

Тригонометрические выражения и их преобразования.

9 -класс

МБОУ-ООШ № 25

Подготовила: учитель математики

Оганесян Валентина Ашотовна

Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

Чтобы построить всю тригонометрию, законы которой были бы справедливы для любых углов (не только для острых, но и для тупых, положительных и отрицательных углов), необходимо рассмотреть так называемый **единичный круг**, то есть круг, радиус которого равен 1 (рис.3).

Проведём два диаметра: горизонтальный AA'
и вертикальный BB' .

Будем отсчитывать углы от точки A (начальная точка).
Отрицательные углы отсчитываются по часовой стрелке,
положительные — против.

Подвижный

радиус OC образует угол с неподвижным радиусом OA .

Он может быть расположен в 1-ой четверти (COA),
во 2-ой четверти (DOA),

в 3-ей четверти (EOA) или в 4-ой четверти (FOA).

Считая OA и OB положительными направлениями, а OA'
и OB' — отрицательными, мы определим
тригонометрические функции следующим образом.

Знаки синуса и косинуса в различных четвертях единичного круга.

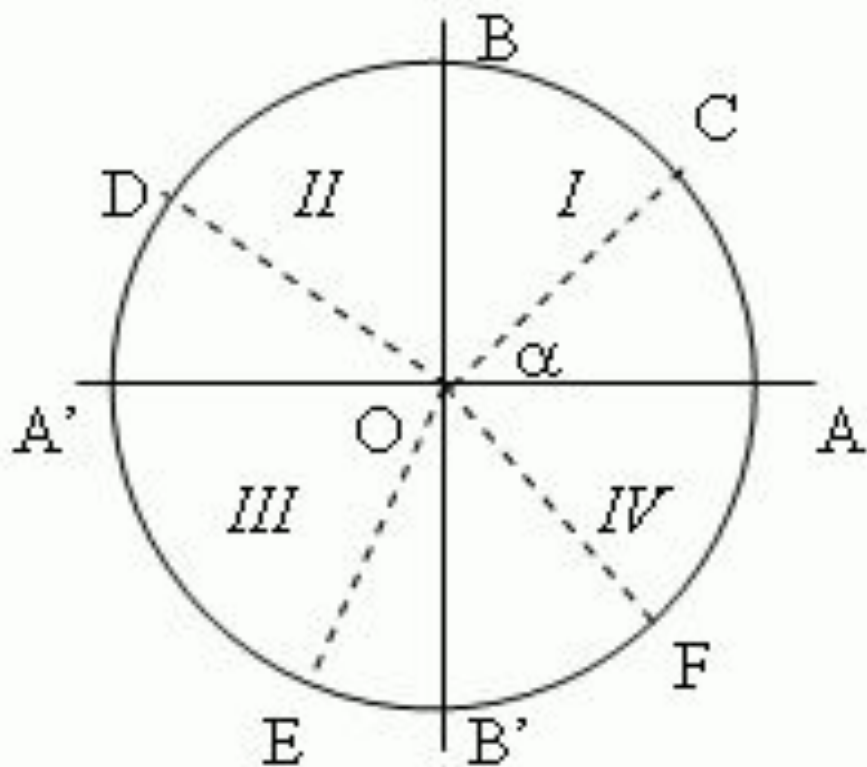


Рис. 3

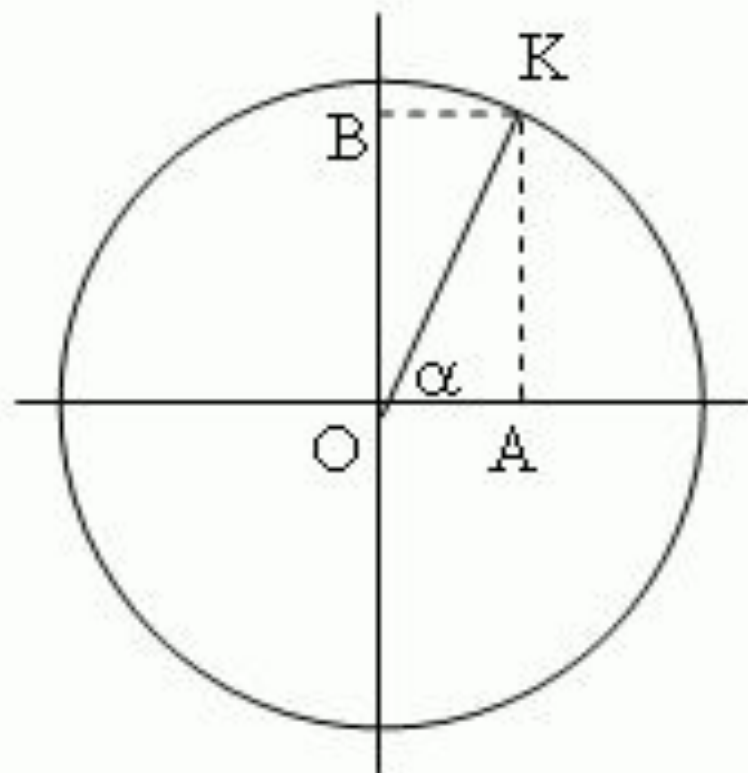


Рис. 4

Линия синуса угла (рис.4) - это вертикальный диаметр единичного круга, линия косинуса угла - горизонтальный диаметр единичного круга. Синус угла (рис.4) - это отрезок $ОВ$ на линии синуса, то есть проекция подвижного радиуса $ОК$ на линию синуса; косинус угла - отрезок $ОА$ на линии косинуса, то есть проекция подвижного радиуса $ОК$ на линию косинуса. Знаки синуса и косинуса в различных четвертях единичного круга показаны на рис.5 и рис.6.

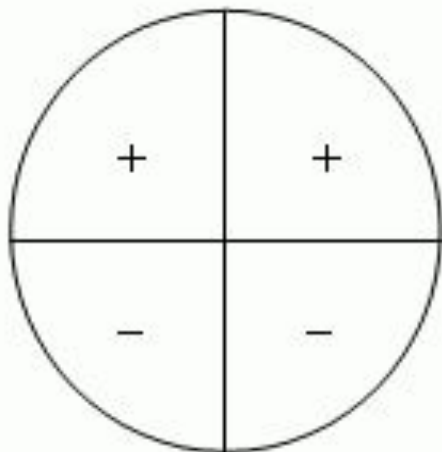


Рис. 5

Знаки синуса и косеканса
в различных четвертях

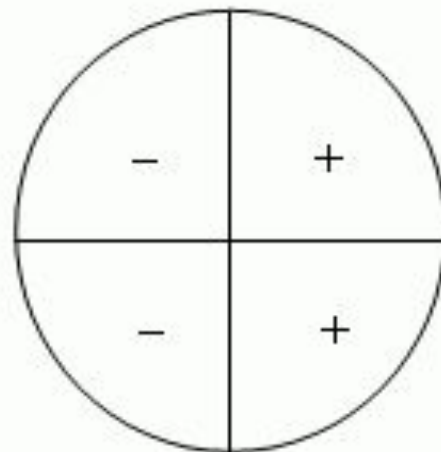


Рис. 6

Знаки косинуса и секанса
в различных четвертях

Знаки синуса и косинуса в различных четвертях единичного круга

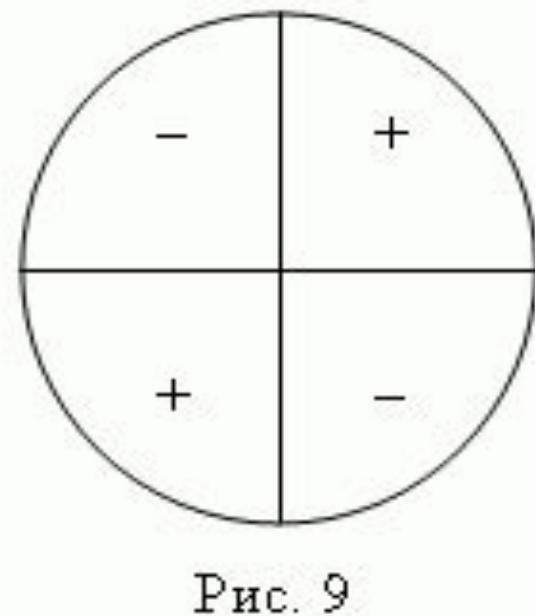
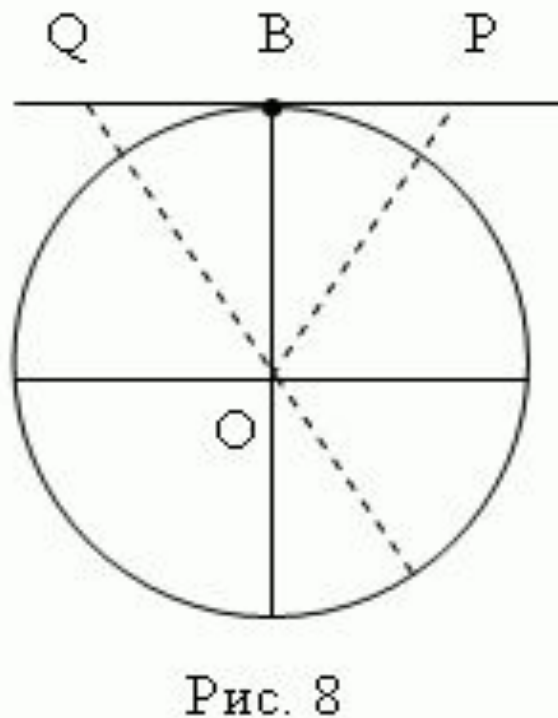
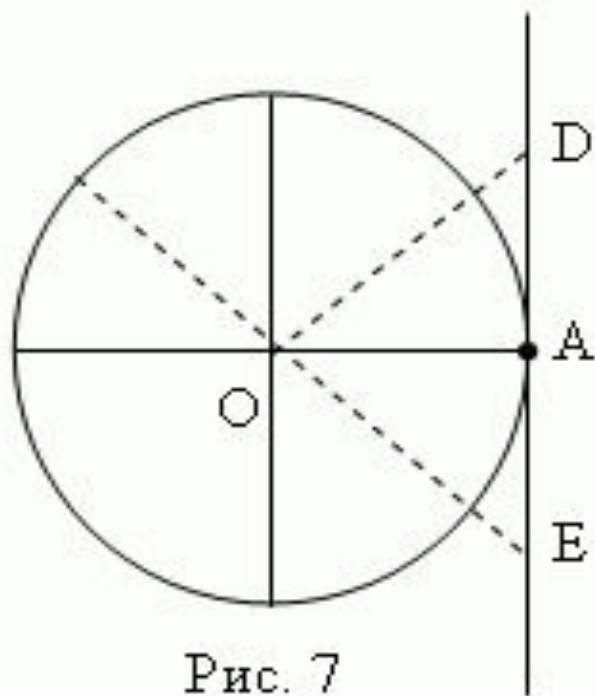
Линия тангенса (рис.7) — это касательная к единичному кругу, проведенная через точку А горизонтального диаметра.

Линия котангенса (рис.8) — это касательная к единичному кругу, проведенная через точку В вертикального диаметра.

Тангенс — это отрезок линии тангенса между точкой касания А и точкой пересечения (D, E, и т.д., рис.7) линии тангенса и линии радиуса.

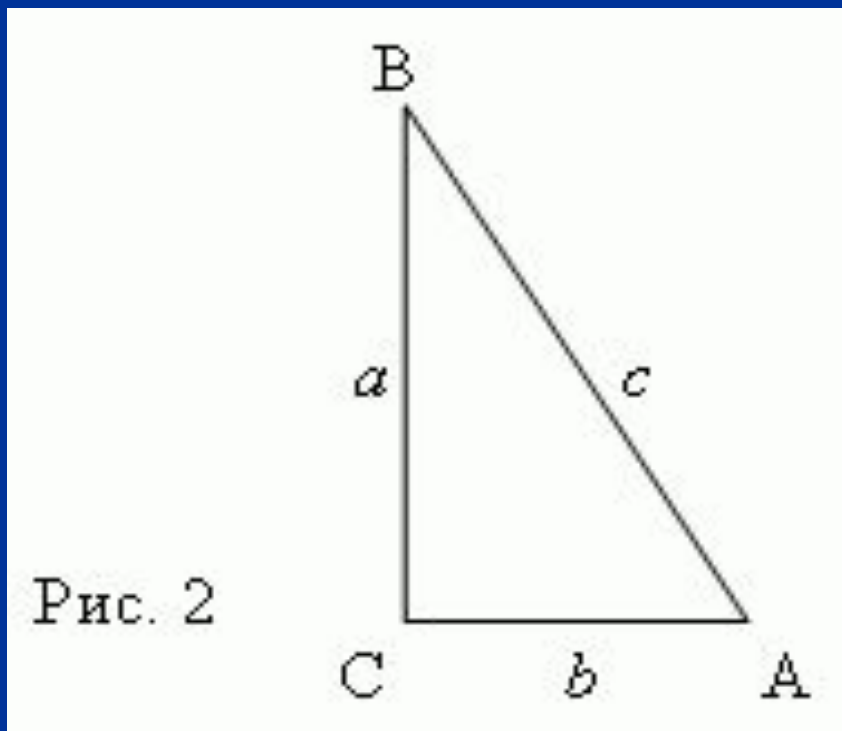
Котангенс — это отрезок линии котангенса между точкой касания В и точкой пересечения (P, Q, и т.д., рис.8) линии котангенса и линии радиуса.

Знаки тангенса и котангенса в различных четвертях единичного круга показаны на рис.9.



Тригонометрические функции острого угла

- *Тригонометрические функции* острого угла есть отношения различных пар сторон прямоугольного треугольника (рис.2):



Тригонометрические функции острого угла:

синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс.

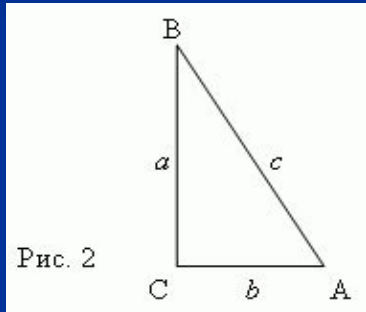
- 1) Синус - отношение противолежащего катета к гипотенузе: $\sin A = a / c$.
- 2) Косинус - отношение прилежащего катета к гипотенузе: $\cos A = b / c$.
- 3) Тангенс - отношение противолежащего катета к прилежащему: $\tan A = a / b$.
- 4) Котангенс - отношение прилежащего катета к противолежащему: $\cot A = b / a$.
- 5) Секанс - отношение гипотенузы к прилежащему катету: $\sec A = c / b$.
- 6) Косеканс - отношение гипотенузы к противолежащему катету: $\operatorname{cosec} A = c / a$.

Прямоугольный треугольник ABC

(рис.2) имеет катеты:

$a = 4$, $b = 3$. Найти синус, косинус и тангенс угла A.

- Решение . Во-первых, найдём гипотенузу, используя теорему Пифагора:



откуда следует: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

Согласно

вышеприведенным формулам имеем:

- $\sin A = a / c = 4 / 5$; $\cos A = b / c = 3 / 5$; $\tan A = a / b = 4 / 3$.

Для некоторых углов можно записать точные значения их тригонометрических функций.

Наиболее важные случаи приведены в таблице:

A	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$	$\cot A$	$\sec A$	$\operatorname{cosec} A$
0°	0	1	0	∞	1	∞
30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	2
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	2	$2/\sqrt{3}$
90°	1	0	∞	0	∞	1

УГЛЫ 0° и 90° , строго говоря,

- не являются острыми в прямоугольном треугольнике, однако при расширении понятия тригонометрических функций эти углы также рассматриваются.
- Символ ∞ в таблице означает, что абсолютное значение функции неограниченно возрастает, если угол приближается к указанному значению.

Решение прямоугольных треугольников

По двум сторонам. По стороне и острому углу.

1. **По двум сторонам.** Если заданы две стороны прямоугольного треугольника, то третья сторона вычисляется по теореме Пифагора.
2. Острые углы могут быть определены по одной из трёх первых формул для тригонометрических функций в зависимости от того, какие стороны известны. Например, если заданы катеты a и b , то угол A определяется по формуле:

$$\tan A = a / b .$$

П р и м е р 1. Катет $a = 0.324$, гипотенуза $c = 0.544$. Найти второй катет b и углы A и B .

■ **Р е ш е н и е .** Катет b равен:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{0.544^2 - 0.324^2} \approx 0.437.$$

Углы: $\sin A = a / c = 0.324 / 0.544 \approx 0.5956$, что соответствует $A \approx 36^\circ.5546 \approx 36^\circ 33' 17''$. Отсюда, $B = 90^\circ - A \approx 53^\circ 26' 43''$.

П р и м е р 2. Даны два катета: $a = 7.2$ см, $b = 6.4$ см. Найти гипотенузу и углы А и В.

- Р е ш е н и е . Гипотенуза c равна:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{7.2^2 + 6.4^2} \approx 9.6 \text{ см.}$$

Углы: $\sin A = a / c = 7.2 / 9.6 \approx 0.75$, что соответствует $A \approx 48^\circ.59 \approx 48^\circ 35' 25''$. Отсюда, $B = 90^\circ - A \approx 41^\circ 24' 35''$.

По стороне и острому углу.

- . Если задан один острый угол A , то другой острый угол B находится из равенства:
- $B = 90^\circ - A$. Стороны находятся по формулам тригонометрических функций, переписанных в виде:

$$a = c \sin A, \quad b = c \cos A, \quad a = b \tan A,$$

$$b = c \sin B, \quad a = c \cos B, \quad b = a \tan B.$$

- Остаётся выбрать те формулы, которые содержат заданную или уже найденную сторону.

П р и м е р . Дано: гипотенуза $c = 13.65$ м и
острый угол $A = 54^{\circ}17'$.

Найти другой острый угол B и катеты a и b .

Р е ш е н и е . Угол $B = 90^{\circ} - A \approx 90^{\circ} - 54^{\circ}17' \approx 35^{\circ}43'$.

Катеты: $a = c \sin A = 13.65 \cdot \sin 54^{\circ}17' \approx 11.08$ м;

$b = c \cos A = 13.65 \cdot \cos 54^{\circ}17' \approx 7.97$ м.

Рadianное и градусное измерение углов

Градусная мера.

Здесь единицей измерения является *градус* (обозначение $^{\circ}$) — это поворот луча на $1 / 360$ часть одного полного оборота. Таким образом, полный оборот луча равен 360° . Один градус состоит из 60 *минут* (их обозначение $'$); одна минута — соответственно из 60 *секунд* (обозначаются $''$).

Радианная мера .

Как мы знаем из планиметрии длина дуги l , радиус r и соответствующий центральный угол α связаны соотношением:

$$\alpha = l / r .$$

Эта формула лежит в основе определения радианной меры измерения углов. Так, если $l = r$, то $\alpha = 1$, и мы говорим, что угол равен 1 радиану, что обозначается: $\alpha = 1 \text{ рад}$.

Таким образом, мы имеем следующее определение радианной меры измерения:

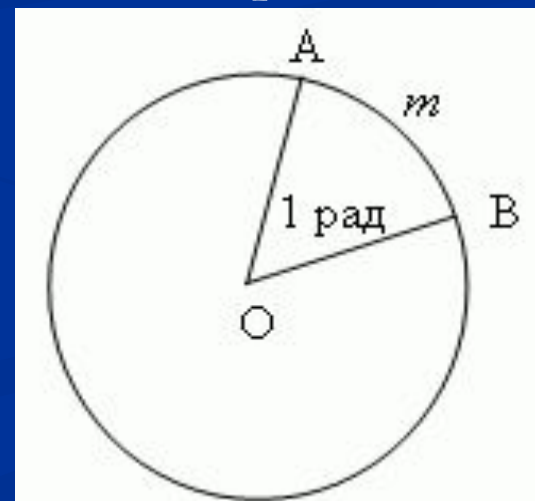


Рис. 1

Следуя этой формуле, длину окружности C и её радиус r можно выразить следующим образом:

$$2 = C / r .$$

- Так, полный оборот, равный 360° в градусном измерении, соответствует 2 в радианном измерении. Откуда мы получаем значение одного радиана, и наоборот:

$$1 \text{ рад} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57^\circ, 2958 \approx 57^\circ 17' 45'' .$$

Полезно помнить следующую сравнительную таблицу значений наиболее часто встречающихся углов в градусах и радианах:

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360^\circ} \approx 0.017453 \text{ рад.}$$

Углы в градусах	360°	180°	90°	60°	45°	30°
Углы в радианах	2π	π	π/2	π/3	π/4	π/6

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла.

Эти формулы являются основными тригонометрическими тождествами.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 ;$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 ;$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} ;$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} ;$$

$$\sin \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = 1 ;$$

$$\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1 ;$$

$$\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha ;$$

$$\operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \cot^2 \alpha ;$$

$$\cos^2 \alpha = 1 / (1 + \tan^2 \alpha) = \cot^2 \alpha / (1 + \cot^2 \alpha) ;$$

$$\sin^2 \alpha = 1 / (1 + \cot^2 \alpha) = \tan^2 \alpha / (1 + \tan^2 \alpha) .$$

п-33. Формулы приведения

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta ;$$

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta ;$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta ;$$

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta ;$$

п-33. Формулы приведения

$$\tan (\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} ;$$

$$\tan (\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} ;$$

$$\cot (\alpha + \beta) = - \frac{1 - \cot \alpha \cot \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} ;$$

$$\cot (\alpha - \beta) = - \frac{1 + \cot \alpha \cot \beta}{\cot \alpha - \cot \beta} .$$

п-33. Формулы приведения

- Эти формулы позволяют:
- 1) найти численные значения тригонометрических функций углов, бо́льших 90° ;
- 2) выполнить преобразования, приводящие к более простым выражениям;
- 3) избавиться от отрицательных углов и углов, бо́льших 360° .

	$\sin$	$\cos$	$\tan$	$\cot$
$-\alpha$	$-\sin \alpha$	$+\cos \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\cot \alpha$
$90^\circ - \alpha$	$+\cos \alpha$	$+\sin \alpha$	$+\cot \alpha$	$+\tan \alpha$
$90^\circ + \alpha$	$+\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cot \alpha$	$-\tan \alpha$
$180^\circ - \alpha$	$+\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\cot \alpha$
$180^\circ + \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$+\tan \alpha$	$+\cot \alpha$
$270^\circ - \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$+\cot \alpha$	$+\tan \alpha$
$270^\circ + \alpha$	$-\cos \alpha$	$+\sin \alpha$	$-\cot \alpha$	$-\tan \alpha$
$360^\circ k - \alpha$	$-\sin \alpha$	$+\cos \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\cot \alpha$
$360^\circ k + \alpha$	$+\sin \alpha$	$+\cos \alpha$	$+\tan \alpha$	$+\cot \alpha$

п 34. Формулы сложения и вычитания

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta ;$$

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta ;$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta ;$$

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta ;$$

п 34. Формулы сложения и вычитания

$$\tan (\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} ;$$

$$\tan (\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} ;$$

$$\cot (\alpha + \beta) = - \frac{1 - \cot \alpha \cot \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} ;$$

$$\cot (\alpha - \beta) = - \frac{1 + \cot \alpha \cot \beta}{\cot \alpha - \cot \beta} .$$

Основные соотношения между элементами треугольника.

- Теорема косинусов. Теорема синусов.
Теорема тангенсов.
- Формулы площади, формула Герона.
- Радиусы описанного и вписанного кругов

Обозначения: a , b , c — стороны;

A , B , C — углы; $p = (a + b + c) / 2$ — полупериметр; h — высота;

S — площадь; R — радиус описанного круга;

r — радиус вписанного круга.

Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \quad \text{or} \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Теорема тангенсов:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}} = \frac{\cot \frac{C}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}.$$

Формулы площади, формула Герона:

$$S = \frac{bc \cdot \sin A}{2} = \frac{b^2 \cdot \sin A \cdot \sin C}{2 \sin B} = \frac{h^2 \cdot \sin B}{2 \sin A \cdot \sin C};$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad - \text{ формула Герона};$$

$$S = r^2 \cdot \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2} = p^2 \cdot \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2};$$

$$S = p(p-a) \cdot \tan \frac{A}{2};$$

Радиусы описанного и вписанного кругов:

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{abc}{4S} = \frac{p}{4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}};$$

$$r = \frac{S}{p} = (p - a) \cdot \tan \frac{A}{2} = \frac{a \cdot \sin B/2 \cdot \sin C/2}{\cos A/2} = 4 R \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}.$$

Решение косоугольных треугольников.

- Заданы три стороны a, b, c . Найти углы A, B, C .
- По теореме косинусов находим один из углов:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

второй угол находим по теореме
синусов:

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a};$$

третий угол находится по формуле:
 $C = 180^\circ - (A + B).$

П р и м е р . Заданы три стороны
треугольника: $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$.
Найти его углы.

$$\cos A = \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8} \Rightarrow A \approx 28^\circ.955;$$

$$\sin A \approx 0.484, \text{ тогда } \sin B = \frac{3 \cdot 0.484}{2} = 0.726, \text{ и } B \approx 46^\circ.552;$$

$$C = 180^\circ - (28^\circ.955 + 46^\circ.552) = 104^\circ.493.$$

Дано: две стороны a и b и угол C между ними.

Найти сторону c и углы A и B .

По теореме косинусов находим сторону c :

- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$;

- а затем по теореме синусов — угол A :

$$\sin A = \frac{a \cdot \sin C}{c} ;$$

- здесь необходимо подчеркнуть, что A — острый угол, если $b / a > \cos C$, и тупой угол, если $b / a < \cos C$. Третий угол $B = 180^\circ - (A + C)$.

Заданы любые два угла и сторона.

Найти третий угол и две другие стороны.

Очевидно, что третий угол вычисляется по формуле:

$$A + B + C = 180^\circ,$$

и тогда используя теорему синусов, мы найдём две другие стороны.

- Даны две стороны a и b и угол B , противоположный одной из них. Найти сторону c и углы A и C .
- Сначала по теореме синусов найдём угол A :

$$\sin A = \frac{a \sin B}{b}.$$

Здесь возможны следующие случаи:

- 1) $a > b$; $a \cdot \sin B > b$ — здесь решения нет;
- 2) $a > b$; $a \cdot \sin B = b$ — здесь одно решение, A — прямой угол;
- 3) $a > b$; $a \cdot \sin B < b < a$ — здесь два решения: A может быть либо острым, либо тупым углом;
- 4) $a < b$ — здесь одно решение, A — острый угол.



После нахождения угла A , найдём третий угол:

- $C = 180^\circ - (A + B)$. Если A может иметь два значения, то и C может иметь два значения. Теперь по теореме синусов можно найти третью сторону:

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B}.$$

Если угол C имеет два значения,

то и сторона c имеет два значения,
следовательно, заданным условиям
удовлетворяют два
различных треугольника.

Дано: $a = 5$, $b = 3$, $B = 30^\circ$.

Найти сторону c и углы A и C .

Р е ш е н и е

- Здесь: $a > b$ и $a \sin B < b$. (Проверьте, пожалуйста!).
- Тогда согласно случаю 3 здесь возможны два решения:

$$\sin A = \frac{a \cdot \sin B}{b} = \frac{5 \cdot \sin 30^\circ}{3} = \frac{5 \cdot 0.5}{3} = \frac{5}{6},$$

откуда первое значение: $A \approx 56^\circ.443$, а второе: $A \approx 123^\circ.557$. Два соответствующих значения угла C : первое - $C \approx 93^\circ.557$ и второе - $C \approx 26^\circ.443$.

Сторона c вычисляется как:

1-е решение:

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B} \approx \frac{3 \cdot \sin 93^\circ.557}{\sin 30^\circ} \approx \frac{3 \cdot 0.998}{0.5} \approx 5.988;$$

2-е решение:

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B} \approx \frac{3 \cdot \sin 26^\circ.443}{\sin 30^\circ} \approx \frac{3 \cdot 0.445}{0.5} \approx 2.672.$$