

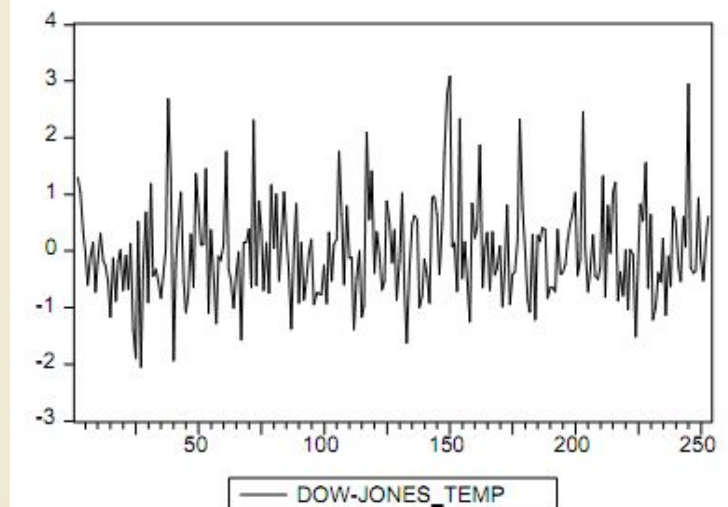
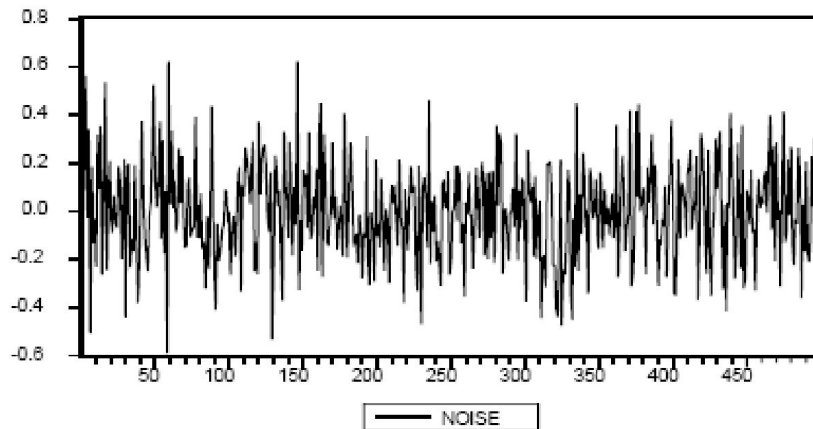
# НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

1. Примеры нестационарных В.р.
2. Нестационарные ARMA модели
3. Тесты на стационарность
4. Методология Бокса-Дженкинса

Под стационарным рядом на практике часто подразумевают временной ряд  $x_t$ , у которого

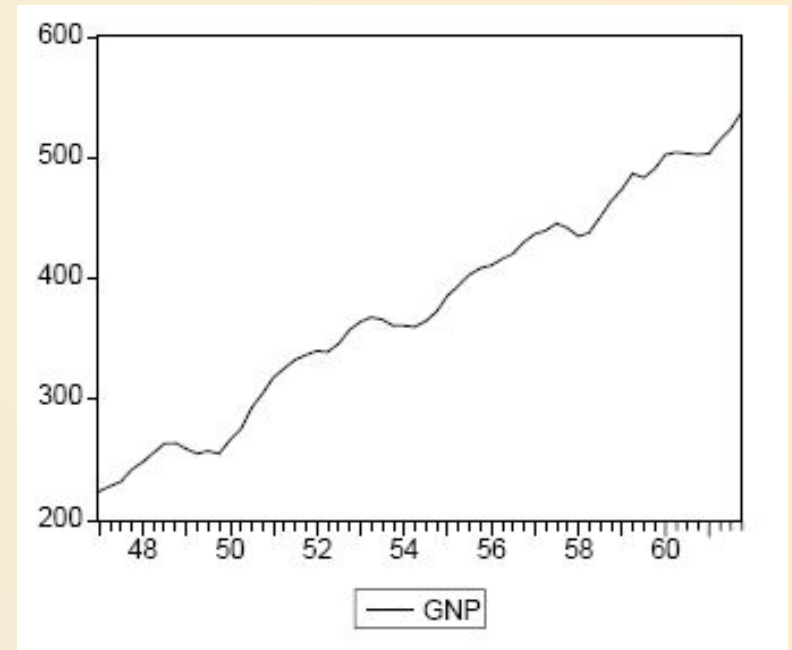
- $E(X_t) \equiv \mu$ ,
- $D(X_t) \equiv \sigma^2$ ,
- $Cov(X_t, X_{t+\tau}) = \gamma(\tau)$  для любых  $t$  и  $\tau$ .

Ряд, для которого выполнены указанные три условия, называют *стационарным в широком смысле (слабо стационарным, стационарным второго порядка или ковариационно стационарным)*.

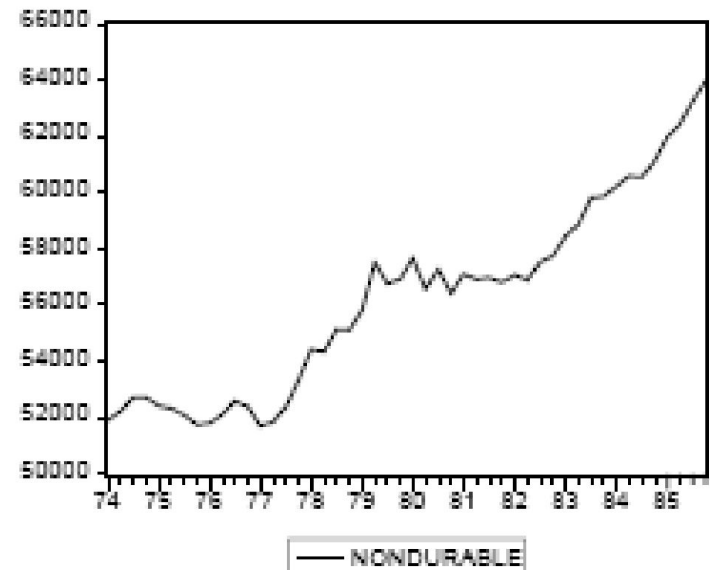


## Пример.

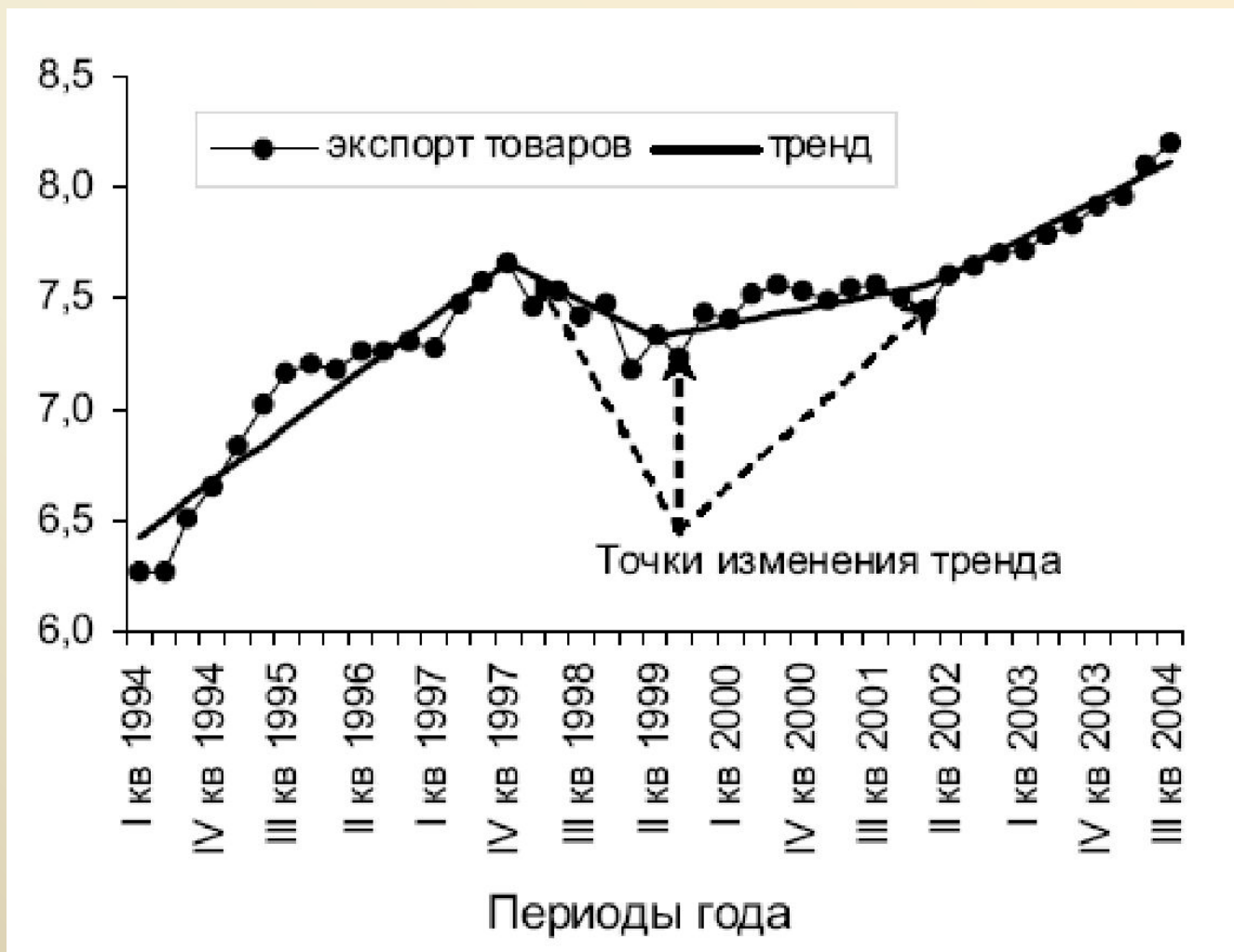
1. Рассмотрим статистические данные о величине валового национального продукта (GNP – gross national product) в США за период с первого квартала 1947 г. по четвертый квартал 1961 г.



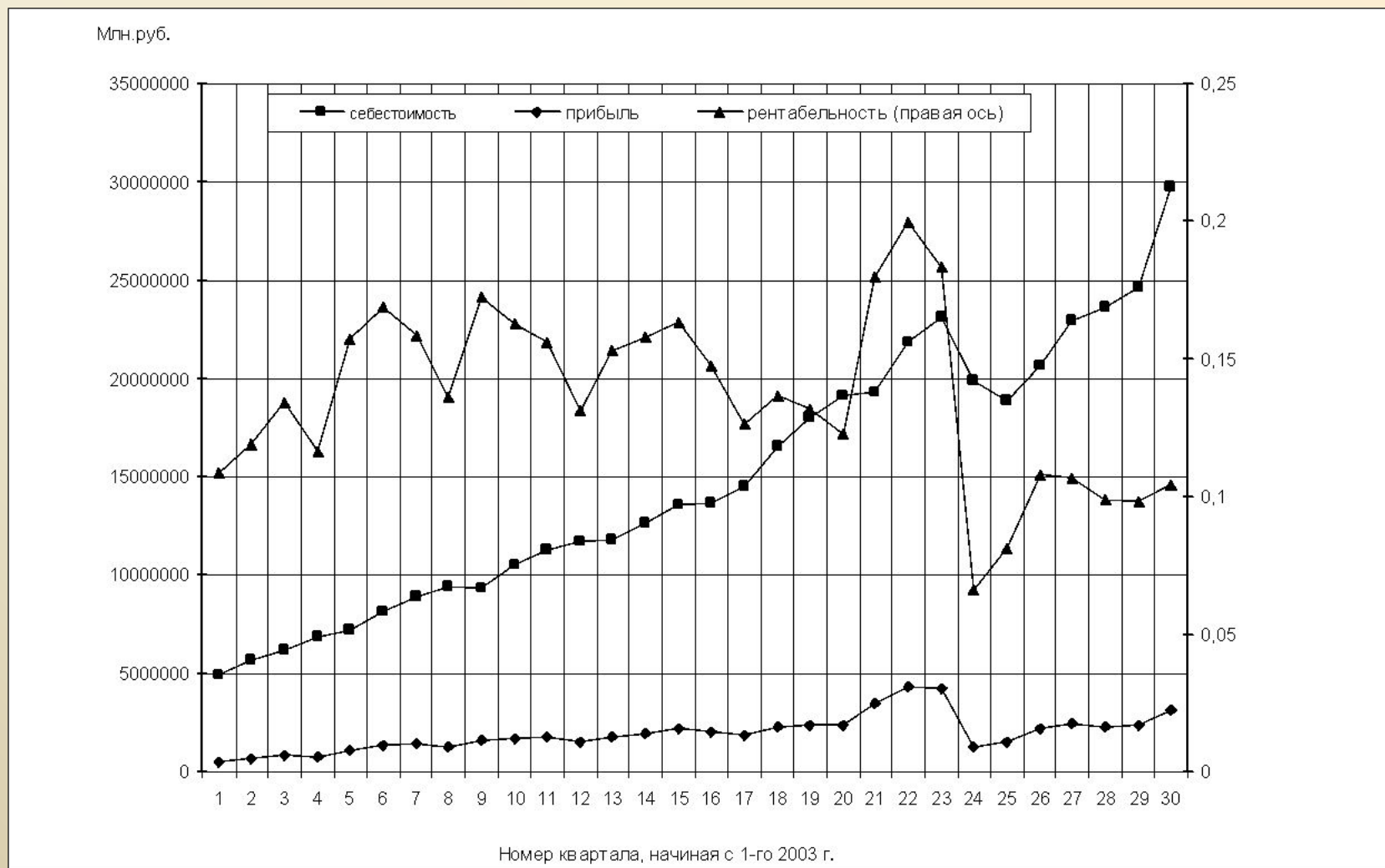
2. BP (NONDURABLE) представляет статистические данные об объеме потребительских расходов на товары кратковременного пользования и услуги в Великобритании за период с первого квартала 1974 г. по четвертый квартал 1985 г.:



3. В.р. экспорта товаров РБ на интервале с 1994 по 2004 г. (можно наблюдать 4 различных тренда)



#### 4. Себестоимость, прибыль, рентабельность реализованной продукции, товаров, услуг в промышленности



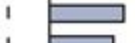

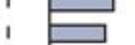















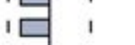





# Correlogram of SEBEST





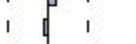

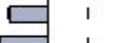

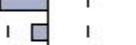


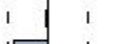
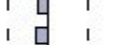

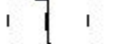



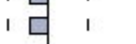
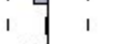
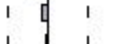
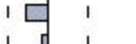


Date: 12/01/10 Time: 13:08

Sample: 2003Q1 2010Q2

Included observations: 30

| Autocorrelation   | Partial Correlation   | AC | PAC    | Q-Stat | Prob   |       |
|---|---|----|--------|--------|--------|-------|
|  |  | 1  | 0.794  | 0.794  | 20.886 | 0.000 |
|  |  | 2  | 0.654  | 0.064  | 35.567 | 0.000 |
|  |  | 3  | 0.565  | 0.075  | 46.911 | 0.000 |
|  |  | 4  | 0.479  | -0.008 | 55.394 | 0.000 |
|  |  | 5  | 0.371  | -0.096 | 60.671 | 0.000 |
|  |  | 6  | 0.333  | 0.113  | 65.116 | 0.000 |
|  |  | 7  | 0.347  | 0.146  | 70.141 | 0.000 |
|  |  | 8  | 0.287  | -0.122 | 73.742 | 0.000 |
|  |  | 9  | 0.140  | -0.294 | 74.638 | 0.000 |
|  |  | 10 | 0.053  | -0.052 | 74.771 | 0.000 |
|  |  | 11 | -0.021 | -0.042 | 74.794 | 0.000 |
|  |  | 12 | -0.097 | -0.004 | 75.296 | 0.000 |
|  |  | 13 | -0.215 | -0.218 | 77.894 | 0.000 |
|  |  | 14 | -0.246 | -0.043 | 81.531 | 0.000 |
|  |  | 15 | -0.261 | -0.008 | 85.902 | 0.000 |
|  |  | 16 | -0.304 | 0.011  | 92.236 | 0.000 |

| Variable           | Coefficient | Std. Error            | t-Statistic | Prob.  |
|--------------------|-------------|-----------------------|-------------|--------|
| C                  | 1793434.    | 85353.03              | 21.01195    | 0.0000 |
| @TREND             | 53809.56    | 5054.400              | 10.64608    | 0.0000 |
| R-squared          | 0.801895    | Mean dependent var    | 2573672.    |        |
| Adjusted R-squared | 0.794820    | S.D. dependent var    | 528995.0    |        |
| S.E. of regression | 239618.0    | Akaike info criterion | 27.67582    |        |
| Sum squared resid  | 1.61E+12    | Schwarz criterion     | 27.76923    |        |
| Log likelihood     | -413.1373   | Hannan-Quinn criter.  | 27.70570    |        |
| F-statistic        | 113.3391    | Durbin-Watson stat    | 0.730352    |        |
| Prob(F-statistic)  | 0.000000    |                       |             |        |

| Autocorrelation   | Partial Correlation   | AC | PAC    | Q-Stat | Prob   |       |
|---|---|----|--------|--------|--------|-------|
|    |    | 1  | 0.601  | 0.601  | 11.973 | 0.001 |
|    |    | 2  | 0.223  | -0.217 | 13.680 | 0.001 |
|    |    | 3  | 0.078  | 0.074  | 13.897 | 0.003 |
|   |   | 4  | -0.039 | -0.135 | 13.952 | 0.007 |
|  |  | 5  | -0.343 | -0.417 | 18.476 | 0.002 |
|  |  | 6  | -0.431 | 0.014  | 25.924 | 0.000 |
|  |  | 7  | -0.154 | 0.294  | 26.914 | 0.000 |
|  |  | 8  | 0.037  | -0.011 | 26.972 | 0.001 |
|  |  | 9  | -0.088 | -0.305 | 27.327 | 0.001 |
|  |  | 10 | -0.099 | -0.036 | 27.798 | 0.002 |
|  |  | 11 | -0.023 | -0.171 | 27.824 | 0.003 |
|  |  | 12 | 0.020  | 0.177  | 27.846 | 0.006 |
|  |  | 13 | -0.169 | -0.128 | 29.468 | 0.006 |
|  |  | 14 | -0.165 | -0.020 | 31.111 | 0.005 |
|  |  | 15 | -0.052 | -0.199 | 31.285 | 0.008 |
|  |  | 16 | -0.016 | -0.052 | 31.303 | 0.012 |



Для ряда GNP коррелограмма  
имеет вид

| Autocorrelation | Partial Correlation |   | AC    | PAC    | Q-Stat | Prob  |
|-----------------|---------------------|---|-------|--------|--------|-------|
| . *****         | . *****             | 1 | 0.946 | 0.946  | 56.419 | 0.000 |
| . *****         | . . .               | 2 | 0.893 | -0.021 | 107.52 | 0.000 |
| . *****         | . . .               | 3 | 0.840 | -0.024 | 153.55 | 0.000 |
| . *****         | . . .               | 4 | 0.791 | 0.013  | 195.14 | 0.000 |
| . *****         | . . .               | 5 | 0.743 | -0.021 | 232.52 | 0.000 |
| . *****         | . . .               | 6 | 0.696 | -0.022 | 265.90 | 0.000 |

Для ряда NonDurable  
коррелограмма имеет вид

| ACF     | PACF    |   | AC    | PAC    | Q-Stat | Prob  |
|---------|---------|---|-------|--------|--------|-------|
| . ***** | . ***** | 1 | 0.917 | 0.917  | 42.921 | 0.000 |
| . ***** | . . .   | 2 | 0.843 | 0.014  | 79.976 | 0.000 |
| . ***** | . . .   | 3 | 0.774 | -0.004 | 111.92 | 0.000 |
| . ***** | . . .   | 4 | 0.704 | -0.040 | 138.99 | 0.000 |
| . ***** | . . .   | 5 | 0.643 | 0.013  | 162.09 | 0.000 |
| . ****  | . . .   | 6 | 0.581 | -0.041 | 181.36 | 0.000 |
| . ****  | * . .   | 7 | 0.510 | -0.090 | 196.57 | 0.000 |
| . ***   | . . .   | 8 | 0.439 | -0.050 | 208.14 | 0.000 |

На основании коррелограмм предполагаем идентификацию В.р. как AR(1) + тренд:

$$X_t = \alpha + \beta t + a_1 X_{t-1} + u_t$$

Приводимые в таблицах оценки константы (C) и коэффициента при переменной  $t$  (T) соответствуют оценкам  $\mu$  и  $\gamma$  в представлении

$$(X_t - \mu - \gamma t) = a_1(X_{t-1} - \mu - \gamma(t-1)) + a_2(X_{t-2} - \mu - \gamma(t-2)) + u_t.$$

Эти оценки получаются применением нелинейного метода наименьших квадратов. При этом обозначение AR(1) указывает на оценку для  $a_1$ , а AR(2) – на оценку для  $a_2$ .



Dependent Variable: GNP

Method: Least Squares

Sample(adjusted): 1947:2 1961:4

Included observations: 59 after adjusting endpoints

Convergence achieved after 3 iterations

| Variable          | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob.  |
|-------------------|-------------|------------|-------------|--------|
| C                 | 216.0630    | 11.30237   | 19.11661    | 0.0000 |
| T                 | 5.269279    | 0.281754   | 18.70170    | 0.0000 |
| AR(1)             | 0.846976    | 0.072723   | 11.64665    | 0.0000 |
| Inverted AR Roots | .85         |            |             |        |

Т.к. остатки атокоррелированы, то:

Dependent Variable: GNP

Method: Least Squares

Sample(adjusted): 1947:3 1961:4

Included observations: 58 after adjusting endpoints

Convergence achieved after 3 iterations

| Variable          | Coefficient<br>t   | Std. Error | t-Statistic | Prob.  |
|-------------------|--------------------|------------|-------------|--------|
| C                 | 217.7399           | 5.054473   | 43.07865    | 0.0000 |
| T                 | 5.221538           | 0.140436   | 37.18089    | 0.0000 |
| AR(1)             | 1.380274           | 0.109452   | 12.61078    | 0.0000 |
| AR(2)             | -0.630066          | 0.109453   | -5.756490   | 0.0000 |
| Inverted AR Roots | .69 -.39i .69+.39i |            |             |        |

К построению модели для ряда GNP можно подойти и иначе. Сначала произвести детрендрование ряда, оценивая модель

$$X_t = \mu + \gamma t + u_t$$

| Variable           | Coefficient | Std. Error        | t-Statistic | Prob.    |
|--------------------|-------------|-------------------|-------------|----------|
| C                  | 218.4825    | 2.640153          | 82.75373    | 0.0000   |
| T                  | 5.181995    | 0.075274          | 68.84144    | 0.0000   |
| Durbin-Watson stat | 0.316211    | Prob(F-statistic) |             | 0.000000 |

Коррелограмма остатков:

| Autocorrelation | Partial Correlation |    | AC     | PAC    | Q-Stat | Prob  |
|-----------------|---------------------|----|--------|--------|--------|-------|
| . *****         | . *****             | 1  | 0.836  | 0.836  | 44.028 | 0.000 |
| . ****          | **** .              | 2  | 0.531  | -0.554 | 62.115 | 0.000 |
| . *.            | ** .                | 3  | 0.183  | -0.210 | 64.294 | 0.000 |
| .* .            | . .                 | 4  | -0.100 | 0.044  | 64.960 | 0.000 |
| ** .            | . .                 | 5  | -0.272 | -0.004 | 69.949 | 0.000 |
| *** .           | .* .                | 6  | -0.339 | -0.082 | 77.846 | 0.000 |
| *** .           | .* .                | 7  | -0.350 | -0.169 | 86.446 | 0.000 |
| *** .           | .* .                | 8  | -0.332 | -0.072 | 94.332 | 0.000 |
| ** .            | . .                 | 9  | -0.281 | 0.058  | 100.07 | 0.000 |
| ** .            | .* .                | 10 | -0.234 | -0.177 | 104.16 | 0.000 |
| ** .            | *** .               | 11 | -0.234 | -0.321 | 108.32 | 0.000 |
| ** .            | . *.                | 12 | -0.226 | 0.103  | 112.26 | 0.000 |

позволяет идентифицировать этот ряд как AR(2). После этого можно строить AR(2) модель для (оцененного) детрендрованного ряда

$$X_{t\_detrended} = X_t - 218.4825 - 5.181995 t :$$

| Variable | Coeff.    | Std. Error | t-Statistic | Prob.  |
|----------|-----------|------------|-------------|--------|
| AR(1)    | 1.379966  | 0.107605   | 12.82435    | 0.0000 |
| AR(2)    | -0.630426 | 0.107605   | -5.858722   | 0.0000 |

$$\begin{aligned} T. o.: X_t - 218.4825 - 5.181995 t = \\ = 1.379966 (X_{t-1} - 218.4825 - 5.181995(t-1)) - \\ - 0.630426 (X_{t-2} - 218.4825 - 5.181995(t-2)), \end{aligned}$$

$$X_t = 55.338375 + 1.297882 t + 1.379966 X_{t-1} - 0.630426 X_{t-2} + e_t .$$

В то же время, по приведенным результатам оценивания модели

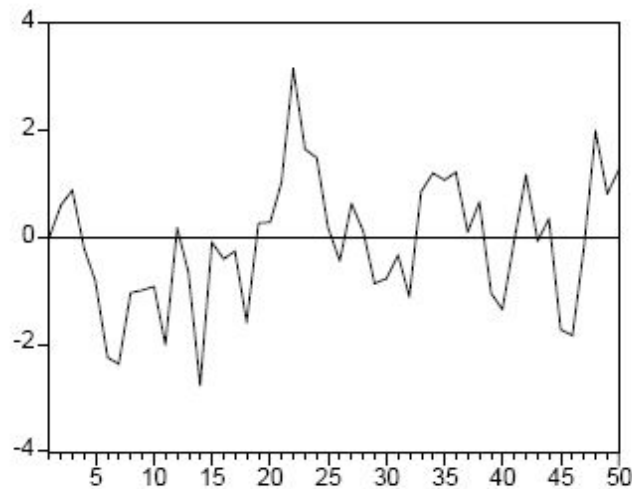
$$X_t = \alpha + \beta t + a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + u_t$$

$$\begin{aligned} X_t - 217.7399 - 5.221538 t = \\ = 1.380274 (X_{t-1} - 217.7399 - 5.221538(t-1)) \\ - 0.630066 (X_{t-2} - 217.7399 - 5.221538(t-2)), \end{aligned}$$

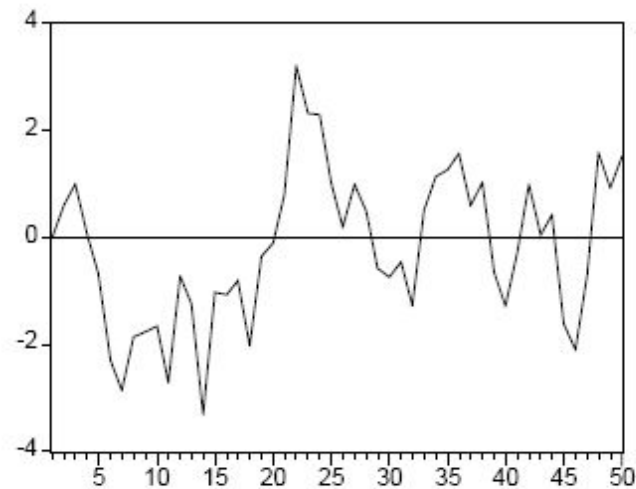
$$\text{Или } X_t = 55.017011 + 1.304298 t + 1.380274 X_{t-1} - 0.630066 X_{t-2} + e_t ,$$

## Нестационарные ARMA модели

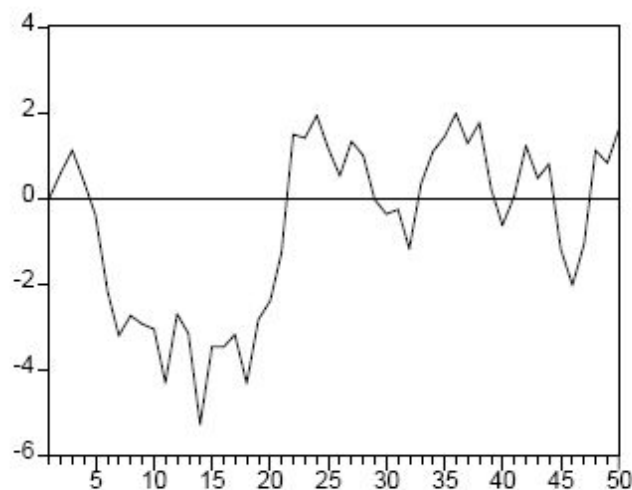
$$X_t = a_1 X_{t-1} + \varepsilon_t.$$



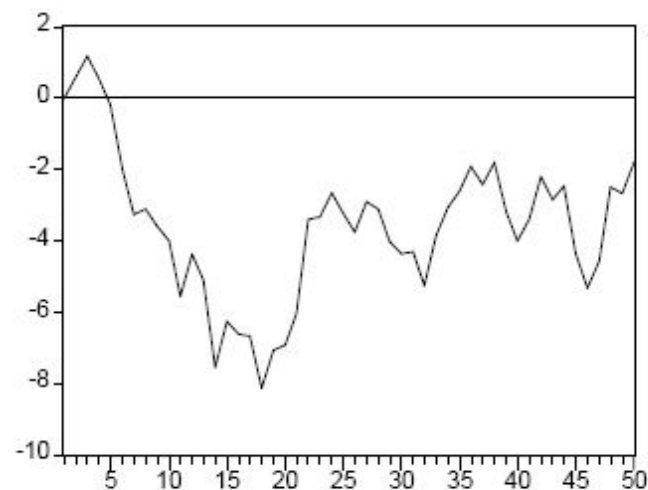
$a_1 = 0.5$



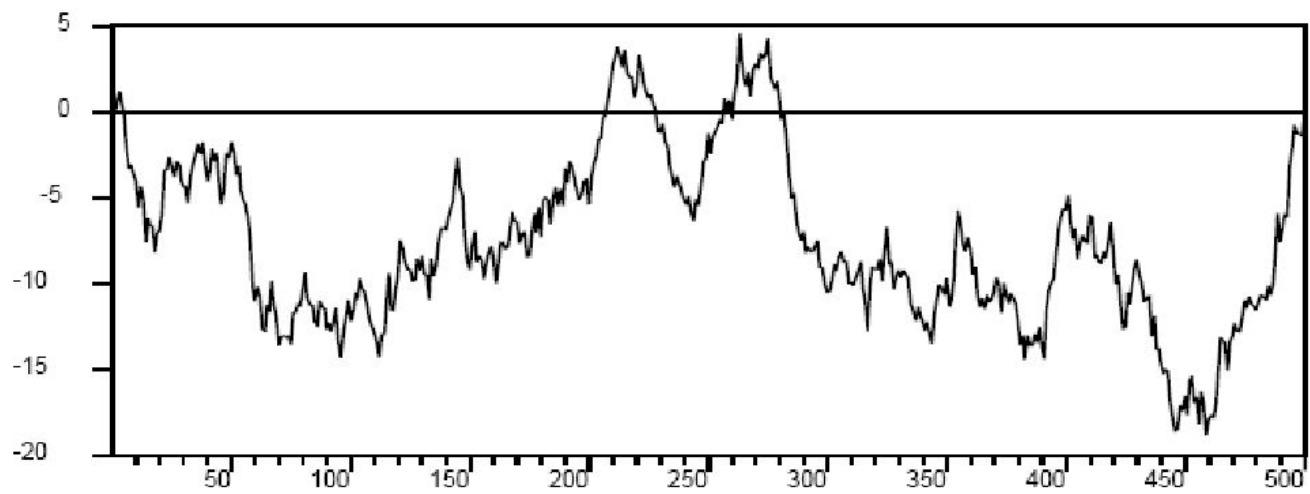
$a_1 = 0.7$



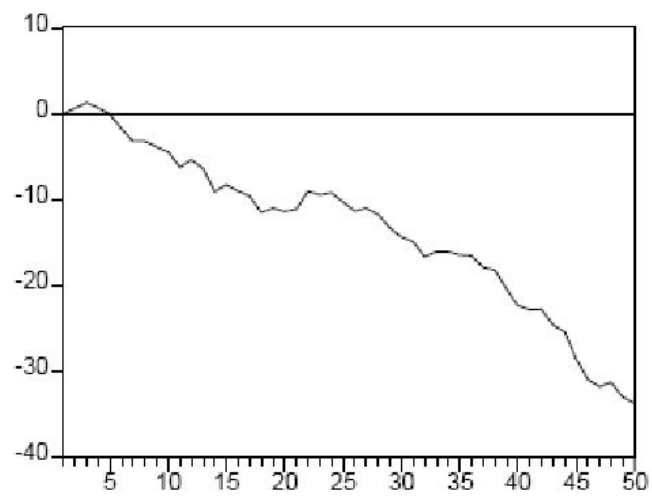
$a_1 = 0.9$



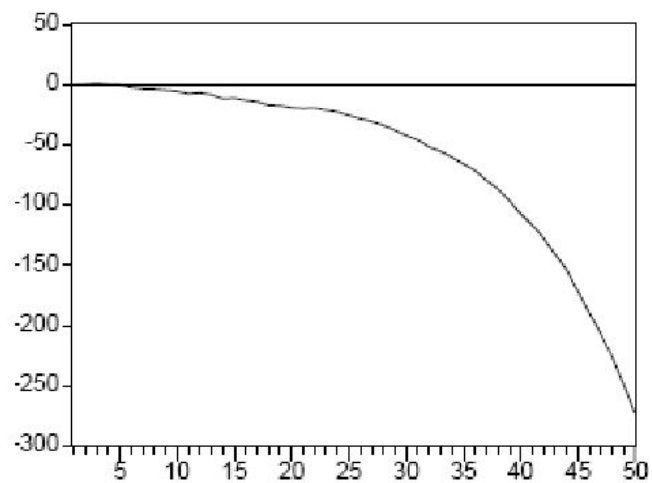
$a_1 = 1$



$a_1 = 1$



$a_1 = 1.05$

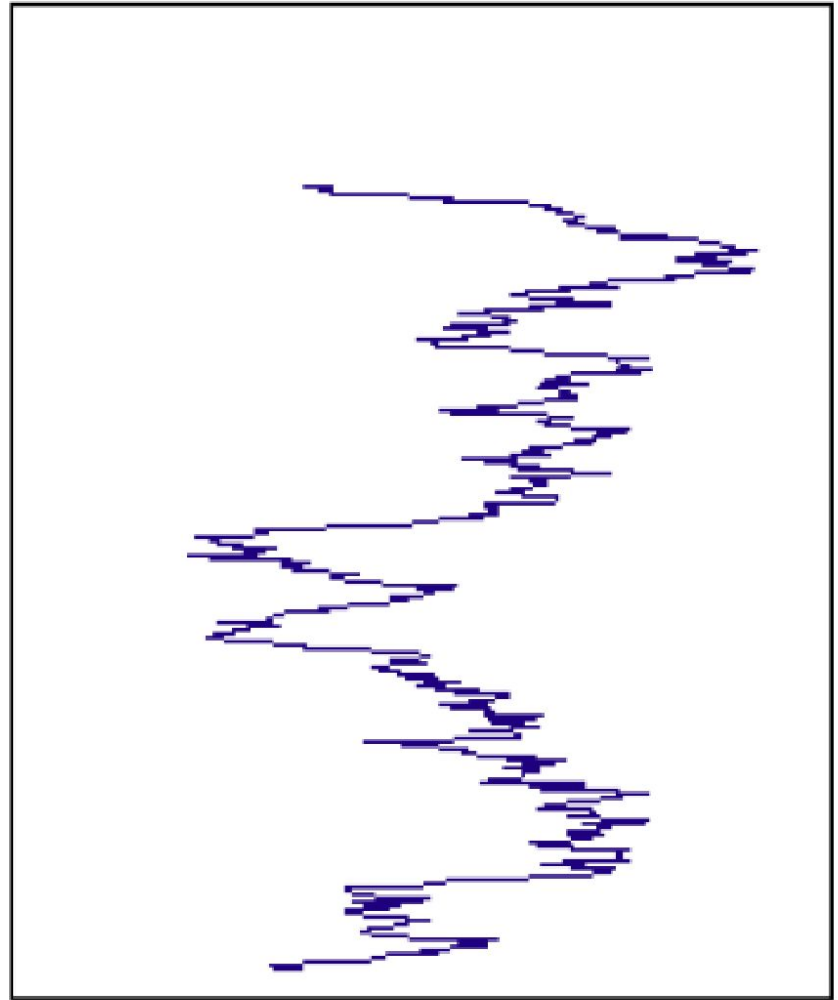


$a_1 = 1.1$

| Модель        |         | Кол-во<br>пересечений<br>нулевого уровня | Среднее<br>значение |
|---------------|---------|--|---------------------|
| Noise шум)    | (белый  | 25                                       | – 0.046             |
| AR(1)<br>0.5  | $a_1 =$ | 14                                       | – 0.097             |
| AR(1)<br>0.7  | $a_1 =$ | 8  | – 0.191             |
| AR(1)<br>0.9  | $a_1 =$ | 8  | – 0.649             |
| AR(1)<br>1.0  | $a_1 =$ | 1  | – 3.582             |
| AR(1)<br>1.05 | $a_1 =$ | 1  | – 13.511            |
| AR(1)<br>1.1  | $a_1 =$ | 1  | – 59.621            |

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

*случайное блуждание (процесс  
случайного блуждания –  
random walk).*





Рассмотрим процесс AR(1):  $X_t = a_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$

Представим его в виде:  $X_t - X_{t-1} = a_1 X_{t-1} - X_{t-1} + \varepsilon_t = (a_1 - 1)X_{t-1} +$

$$\text{или } \overset{\varepsilon}{\Delta} X_t = \varphi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

где  $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ ,  $\varphi = a_1 - 1$ .

При  $a_1 = 1$  имеем  $\varphi = a_1 - 1 = 0$ , и приращения  $\Delta X_t$  ряда  $X_t$  образуют процесс белого шума, так что условное математическое ожидание  $\Delta X_t$  при фиксированном (наблюдаемом) значении  $X_{t-1} = x_{t-1}$  не зависит от  $x_{t-1}$  и равно 0. Соответственно, при фиксированном (наблюдаемом) значении  $X_{t-1} = x_{t-1}$ , условное математическое ожидание случайной величины  $X_t = \Delta X_t + X_{t-1}$  равно  $x_{t-1}$ .

При  $a_1 > 1$  имеем  $\varphi = a_1 - 1 > 0$ , и условное математическое ожидание  $\Delta X_t$  при фиксированном (наблюдаемом) значении  $X_{t-1} = x_{t-1}$ , равно  $E(\Delta X_t | X_{t-1} = x_{t-1}) = \varphi x_{t-1}$ , имеет знак, совпадающий со знаком  $x_{t-1}$ . Таким образом, если  $x_{t-1} > 0$ , то ожидаемое значение следующего наблюдения  $X_t = x_t$  больше значения  $x_{t-1}$ , а если  $x_{t-1} < 0$ , то ожидаемое значение следующего наблюдения  $X_t = x_t$  меньше значения  $x_{t-1}$ .

При  $0 < a_1 < 1$  имеем  $\varphi = a_1 - 1 < 0$ , и условное математическое ожидание  $\Delta X_t$  при фиксированном (наблюдаемом) значении  $X_{t-1} = x_{t-1}$ , равное  $E(\Delta X_t | X_{t-1} = x_{t-1}) = \varphi x_{t-1}$ , имеет знак, противоположный знаку  $x_{t-1}$ . Таким образом, если  $x_{t-1} > 0$ , то ожидаемое значение следующего наблюдения  $X_t = x_t$  меньше значения  $x_{t-1}$ , а если  $x_{t-1} < 0$ , то ожидаемое значение следующего наблюдения  $X_t = x_t$  больше значения  $x_{t-1}$ .

Рассмотрим процесс случайного блуждания

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

со стартовым значением  $X_0 = x_0$ . Мы можем представить  $X_t$  в виде

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t-1} + \varepsilon_t = (X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = X_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t = (X_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t = \\ &= X_{t-3} + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t = \dots = X_0 + (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_t), \end{aligned}$$

$$X_t = X_0 + \sum_{j=1}^t \varepsilon_j.$$

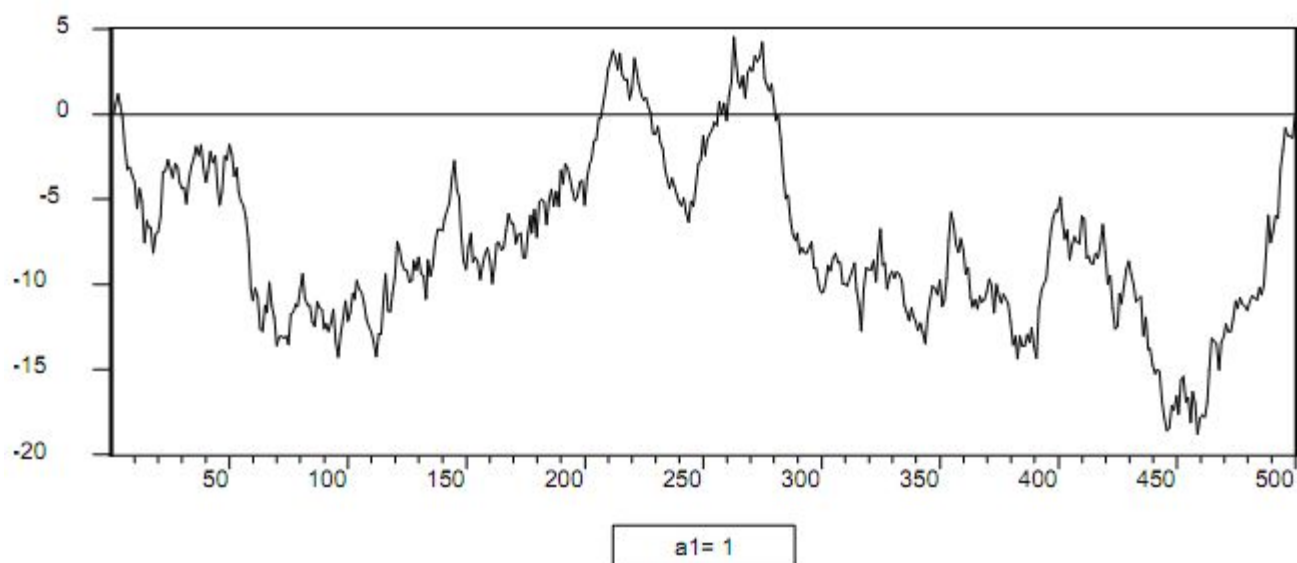
$$E(X_t | X_0 = x_0) = x_0,$$

$$D(X_t | X_0 = x_0) = D(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_t) = D(\varepsilon_1) + \dots + D(\varepsilon_t) = tD(\varepsilon_1) = t\sigma_\varepsilon^2$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_t, X_{t-1} | X_0 = x_0) &= E[(X_t - x_0)(X_{t-1} - x_0) | X_0 = x_0] = \\ &= E[(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_t)(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{t-1})] = (t-1)\sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Corr}(X_t, X_{t-1}) &= \frac{(t-1)\sigma_\varepsilon^2}{\sqrt{D(X_t)}\sqrt{D(X_{t-1})}} = \frac{(t-1)\sigma_\varepsilon^2}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2 t}\sqrt{\sigma_\varepsilon^2 (t-1)}} = \\ &= \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t}} = \sqrt{1 - \frac{1}{t}}. \end{aligned}$$

| $t$ | $\text{Corr}(X_t, X_{t-1})$ |
|-----|-----------------------------|
| 1   | 0                           |
| 2   | 0.707                       |
| 3   | 0.806                       |
| 4   | 0.866                       |
| 5   | 0.894                       |
| 6   | 0.913                       |
| 7   | 0.925                       |
| 8   | 0.935                       |
| 9   | 0.943                       |
| 10  | 0.949                       |



При  $X_0 = 0$  получаем

$$X_t = \sum_{j=1}^t \varepsilon_j, \quad t = 1, \dots, T.$$

$$E(X_t) = 0, \quad D(X_t) = t\sigma_\varepsilon^2,$$

Этот ряд является моделью *стохастического тренда*

Различие между временными рядами, имеющими только детерминированный тренд, и рядами, которые (возможно, наряду с детерминированным) имеют стохастический тренд состоит в следующем.

Рассмотрим следующие модели нестационарных рядов.

1-я модель:  $X_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$ ,  $t = 1, \dots, T$ ,

2-я модель:  $X_t = \alpha + X_{t-1} + \varepsilon_t$ ,  $t = 1, \dots, T$ ,  $X_0 = x_0$ ,

приращения которого имеют ненулевое математическое ожидание  $E(\Delta X_t) = \alpha \neq 0$ .

Процесс  $X$  во второй модели можно представить в виде

$$\begin{aligned} X_t &= \alpha + X_{t-1} + \varepsilon_t = \alpha + (\alpha + X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = 2\alpha + X_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t = \\ &= 3\alpha + X_{t-3} + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t = \dots = x_0 + \alpha t + (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_t), \end{aligned}$$

$$X_t = x_0 + \alpha t + \sum_{j=1}^t \varepsilon_j,$$

Детрендрование первого ряда приводит к ряду

$$X_t^0 = X_t - (\alpha + \beta t) = \varepsilon_t \text{ - стационарный ряд}$$

Детрендрование второго приводит к ряду

$$X_t^0 = X_t - (x_0 + at) = \sum_{j=1}^t \varepsilon_j, \text{ - нестационарный ряд}$$

Привести В.р. К стационарному: перейти от ряда уровней  $X_t$  к ряду разностей

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}.$$

$$\text{Для 1-го В.р.: } \Delta X_t = X_t - X_{t-1} = (\alpha + \beta t + \varepsilon_t) - (\alpha + \beta (t-1) + \varepsilon_{t-1}) = \beta + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1},$$

$$\text{Для 2-го В.р.: } \Delta X_t = X_t - X_{t-1} = \alpha + \varepsilon_t.$$

Временной ряд  $X_t$  называется **стационарным относительно детерминированного тренда  $f(t)$** , если ряд  $X_t - f(t)$  стационарный. Если ряд  $X_t$  стационарен относительно некоторого детерминированного тренда, то говорят, что этот ряд принадлежит **классу рядов, стационарных относительно детерминированного тренда**, или что он является **TS рядом** (**TS – time stationary**).

**В класс TS рядов включаются также стационарные ряды**, не имеющие детерминированного тренда.

Временной ряд  $X_t$  называется **интегрированным порядка  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots$** , если

- ряд  $X_t$  не является стационарным или стационарным относительно детерминированного тренда, т.е. не является TS рядом;
- ряд  $\Delta^k X_t$ , полученный в результате  $k$ -кратного дифференцирования ряда  $X_t$ , является стационарным рядом;
- ряд  $\Delta^{k-1} X_t$ , полученный в результате  $(k - 1)$ -кратного дифференцирования ряда  $X_t$ , не является TS рядом.

Для интегрированного ряда порядка  $k$  используют обозначение  $I(k)$ . Если ряд  $X_t$  является интегрированным порядка  $k$ , то мы будем обозначать это для краткости как  $X_t \sim I(k)$ . В этой системе обозначений соотношение  $X_t \sim I(0)$  соответствует ряду, который является стационарным и при этом не является результатом дифференцирования TS ряда.

Совокупность интегрированных рядов различных порядков  $k = 1, 2, \dots$  образует класс *разностно стационарных*, или **DS** рядов (**DS – difference stationary**). Если некоторый ряд  $X_t$  принадлежит этому классу, то мы говорим о нем как о **DS ряде**.

Пусть ряд  $X_t$  – интегрированный порядка  $k$ . Подвергнем этот ряд  $k$ -кратному дифференцированию. Если в результате получается стационарный ряд типа ARMA( $p, q$ ), то говорят, что исходный ряд  $X_t$  *является рядом типа ARIMA( $p, k, q$ )*, или  *$k$  раз проинтегрированным ARMA( $p, q$ ) рядом (ARIMA – autoregressive integrated moving average)*. Если при этом  $p = 0$  или  $q = 0$ , то тогда употребляются и более короткие обозначения:

$$\text{ARIMA}(p, k, 0) = \text{ARI}(p, k), \quad \text{ARIMA}(0, k, q) = \text{IMA}(k, q),$$

$$\text{ARIMA}(0, k, 0) = \text{ARI}(0, k) = \text{IMA}(k, 0).$$



$$X_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t \sim I(0);$$

$$X_t = \alpha + X_{t-1} + \varepsilon_t \sim I(1), \quad X_t - \text{ряд типа ARIMA}(0, 1, 0);$$

## Тесты на стационарность.

При построении эконометрических моделей необходимо учитывать наличие или отсутствие у В.р. стохастического (недетерминированного) тренда. Иначе говоря, приходится решать вопрос об отнесении каждого из рассматриваемых В.р. к классу рядов, стационарных относительно детерминированного тренда (TS-ряд), или к классу рядов, имеющих стохастический тренд (возможно, наряду с детерминированным трендом) (DS-ряд) и приводящихся к стационарному ряду только путем взятия разностей.

Использование в регрессии нестационарных В.р. Может привести к фиктивным результатам – ложной (spurious) линейной связи, которая характеризуется следующими свойствами:

- линейная регрессия без свободного члена дает коэффициент детерминации  $\approx 0,44$  независимо от размера выборки;
- если свободный член присутствует ( $\mu \neq 0$ ), то  $R^2 > 0,44$  и  $R^2 \rightarrow 1$  при увеличении числа наблюдений;
- оценка дисперсии остатков составляет примерно 14% от истинной дисперсии случайного возмущения, т.е. оценка дисперсии сильно занижена;
- остатки регрессии оказываются коррелированными с коэффициентом корреляции;
- t-статистика не приемлема для проверки гипотезы о значимости коэффициента при переменной тренда, поскольку смещена в сторону принятия гипотезы о наличии линейного тренда;
- независимые случайные «блуждания» демонстрируют высокую корреляционную зависимость, и регрессия в этом случае бессмысленна с экономической точки зрения.

## Тесты на стационарность

В тесте Дики-Фуллера нулевой (альтернативной) гипотезой является тот факт, что исследуемый В.р.  $x_t$  нестационарен (стационарен) и описывается одной из трех моделей авторегрессии первого порядка с поправкой на линейный тренд:

1) если В.р.  $x_t$  имеет детерминированный линейный тренд, то оценивается модель

$$\Delta x_t = \varphi x_{t-1} + \alpha + \beta t + \varepsilon_t, \quad t = 2, \dots, T;$$

2) если В.р.  $x_t$  не имеет детерминированного тренда и его математическое ожидание не равно нулю, то берется модель

$$\Delta x_t = \varphi x_{t-1} + \alpha + \varepsilon_t, \quad t = 2, \dots, T;$$

3) если у В.р.  $x_t$  нет детерминированного тренда и его математическое ожидание равно нулю, то выбирается модель

$$\Delta x_t = \varphi x_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 2, \dots, T.$$

Методом наименьших квадратов оцениваются параметры модели  $\phi$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  и вычисляется значение t-статистики  $t\phi$  для проверки нулевой гипотезы  $\phi = 0$ . Полученное значение сравнивается с критическим уровнем  $t_{crit}$ . Гипотеза о нестационарности В.р. отвергается, если  $t\phi < t_{crit}$ .

Если же В.р. описывается моделью более высокого порядка  $p > 1$ , то для анализа данного ряда на стационарность применяется расширенный тест Дики-Фуллера (ADF-тест), в котором в правые части каждой из трех рассмотренных для теста Дики-Фуллера моделей добавлены запаздывающие разности  $\Delta x_{t-j}$ ,  $t = 2, \dots, p - 1$ . Полученные при оценивании моделей с добавленными запаздывающими разностями значения t-статистик  $t\phi$  для проверки нулевой гипотезы  $\phi = 0$  сравниваются с теми же критическими значениями  $t_{crit}$ , что и для теста Дики-Фуллера. Гипотеза о нестационарности В.р. отвергается, если  $t\phi < t_{crit}$ . ADF-тест может использоваться и в том случае, когда В.р.  $x_t$  описывается смешанной моделью авторегрессии и скользящего среднего.

В тесте Филлипса-Перрона (PP-тест) проверка нулевой гипотезы о нестационарности В.р.  $x_t$  сводится к проверке гипотезы  $\phi = 0$  на основе статистической модели

$$\Delta x_t = \phi x_{t-1} + \alpha + \beta t + u_t, t = 2, \dots, T,$$

$u_t$ . В отличие от теста Дики-Фуллера, случайные составляющие  $u_t$  могут быть автокоррелированными, иметь различные дисперсии и не обязательно нормальные распределения. PP-тест основывается на  $t$ -статистике, скорректированной на возможную автокоррелированность и гетероскедастичность В.р.  $u_t$  (обозначается  $Z_t$ ). При вычислении статистики  $Z_t$  приходится оценивать так называемую «долговременную» дисперсию ряда  $u_t$ , которая определяется следующим образом:

$$\lambda^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} E(u_1 + \dots + u_T)^2.$$

Для  $\lambda^2$  можно взять оценку

$$(\lambda^2)^* = \gamma_0^* + 2 \sum_{j=1}^l \left[ 1 - \frac{j}{l+1} \right] \gamma_j^*,$$

$$\gamma_j^* = T^{-1} \sum_{t=j+1}^l u_t^* u_{t-j}^*$$

–  $j$ -ая выборочная автоковариация В.р.  $u_t$ ,  $l$  - количество используемых лагов,  $u_t^*$  – остатки оцененной модели РР-теста.

Тест Квятковского-Филлипса-Шмидта-Шина (KPSS-тест) в качестве нулевой рассматривает гипотезу о принадлежности В.р. классу стационарных.

Рассмотрение ведется в рамках следующей модели:  $x_t = \delta t + \zeta_t + \varepsilon_t$ , где  $\varepsilon_t$  – стационарный процесс и  $\zeta_t$  – случайное блуждание, определяемое как  $\zeta_t = \zeta_{t-1} + u_t$ ,  $u_t$  – нормально распределенная случайная величина с нулевым средним и дисперсией, равной  $\sigma_u^2$ .

Нулевая гипотеза о стационарности формулируется следующим образом:  
 $H_0: \sigma_u^2 = 0$ .

Альтернативная гипотеза соответствует предположению о том, что дисперсия отлична от нуля и анализируемый временной ряд принадлежит классу нестационарных. В такой формулировке предложенный критерий является LM-критерием для проверки указанной нулевой гипотезы:

$$LM = \frac{\sum_{t=1}^T S_t^2}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2},$$



где  $\sigma_u^2$  – дисперсия остатков регрессии,

$$S_t^2 = \sum_{i=1}^t e_i^2$$

$e_t$  – остатки регрессии  $x_t$  на константу и тренд  $t$ .

Оценивание качества моделей и точности прогнозов. Для оценки качества построенных эконометрических моделей, как правило, используется стандартная техника :

коэффициент детерминации  $R^2$ ,

скорректированный коэффициент детерминации  $R_a^2$ ,

стандартная ошибка регрессии (SER),

статистика Дарбина-Уотсона (DW),

LM-критерий автокоррелированности ошибок Бройша-Годфри,

F-статистика, p-значение (F-статистики),

Информационные критерии Акаике (AIC) и Шварца (SIC).

Оценка статистической значимости коэффициентов в построенных моделях проводится с помощью p-значения (t-статистики).

Наличие структурных изменений оценивалось с помощью теста Чоу.

При использовании таблиц критических значений статистических оценок, в частности статистики DW, F-статистики, а также для оценки р-значения (F-статистики) и р-значения (t-статистики), выбран уровень значимости, наиболее распространенный в экономическом анализе, равный 0,05.

Для уравнений, содержащих лаговые значения объясняющей переменной, вместо статистики DW приводятся значения LM-критерия Бройша-Годфри.

Для оценки прогнозов используется среднеабсолютная процентная ошибка (MAPE), определяемая по формуле

$$MAPE = \frac{100}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \frac{|x_t - \tilde{x}_t|}{x_t},$$

где  $x_t$  и  $\tilde{x}_t$  — соответственно фактическое и прогнозное значения показателя в момент времени  $t$ ;  $\tau$  — период прогнозирования.

