

**Сибирский государственный медицинский
университет**

СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ

доцент Нагайцев А.В.

В медико-социальных исследованиях наряду с абсолютными и относительными широко используются средние величины. К их вычислению обычно прибегают, когда требуется получить обобщающую характеристику явлений (процессов) по какому-либо количественному признаку.

Средняя величина характеризует весь ряд наблюдений одним числом, являясь *выражением общей меры признака в совокупности*. Она нивелирует, ослабляет случайные отклонения индивидуальных наблюдений в ту или иную сторону и выдвигает на первый план основное, типичное свойство явления.

В практической деятельности врача средние величины используются:

1. Для характеристики физического развития, основных антропометрических признаков (длина и масса тела, окружность груди и т.п.).
2. Для характеристики различных сторон медицинской деятельности (средняя длительность пребывания больного на койке, среднее число лабораторных исследований на одного больного).
3. Для характеристики санитарно-противоэпидемической работы (средняя площадь или кубатура на одного человека, среднее количество витаминов или калорий в дневном рационе).
4. Для характеристики физиологических сдвигов в большинстве экспериментально-лабораторных исследований (средняя температура, среднее число ударов пульса в минуту, средний уровень артериального давления).

Для вычисления средних величин должны быть соблюдены два условия:

1. Средние величины должны быть рассчитаны на основе качественно однородных статистических групп, имеющих существенные общие социально-экономические или биологические характеристики.
2. Средние величины должны быть рассчитаны на совокупностях, имеющих достаточно большое число наблюдений.

В случае, если количество наблюдений невелико, то для вычисления среднего квадратического отклонения и средней ошибки средней арифметической используют преобразованные формулы (см. ниже).

Вариационные ряды

Средние величины рассчитываются на основании вариационных рядов.

Вариационный ряд – это статистический ряд распределения значений изучаемого количественного признака. Вариационный ряд состоит из вариантов (V – vario) и соответствующих им частот (P – pars).

Вариантой (V) называют каждое числовое значение изучаемого признака.

Частота (P) – это абсолютная численность отдельных вариантов в совокупности, указывающая, сколько раз встречается данная варианта в вариационном ряду. Общее число случаев наблюдений, из которых состоит вариационный ряд, обозначают буквой n (**numerus**).

Виды вариационных рядов

- ✓ простыми и взвешенными;
 - ✓ сгруппированными и несгруппированными;
 - ✓ симметричными и несимметричными;
 - ✓ дискретными и непрерывными;
 - ✓ четными и нечетными.
-
- ✓ **Дискретный** вариационный ряд - значения признака (варианты) заданы в виде отдельных конкретных чисел.
 - ✓ **Интервальный** вариационный ряд - значения признака заданы в виде интервалов.

Средняя масса тела девятилетних мальчиков (кг) (взвешенный ранжированный вариационный ряд)

V	p	Vp	d	d^2	d^2p
21	1	21	-8	64	64
22	1	22	-7	49	49
23	2	46	-6	36	72
24	3	72	-5	25	75
25	4	100	-4	16	64
26	8	208	-3	9	72
27	14	378	-2	4	56
28	16	728	-1	1	26
29	24	696	0	0	0
30	15	450	+1	1	15
31	9	279	+2	4	36
32	4	128	+3	9	36
33	2	66	+4	16	32
34	1	34	+5	25	25
35	2	70	+6	36	72
36	1	36	+7	49	49
37	2	74	+8	64	128
38	1	38	+9	81	81

Виды средних величин

В медико-социальных исследованиях обычно используются следующие виды средних величин:

- 1. Средняя арифметическая (M – *Media*)** – обобщенная величина, которая характеризует типичный размер или средний уровень признака в расчете на единицу однородной совокупности в конкретных условиях места и времени.
- 2. Мода (Mo)** – это средняя величина, которая соответствует варианту, имеющей наибольшую частоту (p).
- 3. Медиана – (Me)** – это вариант, занимающая срединное положение в вариационном ряду.

Методика вычисления средних величин

Наиболее часто в характеристике вариационного ряда используют *среднюю арифметическую*.

Средняя арифметическая, которая рассчитана в вариационном ряду, где каждая варианта встречается только 1 раз, называется *средней арифметической простой*.

Ее определяют по формуле:
$$M = \frac{\sum V}{n}$$

где M — средняя арифметическая,
 V — варианта изучаемого признака,
 n — число наблюдений.

Если в исследуемом ряду одна или несколько вариантов повторяются несколько раз, то вычисляют *среднюю арифметическую взвешенную*, когда учитывается вес каждой варианты в зависимости от частоты ее встречаемости.

Расчет такой средней проводят по формуле:

$$M = \frac{\sum VP}{n}$$

где **M** — средняя арифметическая взвешенная,

P — частота,

V — варианта изучаемого признака,

n — число наблюдений

При большом числе наблюдений, достаточно протяженном вариационном ряду рекомендуется среднюю взвешенную вычислять по способу моментов. Этот способ основан на том, что средняя равна любой произвольно (условно) взятой средней (M_1), за которую чаще всего принимается **Мода** (M_0), плюс среднее отклонение всех вариант от условной средней (момент первой степени):

$$M = M_1 + \frac{\sum dP}{n}$$

Средняя арифметическая (средняя взвешенная) имеет ряд свойств, которые используют в некоторых случаях для упрощения расчета средней и получения ориентировочной величины.

1. Средняя арифметическая занимает срединное положение в строго симметричном вариационном ряду ($M = M_o = M_e$).
2. Средняя арифметическая имеет абстрактный характер и является обобщающей величиной.
3. Алгебраическая сумма отклонений всех вариантов от средней равна нулю. На этом свойстве основан расчет средней по способу моментов.
4. Если к каждой варианте вариационного ряда прибавить или отнять одно и то же число, то на столько же увеличится или уменьшится средняя арифметическая величина.
5. Если каждую варианту разделить или умножить на одно и то же число, то во столько же раз уменьшится или увеличится средняя арифметическая.

Два последних свойства используют в тех случаях, когда варианты представлены очень малыми или наоборот большими числами.

Разнообразие признака в статистической совокупности

Разнообразие признака как свойство статистической совокупности заключается том, что в однородных статистических совокупностях величины количественных признаков различны.

Статистическими критериями, характеризующими разнообразие признака, являются:

1. **Лимит (lim).**
2. **Амплитуда (Am).**
3. **Среднее квадратическое отклонение (σ).**
4. **Коэффициент вариации (Cv).**

Лимит (lim) определяется крайними значениями вариант в вариационном ряду.

Амплитуда (Am) равна разности между крайними вариантами.

Наиболее полную характеристику разнообразию вариационного ряда дает *среднее квадратическое отклонение* (σ), которое учитывает разнообразие всех вариантов вариационного ряда.

Существует два способа расчета этого показателя. Один из них простой и называется среднеарифметическим, для чего используют формулу:

$$\sigma = \frac{\sum d^2}{n-1}$$

где σ - среднее квадратическое отклонение,
 d — отклонение между вариантами групп и условной средней величиной,
 n — число наблюдений.

Этот способ вычисления среднего квадратического отклонения применяют, если число наблюдений не превышает 30 ($n < 30$), каждая варианта встречается 1 раз ($P = 1$), а средняя величина рассчитывается как простая среднеарифметическая.

В том случае, если варианты имеют различную частоту ($P > 1$), то вычисляют среднее взвешенное квадратическое отклонение и применяют формулу:

$$\sigma = \frac{\sum d^2 P}{n-1}$$

где P — частота.

В том случае, если число наблюдений превышает 30 и среднюю величину рассчитывают по способу моментов, то и среднее квадратическое отклонение рассчитывают по способу моментов по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2 P}{n} - \left(\frac{\sum d P}{n} \right)^2}$$

где $\frac{\sum d P}{n}$ - момент первой степени,

$\frac{\sum d^2 P}{n}$ - момент второй степени,

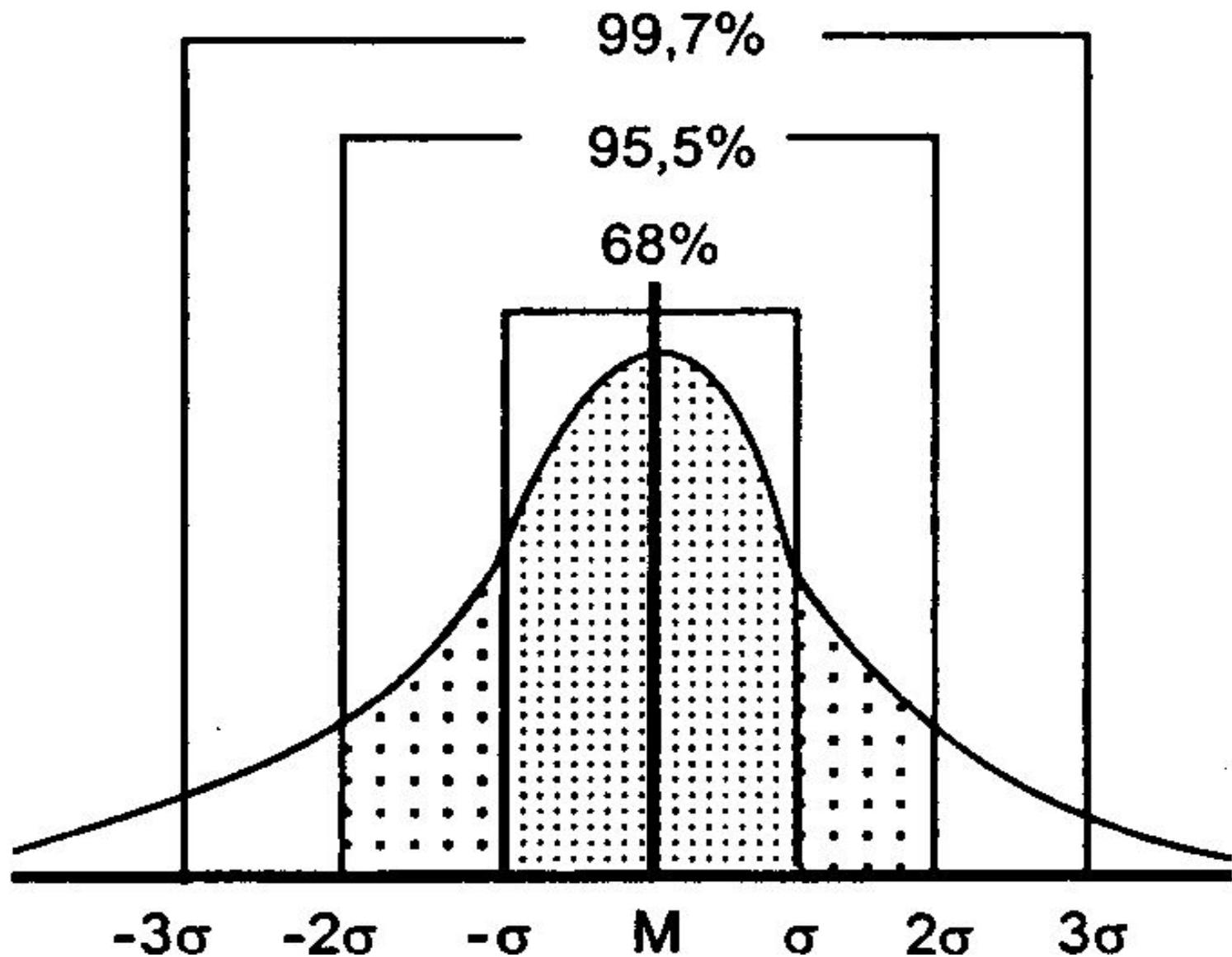
По величине среднего квадратического отклонения можно судить о разнообразии вариационного ряда: чем больше величина σ , тем больше разнообразие, чем меньше значение σ , тем меньше разнообразие вариант и тем более однороден вариационный ряд.

Среднее квадратическое отклонение связано со структурой распределения.

При нормальном распределении в пределах

- ✓ $M \pm \sigma$ находится 68,3 %,
- ✓ $M \pm 2\sigma$ - 95,5 %,
- ✓ $M \pm 3\sigma$ - 99,7 % всех вариант

Иными словами, если 95% всех вариант вариационного ряда находится в пределах $M \pm 2\sigma$, то средняя величина характерна для данного ряда и можно говорить о ее *представительности* для статистической совокупности и не требуется увеличивать число наблюдений.



Связь среднего квадратического отклонения
со структурой вариационного ряда

Практическое значение среднего квадратического отклонения состоит в том, что по его величине можно:

1. Определить структуру вариационного ряда.
2. Охарактеризовать степень однородности вариационного ряда в зависимости от величины σ .
3. Судить о типичности средней арифметической в зависимости от распределения вариантов в вариационном ряду.
4. Оценить отдельные признаки у каждого индивидуума по стандартному отклонению от средней арифметической по формуле:

$$t = \frac{V-M}{\sigma}$$

где t — доверительный коэффициент, M — средняя величина.

5. Определить достоверность (репрезентативность) результатов исследования.
6. Определить коэффициент вариации при сравнении степени разнообразия разных признаков в одной совокупности или однородных признаков в разных совокупностях. Коэффициент вариации (C_v) является относительной мерой разнообразия, так как вычисляется по отношению среднего квадратического отклонения (σ) к средней арифметической величине (M), выраженному в процентах (100 %):

$$C_v = \frac{\sigma}{M} \times 100\%$$

Коэффициент вариации применяют в том случае, когда необходимо сравнить разнообразие разных признаков в одной совокупности (разные показатели крови) или одного признака в разных совокупностях (масса тела у младенцев и подростков).

Для ориентировочной оценки степени разнообразия признака пользуются следующими градациями коэффициента вариации. При величине коэффициента вариации (C_v) больше 20 % отмечают сильное разнообразие, если C_v от 20 до 10 %, то разнообразие среднее, а если C_v меньше 10 %, то разнообразие слабое.

Достоверность признака в статистической совокупности

При изучении генеральной совокупности для ее количественной характеристики достаточно рассчитать M и σ . Однако на практике, как правило, исследование проводят на выборочной совокупности, которая должна быть репрезентативна (достоверна) или представительна для генеральной совокупности.

Репрезентативность выборочной совокупности означает представительность в ней всех учитываемых признаков генеральной совокупности.

Оценка *достоверности* результатов исследования дает возможность установить, с какой вероятностью можно перенести результаты изученных признаков выборочной совокупности (части явления) на всю генеральную совокупность (явление в целом).

Оценка результатов исследования предусматривает вычисление:

1. Средней ошибки (m) для средних (M) величин.
2. Доверительного интервала и доверительных границ средних (M) величин.
3. Достоверности разности средних (M) величин по критерию t .

Средняя ошибка (m_M) показывает, насколько результаты, полученные при выборочном исследовании, отличаются от результатов, которые могли бы быть получены при проведении сплошного исследования всех без исключения элементов генеральной совокупности.

Среднюю ошибку определяют по следующим формулам.

Для средней величины (M) при $n < 30$

$$m_M = \frac{\sigma}{\sqrt{n - 1}}$$

Для средней величины (M) при $n > 30$

$$m_M = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

где σ - среднее квадратическое отклонение,
 n — число наблюдений

Величина ошибки средней арифметической прямо пропорциональна степени разнообразия признака в статистической совокупности и обратно пропорциональна квадратному корню из числа наблюдений.

Следовательно, уменьшение величины ошибки возможно за счет либо снижения степени разнообразия признака, либо увеличения числа наблюдений. Как правило, в медико-статистических исследованиях обычно используют доверительную вероятность (надежность), равную 95,5—99,7 %.

Если показатель представлен относительными величинами, то ошибку репрезентативности находят следующим образом:

$$m = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

где n - число наблюдений в выборке

p - частота появления признака в совокупности, выраженный в %, ‰ и т.д

q - альтернативный “ p ” показатель

$q = (100 - p)$ при p , выраженном в %; или $(1000 - p)$ при p , выраженном в ‰

При числе наблюдений меньше 30 ошибки репрезентативности определяется по формуле:

$$m = \sqrt{\frac{pq}{n-1}}$$

где n - число наблюдений в выборке

p - частота появления признака в совокупности, выраженный в %, ‰ и т.д

q - альтернативный “ p ” показатель

$q = (100 - p)$ при p , выраженном в %; или $(1000 - p)$ при p , выраженном в ‰

Результат считается достоверным (Р или М), если он, соответственно, превышает удвоенную или утроенную ошибку репрезентативности (при $n > 30$):

$$M \geq 2-3 m;$$

$$P \geq 2-3 m.$$

Доверительные границы – это границы средних (или относительных) величин, выход за пределы которых вследствие случайных колебаний имеет незначительную вероятность. Доверительные границы средней арифметической в генеральной совокупности определяют по формуле:

$$M_{\text{ген}} = M_{\text{выб}} \pm t m_M,$$

где $M_{\text{ген}}$ - значение средней величины, полученной для генеральной совокупности;

$M_{\text{выб}}$ - значение средней величины, полученной для выборочной совокупности;

m_M – ошибка репрезентативности;

t – доверительный критерий.

Доверительные границы определяют *доверительный интервал*, обеспечивающий определенную степень вероятности соответствия выборочной совокупности генеральной

Таким образом, если среднее квадратическое отклонение (σ) характеризует степень разнообразия вариантов в вариационном ряду и необходим для определения ошибки средней, то величина ошибки (m) вместе с доверительным коэффициентом (t) является важным условием определения доверительного интервала, с помощью которого оценивают доверительные границы изучаемого признака.

Формулы определения доверительных границ для относительных показателей (Р):

$$P_{\text{ген}} = P_{\text{выб}} \pm tm,$$

где $P_{\text{ген}}$ — значения относительного показателя генеральной совокупности;

$P_{\text{выб}}$ — значения относительного показателя выборочной совокупности;

m — ошибка репрезентативности;

t — критерий достоверности (доверительный коэффициент).

Целью *сравнения двух средних величин по критерию t*, является оценка существенности и достоверности их различий. К примеру, чтобы сделать вывод об эффективности нового метода лечения или диагностики, приходится сравнить результаты, полученные в исследуемой и контрольной группах.

Достоверность разности между двумя средними величинами определяют по формуле:

$$t = \frac{M_1 - M_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}$$

где M_1 и M_2 — средние величины, полученные в двух самостоятельных независимых группах наблюдений (исследуемая и контрольная);

m_1 и m_2 — средние ошибки средних или относительных величин;

t — доверительный коэффициент.

Формула определения достоверности разности для относительных показателей:

$$t = \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}$$

где P_1 и P_2 — р - частота появления признака в совокупности, выраженный в %, ‰ и т.д, полученные в двух самостоятельных независимых группах наблюдений (исследуемая и контрольная);

m_1 и m_2 — средние ошибки средних или относительных величин;

t — доверительный коэффициент.

При $t > 2$ различие между двумя средними величинами существенно и не случайно, т. е. достоверно. Это значит, что в генеральной совокупности сравниваемые средние величины имеют различие и при повторении подобных наблюдений будут получены аналогичные различия.

При $t = 2$ надежность такого вывода будет не меньше 95 %. С увеличением критерия достоверности (t) степень надежности различия между средними величинами также повышается, а риск ошибки уменьшается.

При $t < 2$ достоверность разности средних величин считается недоказанной

Зависимость доверительного критерия (t) от степени вероятности безошибочного прогноза ($n > 30$)

Степень вероятности безошибочного прогноза – p , %	Доверительный критерий - t
68,3	1
95,5	2
99,7	3