

Доказательство числовых неравенств

***Ученик, который учится без
желания, подобен птице без
крыльев.***

Саади

персидский мыслитель и
писатель, 13 в.н.э.



Основные утверждения

1. Свойство транзитивности неравенств.

Для любых действительных чисел a , b и c из справедливости неравенств $a < b$ и $b < c$ следует справедливость неравенства $a < c$.

2. Одноименные числовые неравенства можно почленно складывать.

Для любых действительных чисел a , b , c и d из справедливости неравенств $a < b$ и $c < d$ следует справедливость неравенства $a + c < b + d$.

Основные утверждения

3. Одноимённые числовые неравенства с положительными членами можно почленно перемножать.

Для любых положительных чисел a , b , c и d из справедливости неравенств $a < b$ и $c < d$ следует справедливость неравенства $ac < bd$.

4. К обеим частям неравенства можно прибавить любое число.

Для любых действительных чисел a , b , и c из справедливости неравенства $a < b$ следует справедливость неравенства $a + c < b + c$.

Основные утверждения

5. Неравенство можно умножить или разделить на любое положительное число.

Для любых действительных чисел a , b и любого положительного числа c из справедливости неравенства $a < b$ следует справедливость неравенства $ac < bc$.

ПРИМЕР 1.

Докажем, что для любых положительных чисел a и b справедливо неравенство

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. (1)$$

Доказательство.

Так как $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ — действительные числа для любых положительных чисел a и b , то неравенство

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \quad (2)$$

справедливо для любых положительных чисел a и b .

Применяя формулу квадрата разности и учитывая, что для любых положительных чисел a и b верны

равенства $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0. \quad (3)$

Перепишем неравенство (2) в виде $(\sqrt{a})^2 = a, (\sqrt{b})^2 = b.$

На основании утверждения 4 из справедливости (3) следует справедливость неравенства

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad (4)$$

На основании утверждения 5 из справедливости (4) следует справедливость неравенства (1), ч.т.д.

ПРИМЕР 1.

Среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического.

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{a b}$$

ПРИМЕР 2.

Докажем, что для любых положительных x справедливо неравенство

$$x + \frac{1}{x} \geq 2. \quad (2)$$

Доказательство.

Умножим обе части неравенства (2)

на

$$\frac{1}{2},$$

Получим неравенство

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq 1,$$

в левой части которого записано среднее арифметическое чисел

$$x \text{ и } \frac{1}{x},$$

а в правой- их среднее геометрическое.

Неравенство (2) справедливо на основании неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим.

ПРИМЕР 3.

Докажем, что для любых положительных чисел a , b и c справедливо неравенство

$$(a + b)(a + c)(b + c) \geq 8abc. \quad (3)$$

Доказательств

о.
На основании неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим (пример 1), имеем

$$(a + b) \geq 2\sqrt{ab},$$

$$(a + c) \geq 2\sqrt{ac},$$

$$(b + c) \geq 2\sqrt{bc}.$$

Перемножая почленно эти неравенства, на основании утверждения 3 получим справедливость неравенства (3), ч.т.д.

ПРИМЕР 4.

Докажем, что для любых положительных чисел a и b справедливо неравенство $4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$ (4)

Доказательств

о.

Рассмотрим выражение

$A = 4(a^3 + b^3) - (a + b)^3$. Преобразуем его

$$\begin{aligned} A &= 4(a + b)(a^2 - ab + b^2) - (a + b)(a + b)^2 = \\ &= (a + b)(4a^2 - 4ab + 4b^2 - a^2 - 2ab - b^2) = \\ &= (a + b)(3a^2 - 6ab + 3b^2) = \\ &= 3(a + b)(a^2 - 2ab + b^2) = 3(a + b)(a - b)^2. \end{aligned}$$

Т.к. $a > 0$, $b > 0$, то $A \geq 0$. Из неравенства

$$4(a^3 + b^3) - (a + b)^3 \geq 0$$

Следует справедливость неравенства (4) ч. т. д.

ПРИМЕР 5.

Докажем, что для любого натурального числа n справедливо неравенство

$$\frac{2}{(2n+1)^2} < \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}. \quad (5)$$

Доказательство.
Левую часть неравенства запишем в виде
рассмотрим правую часть

$$\frac{2}{4n^2 + 4n + 1},$$

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{n+1-n}{2n(n+1)} = \frac{1}{2n(n+1)} = \frac{1}{2n^2 + 2n}$$

$$\text{Т. к. } 4n^2 + 4n + 1 > 4n^2 + 4n > 0$$

для любого натурального числа n , то по утверждению 5

$$\frac{2}{4n^2 + 4n + 1} < \frac{2}{4n^2 + 4n} \quad \text{и неравенство (5) доказано.}$$

ПРИМЕР 6.

Докажем, что для любого натурального числа n

справедливо неравенство
$$\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}. \quad (6)$$

Доказательство.

Применяя неравенство

(пример 5) и утверждение 2

$$\frac{2}{(2n+1)^2} < \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}. \quad (5)$$

При $n = 1$ $\frac{2}{9} < \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$, при $n = 2$ $\frac{2}{25} < \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$, при $n = 3$ $\frac{2}{49} < \frac{1}{6} - \frac{1}{8}$ т.д.

Получим неравенство

$$2 \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} \right) < \frac{1}{2}.$$

Поделив обе части этого неравенства на 2, получим неравенство (6), ч. т. д.

ПРИМЕР 7.

Пусть a и b – любые действительные числа, такие, что $a + b = 2$.

Доказать,
что справедливо неравенство $a^4 + b^4 \geq 2. \quad (7)$

Доказательство.

Обозначим $a = 1 + c$, тогда $b = 1 - c$, где c – некоторое действительное число, и

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 &= (1 + c)^4 + (1 - c)^4 = (1 + c)^2(1 + c)^2 + (1 - c)^1(1 - c)^2 = \\ &= (1 + 2c + c^2)(1 + 2c + c^2) + (1 - 2c + c^2)(1 - 2c + c^2) = \\ &= 1 + 2c + c^2 + 2c + 4c^2 + 2c^3 + c^2 + 2c^3 + c^4 + \\ &+ 1 - 2c + c^2 - 2c + 4c^2 - 2c^3 + c^2 - 2c^3 + c^4 = 2 + 12c^2 + 2c^4 \geq 2 \\ \text{т.к. } 12c^2 + 2c^4 &\geq 0 \end{aligned}$$

для любого действительного числа c ,
Значит неравенство (7) справедливо, ч.т.д.

Используемые ресурсы

- Алгебра и начала анализа: учебник для 10 кл. общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни / [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин].
- М. : просвещение, 2008.