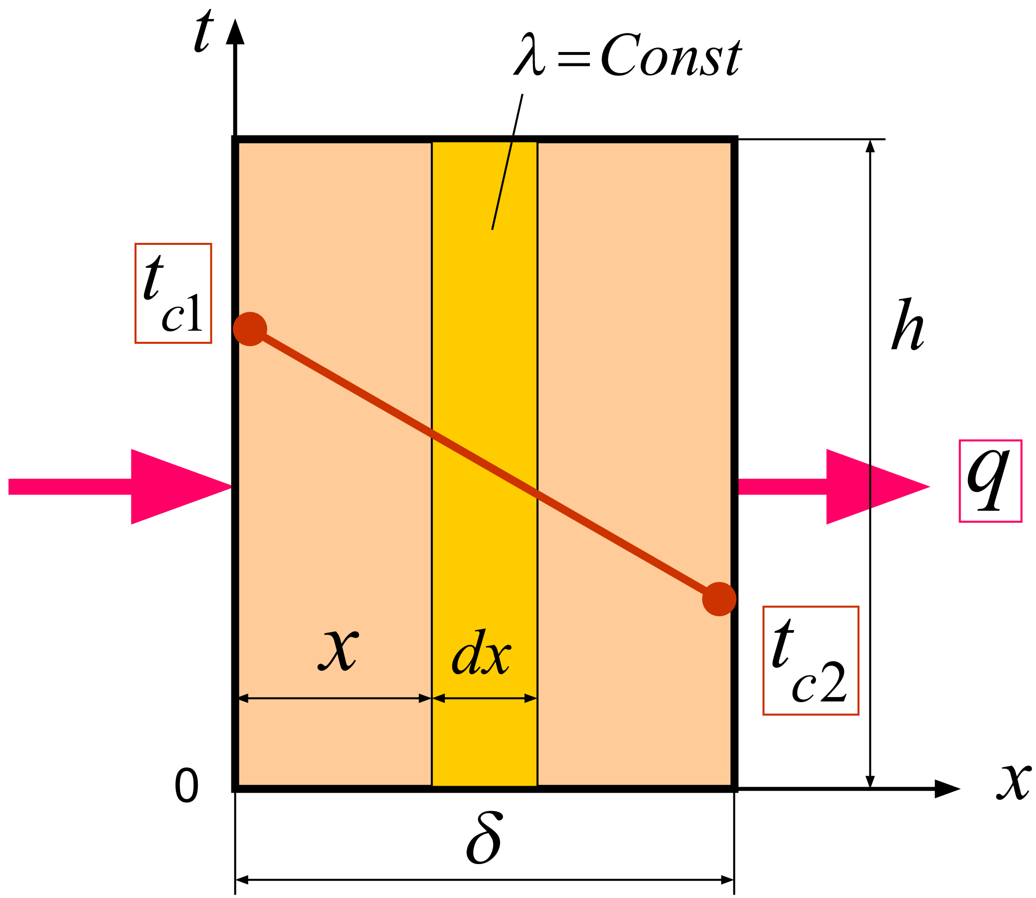
Тепломассообмен 2

Теплопроводность через плоские и цилиндрические стенки

Теплопроводность через однослойную плоскую стенку



Дифференциальное уравнение теплопроводности (частный случай)

Ранее мы получили общий вид дифференциального уравнения теплопроводности:

$$\boxed{\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho}} \quad (1)$$

В частном случае, для стационарного процесса $\partial t / \partial \tau = 0$ при отсутствии внутренних источников теплоты $q_v = 0$:

из (1) при $a \neq 0$ следует: $\nabla^2 t = 0$,

или развернутое выражение оператора Лапласа:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \quad (2)$$

Для бесконечной пластины: $h >> \delta; b >> \delta$ то есть:

$\partial^2 t / \partial y^2 = 0; \partial^2 t / \partial z^2 = 0$

Дифференциальное уравнение теплопроводности запишется в виде:

$$\boxed{\frac{d^2 t}{dx^2} = 0}. \quad (3)$$

Условия однозначности

Для рассматриваемого случая добавляем

условия однозначности:

- Геометрические: вертикальная пластина $h >> \delta; b >> \delta$
- Физические: $\lambda = Const;$
- Начальные: для стационарного процесса не требуются,
- Граничные условия I рода: при $x = 0 \quad t = t_{c1} = Const;$

при $x = \delta \quad t = t_{c2} = Const.$ (4)

Найти: $\boxed{t = f(x) - ?; q = ?}$

После первого интегрирования дифференциального уравнения (3) имеем: $\boxed{\frac{dt}{dx} = c_1;}$ (5)

После разделения переменных в (5): $dt = c_1 dx;$ (6)

Удельный тепловой поток

После 2-го интегрирования: $t = c_1 x + c_2.$ (7)

Для определения констант интегрирования подставляем (4) в (7): при $x = 0 \quad t = \boxed{t_{c1} = c_2;}$

при $x = \delta \quad t = t_{c2} = c_1\delta + c_2 = c_1\delta + t_{c1};$ (8)

откуда с учетом (5) имеем: $\boxed{c_1 = \dfrac{t_{c2} - t_{c1}}{\delta} = \dfrac{dt}{dx}.}$ (9)

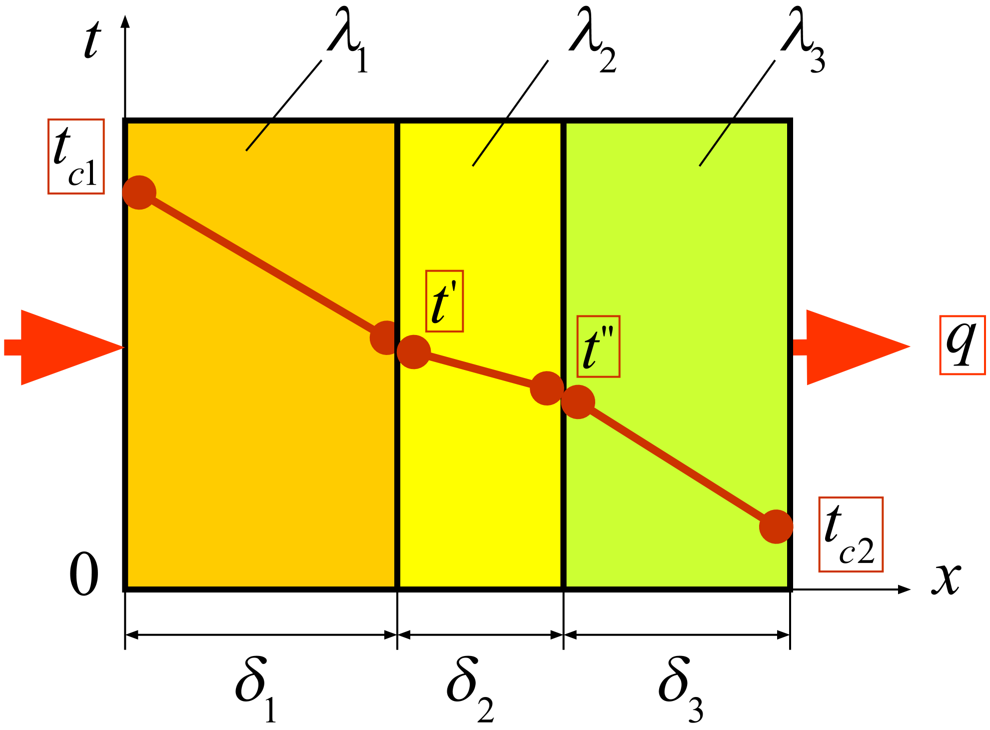
По закону Фурье: $q = -\lambda \dfrac{dt}{dx};$ откуда градиент $\dfrac{dt}{dx} = -\dfrac{q}{\lambda}.$ (10)

Подставляя (10) в (9), получим: $\dfrac{t_{c2} - t_{c1}}{\delta} = -\dfrac{q}{\lambda},$ откуда:

$$\boxed{q = \frac{\lambda}{\delta}(t_{c1} - t_{c2}),}$$

или в форме закона Ома: $\boxed{q = \dfrac{\Delta t}{R}.}$ (11)

Теплопроводность через трехслойную плоскую стенку



Термическое сопротивление теплопроводности 3-слойной плоской стенки

Для стационарного теплового режима $q = idem$:

в первом слое $$q = \frac{\lambda_1}{\delta_1}(t_{c1} - t'); t_{c1} - t' = q\frac{\delta_1}{\lambda_1}; t' = t_{c1} - q\frac{\delta_1}{\lambda_1};$$

во втором слое $$q = \frac{\lambda_2}{\delta_2}(t' - t''); t' - t'' = q\frac{\delta_2}{\lambda_2};$$

в третьем слое $$q = \frac{\lambda_3}{\delta_3}(t'' - t_{c2}); t'' - t_{c2} = q\frac{\delta_3}{\lambda_3}; t'' = t_{c2} + q\frac{\delta_3}{\lambda_3}.$$

Сложив правые и левые части этих трех выражений, получим:

$$t_{c1} - t_{c2} = q\left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}\right) = qR,$$

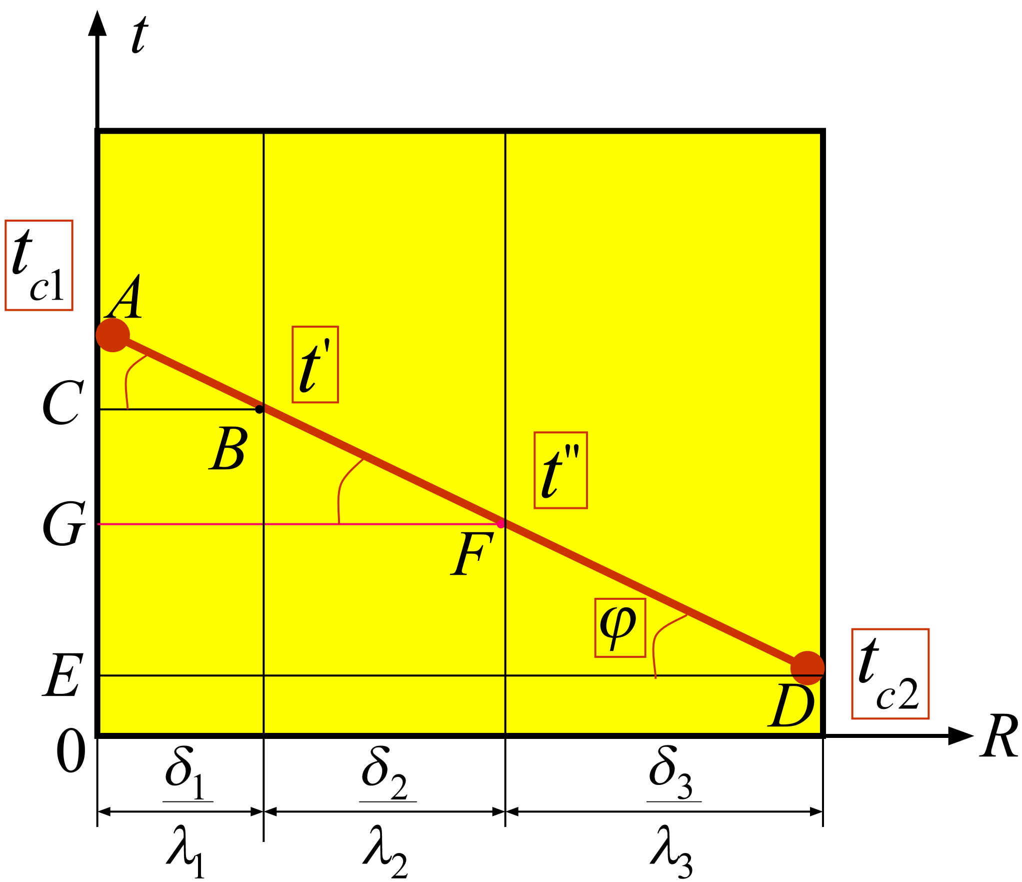
или в форме закона Ома –

$$\boxed{q = \frac{\Delta t}{R},}$$

где термическое сопротивление теплопроводности трехслойной плоской стенки, (м²К)/Вт :

$$\boxed{R = \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}}$$

Графический метод определения температур между слоями



Определение температур между слоями

Треугольники *ABC* и *ADE* подобны между собой по равенству трех углов. Из их подобия следует:

$$tg\varphi = \frac{AG}{BC} = \frac{AE}{DE},$$

или:

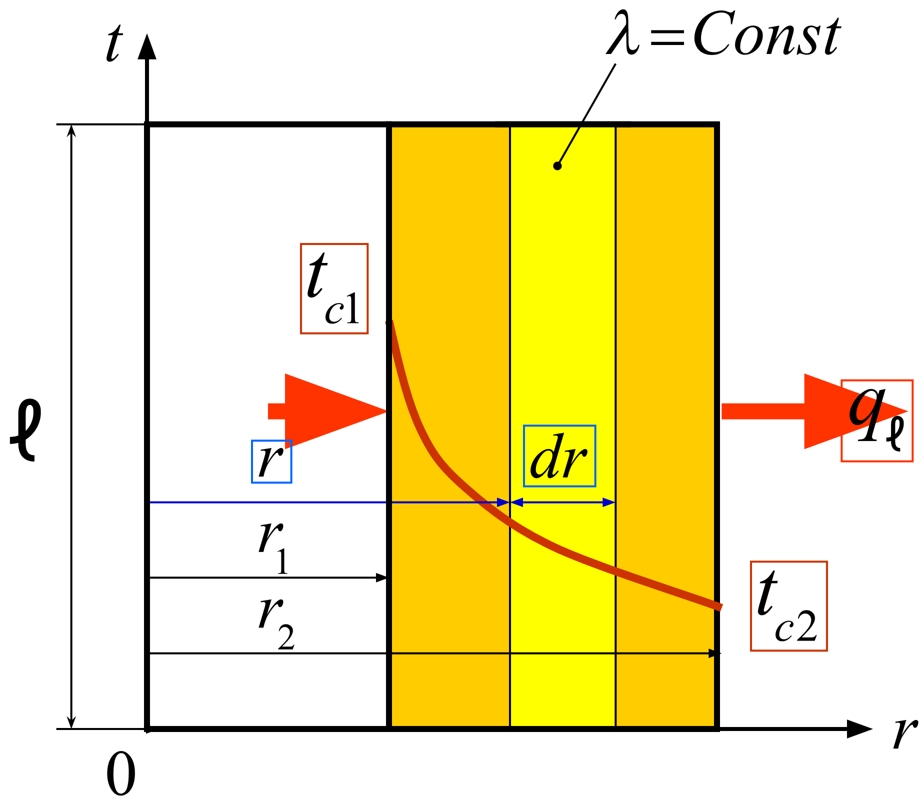
$$tg\varphi = \frac{t_{c1} - t'}{\frac{\delta_1}{\lambda_1}} = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}} = q,$$

то есть $\boxed{AC = t_{c1} - t'}$, откуда находится температура $\boxed{t'}$.

Аналогично, из подобия треугольников AFG и ADE:

$\boxed{AG = t_{c1} - t''}$. Отсюда находится температура $\boxed{t''}$.

Теплопроводность через однослойную цилиндрическую стенку



Дифференциальное уравнение тепло-проводности для цилиндрической стенки

Общее выражение дифференциального уравнения теплопроводности: $\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho}$. (1)

Для стационарного процесса $\partial t / \partial \tau = 0;$

при отсутствии внутренних источников теплоты $q_v = 0,$

с учетом этих условий уравнение (1) примет вид $a\nabla^2 t = 0$

Но $a \neq 0$ тогда частный вид дифференциального уравнения теплопроводности: $\nabla^2 t = 0.$

Или через развернутое выражение оператора Лапласа:

.

(2)

$$\nabla^2 t = \boxed{\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0}$$

Условия однозначности

Добавляем условия однозначности:

- Геометрические условия:
  $\ell >> r_2$ (бесконечная цилиндрическая стенка);
- Физические условия: $\lambda = Const;$
- Начальные условия: для стационарного процесса не требуются;
- Граничные условия I рода:

при $r = r_1$ $\quad t = t_{c1} = Const;$

(3)

при $r = r_2$ $\quad t = t_{c2} = Const.$

Преобразование дифференциального уравнения

В соответствии с геометрическими условиями однозначности, в бесконечной цилиндрической стенке температура не изменяется по координатам *z* и φ, тогда уравнение (2) примет вид: (4).

$$\boxed{\frac{d^2t}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dt}{dr}=0,}$$

Найти:

$$t=f(r)-?;Q=?.$$

Представим дифференциальное уравнение (4) в виде:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{dt}{dr}\right)+\frac{1}{r}\left(\frac{dt}{dr}\right)=0,$$

Умножим его на: $\boxed{\frac{dr}{\left(\frac{dt}{dr}\right)}}$ и получим окончательно

$$\boxed{\frac{d\left(\frac{dt}{dr}\right)}{\frac{dt}{dr}}+\frac{dr}{r}=0;}$$

Интегрирование

После первого интегрирования имеем:

$$\ell n(\frac{dt}{dr}) + \ell n(r) = \ell n(c_1).$$

Или:

$$\ell n(\frac{dt}{dr} r) = \ell n(c_1).$$

После потенцирования: $\boxed{\frac{dt}{dr} r = c_1.}$ (5)

Разделяем переменные в (5): $dt = c_1 \frac{dr}{r};$

после второго интегрирования: $\boxed{t = c_1 \ell n(r) + c_2}$ (6)

- это логарифмическая зависимость $t = f(r)$.

Определение констант интегрирования

Подставляем граничные условия (3) в (6):

при $r = r_1$ $\quad t = t_{c1} = c_1 \ell n(r_1) + c_2;$

$r = r_2$ $\quad t = t_{c2} = c_1 \ell n(r_2) + c_2.$

Получим:

$$t_{c1} - t_{c2} = c_1[\ell n(r_1) - \ell n(r_2)] = c_1 \ell n(\frac{r_1}{r_2}) = c_1 \ell n(\frac{d_1}{d_2}).$$

Находим отсюда константу интегрирования, которая

с учетом (5): $$c_1 = \boxed{-\frac{t_{c1} - t_{c2}}{\ell n(d_2 / d_1)} = \frac{dt}{dr} r.} \quad (7)$$

По закону Фурье: $Q = -\lambda F \frac{dt}{dr} = -\lambda 2\pi r \ell \frac{dt}{dr},$ (8) или $\frac{dt}{dr} r = -\frac{Q}{\lambda 2\pi \ell}.$

Тепловой поток

Подставляем (8) в (7): $-\frac{t_{c1}-t_{c2}}{\ell n(d_2/d_1)} = -\frac{Q}{\lambda 2\pi \ell}$,

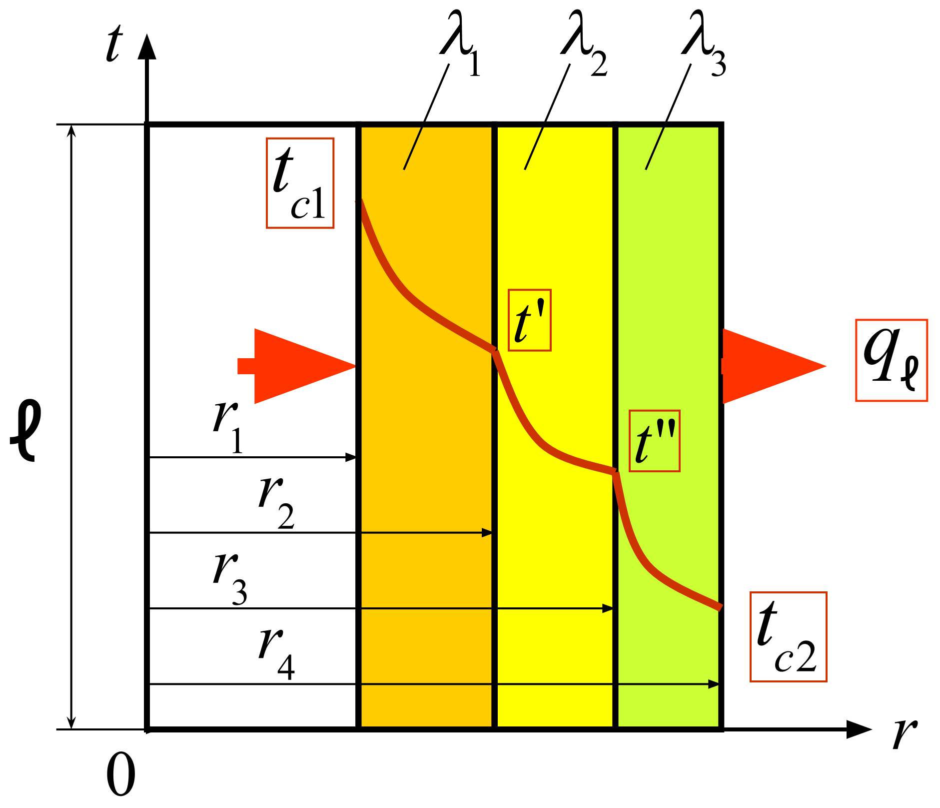
откуда: полный и удельный тепловые потоки

$$Q = \frac{\pi \ell (t_{c1}-t_{c2})}{\frac{1}{2\lambda}\ell n(\frac{d_2}{d_1})}, Вт. \qquad q_\ell = \frac{Q}{\ell} = \frac{\pi (t_{c1}-t_{c2})}{\frac{1}{2\lambda}\ell n(\frac{d_2}{d_1})}, Вт/м. \qquad (9)$$

Или в форме закона Ома: $q_\ell = \frac{\pi \Delta t}{R_\ell}$. (10)

Здесь $R_\ell = \frac{1}{2\lambda}\ell n(\frac{d_2}{d_1})$ (11) - линейное термическое сопротивление теплопроводности 1-слойной цилиндрической стенки, (мК)/Вт.

Теплопроводность через трехслойную цилиндрическую стенку



Линейное термическое сопротивление теплопроводности

Для всех слоев при стационарном тепловом режиме: $\boxed{q_\ell = \dfrac{\pi \Delta t}{R_\ell}}$.

Тогда падения температур в каждом слое:

$$t_{c1} - t' = \frac{q_\ell}{\pi}\frac{1}{2\lambda_1}\ell n\frac{d_2}{d_1}; \qquad t' - t'' = \frac{q_\ell}{\pi}\frac{1}{2\lambda_2}\ell n\frac{d_3}{d_2}; \qquad t'' - t_{c2} = \frac{q_\ell}{\pi}\frac{1}{2\lambda_3}\ell n\frac{d_4}{d_3}.$$

Сложив левые и правые части этих уравнений, получим:

$$t_{c1} - t_{c2} = \frac{q_\ell}{\pi}\left(\frac{1}{2\lambda_1}\ell n\frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_2}\ell n\frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{2\lambda_3}\ell n\frac{d_4}{d_3}\right) = \frac{q_\ell}{\pi}R_\ell;$$

тогда линейное термическое сопротивление трехслойной цилиндрической стенки, (мК)/Вт

$$\boxed{R_\ell = \frac{1}{2\lambda_1}\ell n\frac{d_2}{d_1} + \frac{1'}{2\lambda_2}\ell n\frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{2\lambda_3}\ell n\frac{d_4}{d_3}}$$

и температуры между слоями °С:

$$t' = t_{c1} - \frac{q_\ell}{\pi}\frac{1}{2\lambda_1}\ell n\frac{d_2}{d_1};$$

$$t'' = t_{c2} + \frac{q_\ell}{\pi}\frac{1}{2\lambda_3}\ell n\frac{d_4}{d_3}.$$