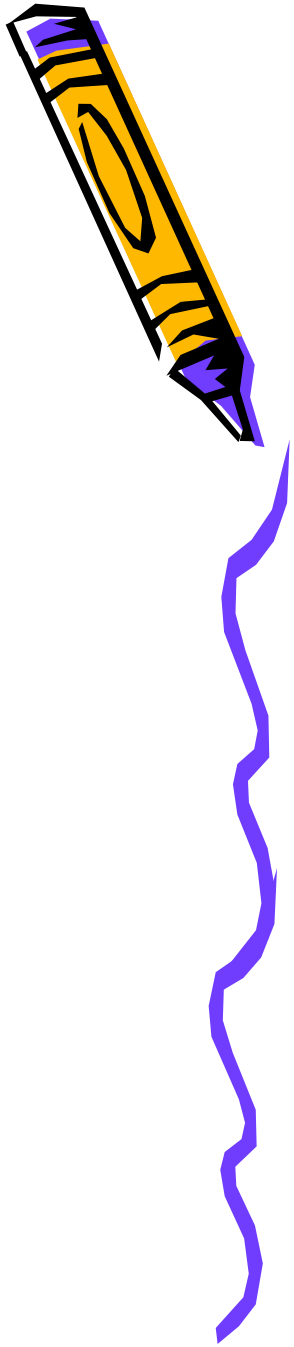
- Liczbą stanowiącą oszacowanie parametru θ musi być wartość jakiejś statystyki obliczonej na podstawie próby

Statystykę służącą do oszacowania parametru w populacji generalnej nazywamy estymatorem



Estymator – szacowany parametr

- **Estymator** – wielkość (charakterystyka, miara), obliczona na podstawie próby, służąca do oceny wartości nieznanych parametrów populacji generalnej.



- Estymator, jak każda statystyka z próby ma pewien rozkład.
- Zadanie: - **jak dobrać estymator, aby jego rozkład gwarantował najlepsze oszacowanie?**

Własności dobrego estymatora

- Wartości, jakie może przyjmować estymator Z parametru θ są różne dla różnych prób pochodzących z tej samej populacji;
- Dlatego też nie można oczekiwać, że otrzymany estymator Z będzie prawdziwą wartością estymowanego parametru θ;
- Powstaje więc błąd losowy parametru θ, który dla danej próby jest różnicą między oceną parametru dokonaną na podstawie tej próby a prawdziwa wartością parametru:

$$\varepsilon = Z - \theta$$

Pożądane cechy estymatora

- 1. **nieobciążoność** – aby estymator dawał gwarancję, że oszacowania nie będą w sposób systematyczny zaniżane ani zawyżane;
- 2. **zgodność** – w miarę wzrostu próby (n) prawdopodobieństwo, że różnica między estymatorem a parametrem jest dowolnie małe, zbliża się do jedności;
- 3. **efektywność** – z 2-óch nieobciążonych estymatorów określonego parametru ten jest najefektywniejszy, który ma mniejszą wariancję.

Estymator nieobciążony

- **Estymator nieobciążony** to ten, którego **przeciętna wartość jest dokładnie równa wartości szacowanego parametru** tzn. zachodzi równość:

$$»E(Z_n) = \theta$$

- Innymi słowy, przy wielokrotnym losowaniu próby średnia z wartości przyjmowanych przez estymator nieobciążony jest równa wartości szacowanego parametru.
- Obciążoność oznacza, że oszacowania dostarczone przez taki estymator są obarczone błędem systematycznym

Estymator obciążony

- **Obciążoność** oznacza, że oszacowania dostarczone przez taki estymator są obarczone błędem systematycznym. Różnica:

$$B_n = E\ (Z_n) - \theta$$

nazywa się obciążeniem estymatora.

Jeżeli $B_n > 0$ to estymator Z_n daje przeciętnie za wysokie oceny parametru θ;

Jeżeli $B_n < 0$ to estymator Z_n daje przeciętnie za niskie oceny parametru θ.

- Jeśli spełniony jest warunek:

$$\lim_{n\to\infty} B_n = 0$$

- co jest równoważne warunkowi:

$$\lim_{n\to\infty} E(Z_n) = 0$$

to estymator taki nazywa się **estymatorem asymptotycznie nieobciążonym**.

Uwaga! Postulat nieobciążoności estymatora parametru oznacza praktyczne żądanie, aby rozkład estymatora był scentrowany wokół prawdziwej wartości parametru, a więc by jego odchylenia od parametru miały charakter losowy.

Estymator - zgodność

- Estymator Z parametru θ nazywa się estymatorem zgodnym, jeśli **wraz ze wzrostem liczebności próbki jest on stochastycznie zbieżny do wartości estymowanego parametru θ**, tzn. jeśli jest spełniony warunek:

$$\lim_{n \to \infty} P\left|Z_n - \Theta\right| < \sigma = 1$$

gdzie σ jest dowolnie mała liczbą dodatnią.

- Zgodność estymatora Z oznacza, że wraz ze wzrostem liczebności próbki n, prawdopodobieństwo dowolnie małej różnicy między wartością estymatora Z a estymowanym parametrem θ dąży do 1.
- Wynika stąd, że warto powiększyć próbkę, ponieważ przy wzroście n rośnie prawdopodobieństwo tego, że wartość estymatora parametru Z będzie się niewiele różnić od prawdziwej wartości estymowanego parametru θ, powodując tym samym mały błąd estymacji.

Estymator - efektywność

- **Estymator nieobciążony, który ma najmniejszą wariancję**, nazywa się estymatorem najefektywniejszym.
- Przy estymacji punktowej sytuacja jest tym korzystniejsza, im wartość Z_n oscyluje bliżej σ, a więc im wariancja jest mniejsza.
- Wyrażenie:

$$\sigma^2(Z_n) = E(Z_n - E(Z_n))^2$$

jest wariancją estymatora Z_n.

- Uwaga! Estymator jest tym efektywniejszy, im mniejsza jest jego wariancja i odchylenie standardowe.

Ze względu na formę wyniku estymacji wyróżniamy:

- **Estymacja punktowa** –gdy szacujemy **liczbową wartość określonego parametru** rozkładu cechy w całej populacji
- **Estymacja przedziałowa** –gdy wyznaczamy **granice przedziału liczbowego, w których,** z określonym prawdopodobieństwem, **mieści się prawdziwa wartość szacowanego parametru**.

Wprowadzenie do problematyki estymacji parametrów modeli ekonometrycznych

- Problemy estymacji należą do trudnych zagadnień;
- Nie ma jednej uniwersalnej metody estymacji;
- Strona rachunkowa metod estymacji jest zawiła, więc dla większych modeli (z wieloma zmiennymi objaśniającymi) estymacja wymaga wykorzystania komputerów;
- Estymacja jest jednym z najważniejszych działów statystyki matematycznej
- Estymacja jest o tyle ważna, że **od estymacji zależy jakość modelu ekonometrycznego i jego praktyczna użyteczność**

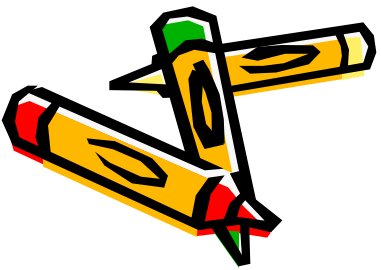
Estymacja parametrów modelu ekonometrycznego

- **Przedmiotem estymacji** w badaniu ekonometrycznym **są parametry** sformułowanych wcześniej modeli ekonometrycznych
- Ogólny zapis modelu ekonometrycznego:

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \xi) \quad (1)$$

gdzie:

- Y- zmienna objaśniana;
- $X_1, X_2, \ldots, X_k$ – zmienne objaśniające
- $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – parametry strukturalne modelu
- ξ – składnik losowy



Podstawą przeprowadzenia estymacji są dane statystyczne będące zaobserwowanymi wartościami zmiennych Y, X_1, X_2,..., X_k. Przedstawia się je zwykle w postaci:

- (n x 1) wymiarowego wektora Y

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} \qquad (2)$$

- (n x k) wymiarowej macierzy obserwacji zmiennych objaśniających

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Proces estymacji polega na obliczaniu ocen parametrów strukturalnych i stochastycznych modelu.

I. Parametry strukturalne (wielkości od których zależy wartość funkcji zmiennych objaśniających) są przedstawione w postaci:

- ((k+1) x 1) wymiarowego wektora parametrów strukturalnych

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ \alpha_k \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Estymacja sprowadza się do znalezienia wektora ocen

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_k \end{bmatrix} \qquad (5)$$

postać estymatora a jest różnie określana dla poszczególnych metod estymacji, ogólnie można zapisać, że wektor a jest funkcją:

$$a = f(X, Y) \qquad (6)$$

II. Drugą grupą parametrów modelu ekonometrycznego **podlegającą estymacji** są **parametry struktury stochastycznej.**

Informują one o rzędzie dokładności estymacji.

Można je podzielić na **2 grupy**:

1. **parametry rozkładu składnika losowego,**
2. **parametry estymatorów parametrów strukturalnych.**

Ad.1. **Składnik losowy modelu** jest przedstawiony w postaci:

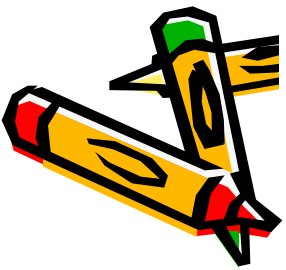
- (n x 1) wymiarowego wektora

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Oszacowania składników losowych noszą nazwę **reszt modelu** i przedstawiamy je w postaci:

- (n x 1) wymiarowego wektora

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ . \\ e_n \end{bmatrix} \qquad (8)$$



Na podstawie wektora reszt przeprowadza się estymację takich parametrów rozkładu składnika losowego jak:

- wartości oczekiwanej składnika losowego $E(\xi)$, której estymatorem jest średnia reszt $\bar{e}$,

- wariancji składnika losowego $\sigma^2(\xi)$, której estymatorem jest wariancja resztowa $\mathbf{S^2(e)}$,

- odchylenia standardowego składnika losowego $\sigma(\epsilon)$, którego estymatorem jest odchylenie standardowe reszt $\mathbf{S(e)}$.

Innymi parametrami rozkładu składnika losowego są kowariancje składników losowych $\sigma_{tl}(\xi) = E(\xi_t, \xi_l)$ t,l = 1,2,...n przedstawione w postaci:

- (n x n) wymiarowej macierzy

$$D^2(\xi) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(\xi) & \sigma_{12}(\xi) & \dots & \sigma_{1n}(\xi) \\ \sigma_{21}(\xi) & \sigma_{22}(\xi) & \dots & \sigma_{2n}(\xi) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \sigma_{n1}(\xi) & \sigma_{n2}(\xi) & \dots & \sigma_{nn}(\xi) \end{bmatrix} \qquad (9)$$

których estymatorami są elementy macierzy:

$$S^2(e) = \begin{bmatrix} s_{11}(e) & s_{12}(e) & \dots & s_{1n}(e) \\ s_{21}(e) & s_{22}(e) & \dots & s_{2n}(e) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ s_{n1}(e) & s_{n2}(e) & \dots & s_{nn}(e) \end{bmatrix} \qquad (10)$$

Ad.2. **Parametry estymatorów parametrów strukturalnych** są przedstawione w postaci:

- ((k+1)x(k+1)) wymiarowej macierzy wariancji i kowariancji estymatorów parametrów strukturalnych

$$D^2(a) = \begin{bmatrix} \sigma_{00}(a) & \sigma_{01}(a) & \dots & \sigma_{0k}(a) \\ \sigma_{10}(a) & \sigma_{11}(a) & \dots & \sigma_{1k}(a) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \sigma_{k0}(a) & \sigma_{k1}(a) & \dots & \sigma_{kk}(a) \end{bmatrix} \qquad (11)$$

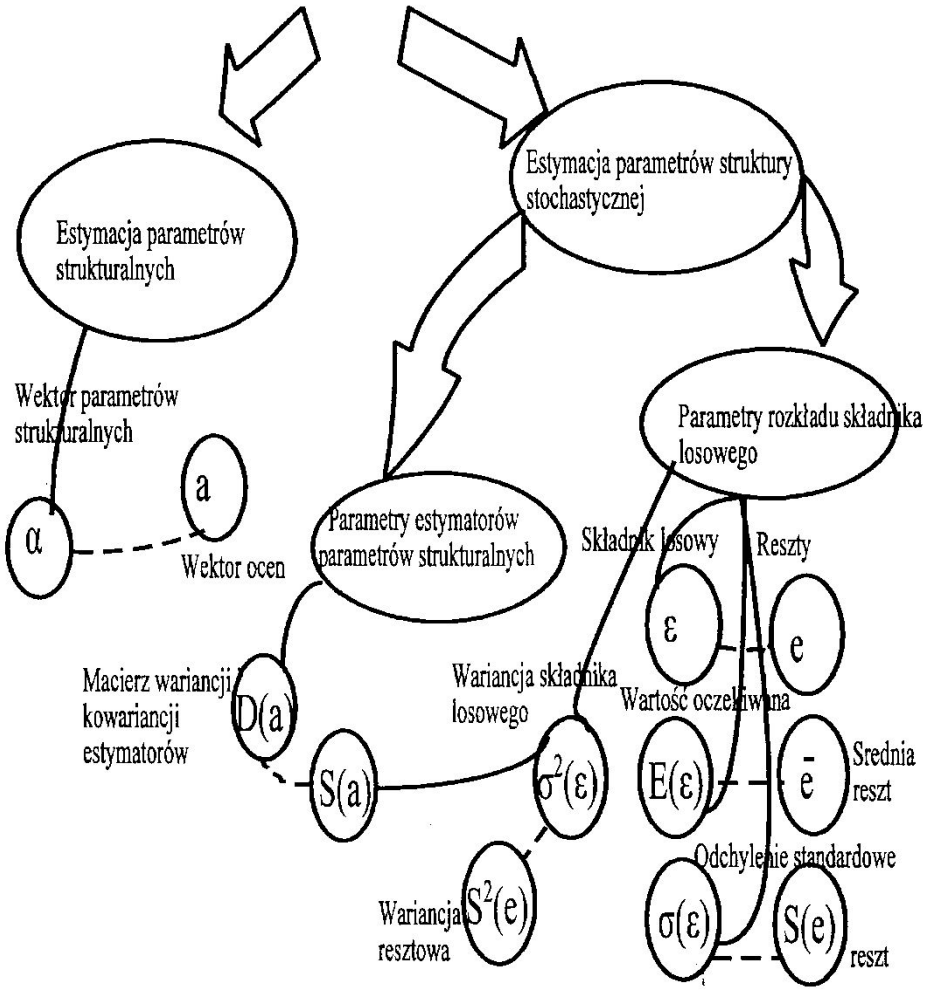
w której element na głównej przekątnej $\sigma_{ii}(a) = \sigma_i^2(a)$ oznacza wariancję estymatora a_i parametru strukturalnego α_i a element poza główną przekątną $\sigma_{ij}(a)$ gdzie $i \neq j$ oznacza kowariancję estymatorów a_i oraz a_j parametrów strukturalnych α_i i α_j.

Estymator macierzy $D^2(a)$ będziemy oznaczać jako:

$$\hat{S}(a) = \begin{bmatrix} s_{00}(a) & s_{01}(a) & \dots & s_{0k}(a) \\ s_{10}(a) & s_{11}(a) & \dots & s_{1k}(a) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ s_{k0}(a) & s_{k1}(a) & \dots & s_{kk}(a) \end{bmatrix} \qquad (12)$$

W praktyce korzysta się jedynie z elementów głównej przekątnej macierzy (12) tzn. z elementów $s_{ii}(a)=s_i^2(a)$, będących estymatorami wariancji estymatorów parametrów strukturalnych α_i (i=0,1,2..k). Pierwiastki tych elementów **$s_i(a)$** noszą nazwę **średnich błędów szacunku (estymacji) parametrów strukturalnych.**

Estymacja parametrów modelu ekonometrycznego



Estymacja parametrów modelu ekonometrycznego

- Z reguły estymatory uzyskuje się w wyniku zastosowania procedury numerycznej zwanej **metodą najmniejszych kwadratów**.
- Estymatory mają wówczas pożądane własności, o ile spełnione są pewne istotne założenia.
- Założenia te dotyczą głównie:
- - specyfikacji modelu i
- - własności składnika losowego.

Założenia: model i dane

- Założenie 1

Model jest liniowy względem parametrów tj.:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1t} + \alpha_2 X_{2t} + \ldots\ldots + \alpha_k X_{kt} + \xi_t$$

gdzie t= 1,2,….n

- Założenie 2
- Zmienne objaśniające są nielosowe

Zmienna Y jest losowa, bowiem jest funkcją losowego ξ.

Przyjmijmy Y- koszt produkcji, X – wartość produkcji. W modelu mogą zmieniać się rolami.

Uwaga! Niekonsekwencja klasycznej ekonometrii – w efekcie Y

Założenia: model i dane

- Założenie 3
- Liczba obserwacji n (wielkość próby n) jest większa od liczby parametrów do oszacowania:

$$n > k+1$$

- Parametrów jest k+1:

  wyraz wolny + k parametrów przy zmiennych X

- W praktyce żądamy aby n była liczbą kilkakrotnie większą od k+1 (np. dwukrotnie)

Założenia: model i dane

- Założenie 4
- **Żadna ze zmiennych nie jest kombinacją liniową innych zmiennych objaśniających** (włączając w ten zbiór także „sztuczną" zmienną $X_0 = 1$, która „stoi" przy wyrazie wolnym modelu)
- Jest to **założenie o braku współliniowości**.
- Nie istnieje zależność liniowa między wartościami z próby dla jakichkolwiek 2-óch, lub większej ilości zmiennych objaśniających.
- Chodzi to, aby żadna ze zmiennych nie wnosiła do modelu tych informacji które już są wniesione przez inne zmienne.

Założenia: składnik losowy modelu

- Założenie 5
- Składnik losowy ξ jest zmienną losową
- **Składnik losowy ma wartość oczekiwaną równa zeru** dla wszystkich i=1,2,…., n:

$$E(\xi_i) = 0$$

- Oznacza to, że czynniki nie uwzględnione w modelu nie oddziałują w systematyczny sposób na średnią wartość zmiennej Y:

  - wpływy dodatnie (+) i wpływy ujemne(-) „znoszą się" i w sumie efekt jest zerowy.

Założenia: składnik losowy modelu

- Założenie 6
- Składnik losowy ξ jest zmienną losową
- **Wariancja zmiennej losowej ξ_i jest taka sama dla wszystkich obserwacji**

$$D^2(\xi_i) = \sigma^2$$

dla i=1,2,…., n:

- Przyjmujemy, że zmienne losowe mają jednakową dyspersję. Oznacza to, że wpływy na Y czynników nie ujętych w modelu mają takie same rozproszenie (niezależnie od numeru obserwacji)
- Założenie o jednakowych wariancjach nosi nazwę założenia o **homoscedastyczności**.
- Jego przeciwieństwem jest założenie o **heteroscedastyczności** (nierówna dyspersja)

Założenia: składnik losowy modelu

- Założenie 7
- Składnik losowy ξ jest zmienną losową
- **Zmienne losowej ξ_i są nieskorelowane, czyli nie występuje autokorelacja składników losowych):**

$$\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sigma_{i,j}(\xi) = 0 \quad \text{dla } i \neq j$$

$i=1,2,\ldots, n;\ j=1,2,\ldots, n$:

- Oznacza to, że wpływy na Y czynników nie ujętych w modelu są nieskorelowane pomiędzy różnymi obserwacjami
- Jest to założenie często niespełnione w modelach trendu

Założenia: składnik losowy modelu

- Założenie 8
- **Każdy ze składników losowych ξ_i ma rozkład normalny.**
- Biorąc pod uwagę założenia 4i 5 oznacza to, że ξ_i **ma rozkład N (0, σ^2) dla i= 1,2,…..,n**

- Niekiedy założenia 1-7 uzupełnia się o założenie 8 a model określa się wówczas mianem **klasycznego modelu normalnej regresji liniowej**
- Założenie 8 ułatwia konstruowanie hipotez statystycznych służących weryfikacji modelu
- Założenia dotyczace składnika losowego są nieznane, sprawdzone mogą być dopiero po oszacowaniu parametrów modelu

Model jest liniowy względem parametrów tj.:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1t} + \alpha_2 X_{2t} + \ldots\ldots + \alpha_k X_{kt} + \xi_t$$

gdzie t= 1,2,….n

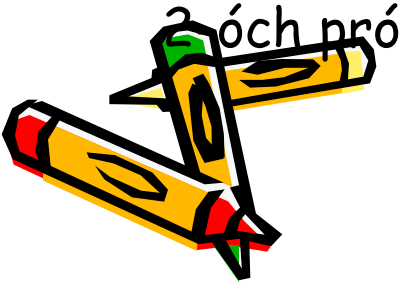
Wielkości parametrów α_j (j= 0,1,2…,k) w modelu liniowym są niewiadomymi'

Po to by uzyskać wiedzę na temat wielkości parametrów modelu musimy posłużyć się danymi empirycznymi Y i X_k (k=1,2,….,n).

Na podstawie danych szacujemy nieznane parametry α_i na postawie reakcji zmiennej zależnej na zmiany wielkości zmiennych niezależnych zaobserwowanych w próbie.

To co uzyskujemy na podstawie danych jest jedynie szacunkiem i będzie mniej lub bardziej dokładnym przybliżeniem prawdziwych wielkości parametrów α_i.

W rezultacie oszacowania parametrów uzyskane na podstawie 2 óch prób z reguły będą różne.



- **Wniosek:**
- Oszacowania nielosowych parametrów są losowe.
- Będąc jedynie niedokładnym przybliżeniem prawdziwych wielkości parametrów mogą różnić się w zależności od wylosowanej próby.
- Niedokładności w oszacowaniach wielkości parametrów wynikają z zaburzeń losowych (ξ), które uniemożliwiają dokładne zmierzenie parametrów modelu.

Wartości dopasowane i reszty

- Znajdowanie estymatorów (oszacowań) parametrów α_0 , α_1 .... α_k (j=0,1,2....k) określamy mianem regresji liniowej y_i na x_{1i} , …, x_{ki} .
- Zgodnie z przyjętą konwencją *oszacowania* nieznanych parametrów α_0 , α_1 .... α_k uzyskanych za pomocą MNK oznaczamy zwykle α_0 , α_1 .... α_k .
- Przewidywane na podstawie oszacowanego modelu wartości zmiennej zależnej Y **nazywamy wartością teoretyczną** (dopasowaną):
- $\hat{y} = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + ... + a_k X_k$
- Wartości dopasowane różnią się od rzeczywistych wartości Y, ponieważ w modelu oszacowanym zamiast prawdziwych (nieznanych) wartości parametrów α_0 , α_1 .... α_k używamy ich oszacowań α_0 , α_1 .... α_k i pomijamy błąd losowy

Wartości dopasowane i reszty

- Reszty definiujemy jako różnicę między wartością zaobserwowaną zmiennej zależnej (objaśnianej) Y, a wartością dopasowaną tej zmiennej:

$$e = Y - (a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + ... + a_k X_k)$$

$$e = Y - a_0 - a_1 X_1 - a_2 X_2 - ..... - a_k X_k$$

$$e = Y - \hat{Y}$$

Relację między resztami, obserwacjami i oszacowaniami parametrów można zapisać w sposób następujący:

$$Y = \hat{Y} + e$$

$$= a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + ... + a_k X_k + e$$

Taki zapis pokazuje „pokrewieństwo" między α_0 , α_1 ... α_k i a_0 , a_1 .... a_k oraz między ξ i e.

Tak jak a_0 , a_1 .... a_k są oszacowaniami α_0 , α_1 ... α_k tak reszty e stanowią oszacowania składnika losowego ξ.

Uwaga! Reszty e nie są równe ξ

Wartości dopasowane i reszty

- Model jest tym lepiej dopasowany, im mniejsza jest odległość wartości teoretycznych od wartości obserwowanych

$$e = Y - \hat{Y}$$

- Najlepiej dopasowanym jest ten model, w którym reszty są - co do wartości bezwzględnych – najmniejsze.
- Estymator MNK znajdujemy, szukając takich a_0 , a_1.. a_k dla których łączna odległość $e = Y - \hat{Y}$ jest najmniejsza

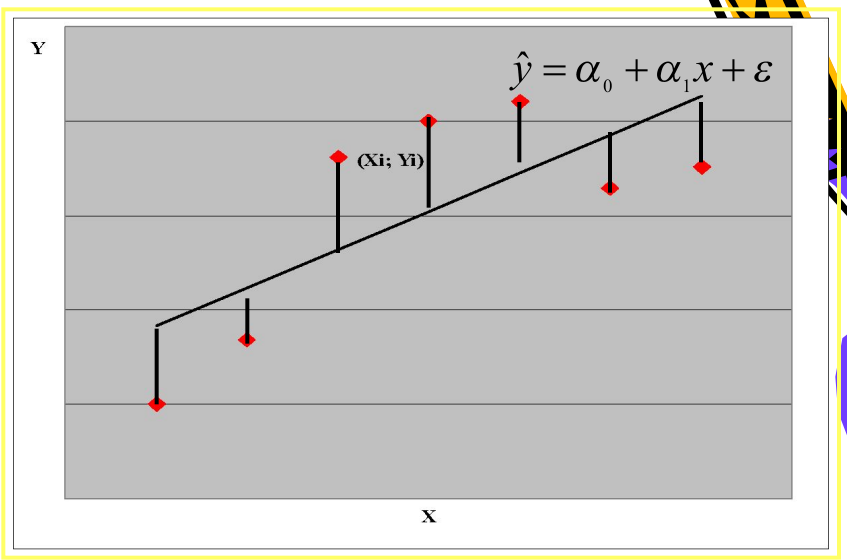
Reasumując:

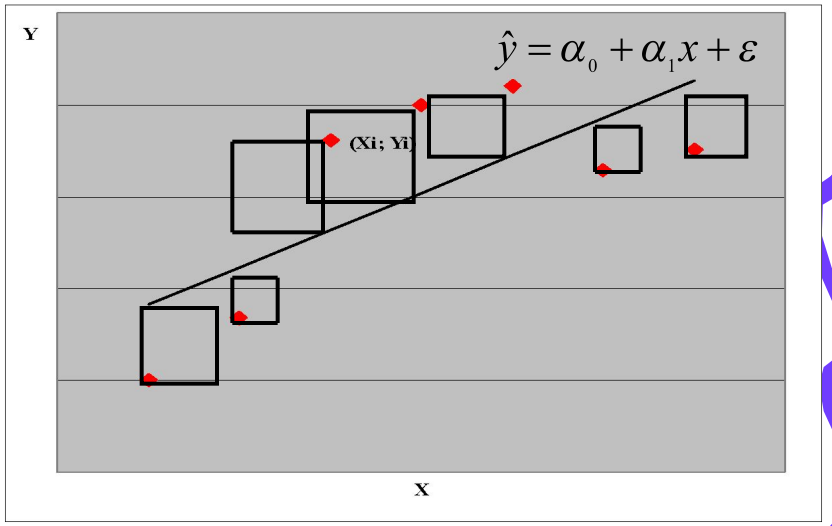
- Do poszukiwania najlepiej dopasowanej prostej stosuje się kryterium minimalizacji sumy kwadratów odchyleń.
- Metoda wyznaczania parametrów prostej oparta na tym kryterium nosi nazwę **metody najmniejszych kwadratów** (MNK).
- Stosując MNK wyznacza się na podstawie danych (x_i, y_i), i=1,2,…, n, parametry α_0 i α_1 prostej tak, by suma kwadratów odchyleń y_i od $\alpha_0 + \alpha_1 x_i$ była najmniejsza:

$$S = \psi = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 \rightarrow \min$$

Rysunek 1 i 2. Ilustracja metody najmniejszych kwadratów





Mamy model liniowy z jedną zmienną objasniającą

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \xi$$

Wielkości parametrów α_i (i= 0,1) w modelu liniowym są niewiadomymi.

Po to, by uzyskać wiedzę na temat wielkości parametrów modelu musimy posłużyć się danymi empirycznymi.

Parametry α_i (i= 0,1) szacujemy na podstawie danych:

Estymacja

- Y jest wektorem zaobserwowanych wartości zmiennej objaśnianej:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Estymacja

- X jest macierzą zaobserwowanych wartości zmiennych objaśniających, przy czym przyjmuje się, że w modelu obok wymienionych zmiennych występuje zmienna $x_{01}=1$ (przy parametrze α_0), a więc:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} \\ 1 & x_{12} \\ . & . \\ . & . \\ 1 & x_{1n} \end{bmatrix}$$

- **Funkcja kryterium** (minimalizujemy sumę kwadratów reszt e, przy czym reszty to odchylenia wartości teoretycznych od wartości empirycznych y) w zapisie skalarnym ma postać:

$$\psi = \sum_{t=1}^{n} (y - \hat{y})^2 = \sum_{t=1}^{n} (y - \hat{y})^2 = \min$$

Estymacja

- Wektor ocen a parametrów strukturalnych α otrzymujemy obliczając pochodną funkcji ψ względem wektora a i przyrównując ją do zera.
- Wzór na wektor ocen parametrów strukturalnych przybiera ostatecznie postać:

$$a = (X^T X)^{-1} X^T y$$

- Podstawiając do wzoru:

$$X^T X = \begin{bmatrix} n & \sum x_{1t} \\ \sum x_{1t} & \sum x_{1t}^2 \end{bmatrix} \quad oraz \quad X^T y = \begin{bmatrix} \sum y_t \\ \sum x_{1t} y_t \end{bmatrix}$$

Estymacja

- otrzymamy wektor ocen parametrów strukturalnych funkcji liniowej:

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$