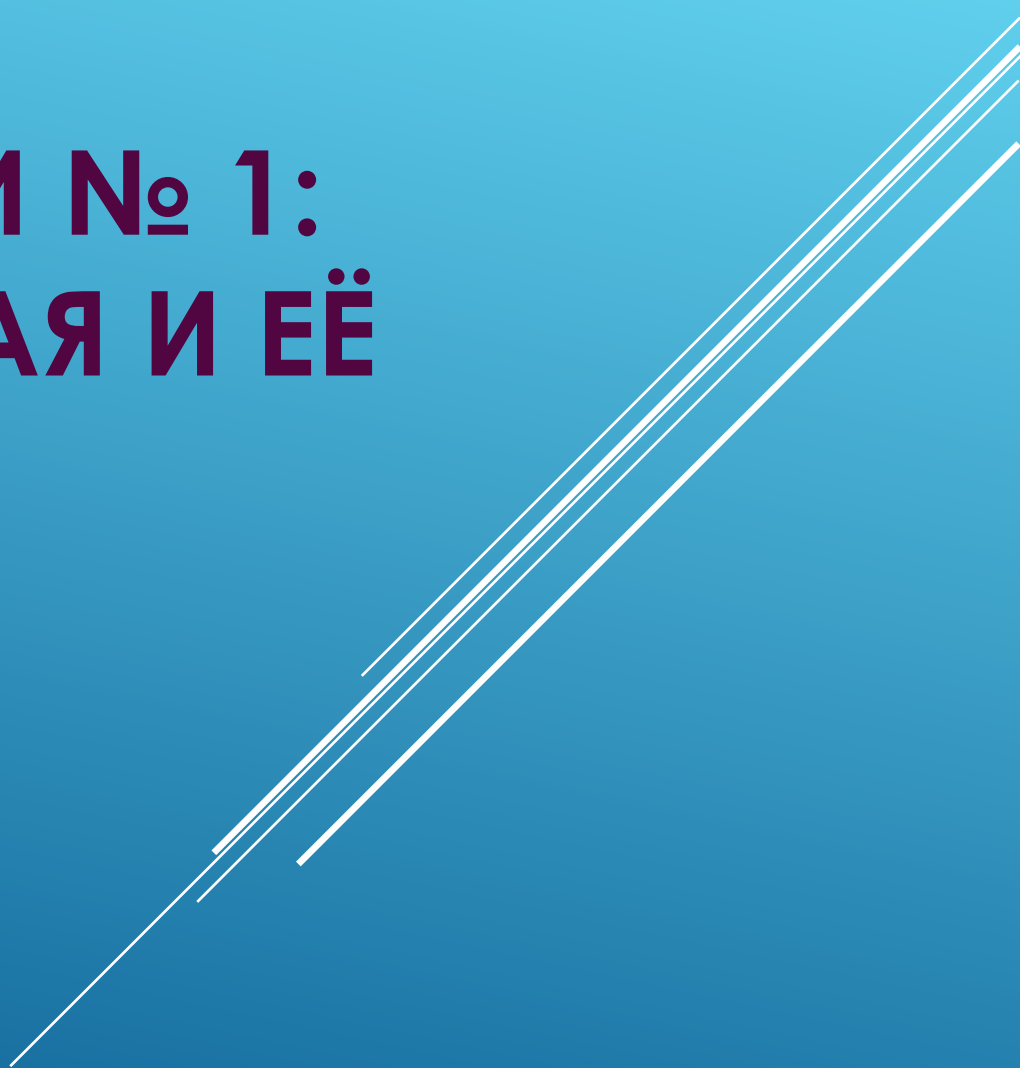


ТЕМА ЛЕКЦИИ № 1: ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ



**«НЕТ НИ ОДНОЙ ОБЛАСТИ
МАТЕМАТИКИ,
КАК БЫ АБСТРАКТНА ОНА НИ
БЫЛА, КОТОРАЯ КОГДА-
НИБУДЬ НЕ ОКАЖЕТСЯ
ПРИМЕНИМОЙ К ЯВЛЕНИЯМ
ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО МИРА»**

Н.И. Лобачевский

ЦЕЛИ ЗАНЯТИЯ:

- ▶ узнать историю открытия производной;
- ▶ узнать основные направления применения производной в разных областях науки и техники.
- ▶ ввести определение производной
- ▶ познакомиться с правилами дифференцирования
- ▶ Узнать в чём заключается геометрический и физический смысл производной

НЕМНОГО ИЗ ИСТОРИИ

Производная – одно из фундаментальных понятий математики, характеризующее скорость изменения функции в данной точке.

Понятие производной возникло в XVII веке в связи с необходимостью решения ряда задач из физики, механики и математики, но в первую очередь следующих двух: определение скорости прямолинейного движения и построения касательной к кривой.

Независимо друг от друга Исаак Ньютон и Готфрид Лейбниц разработали теорию дифференциального исчисления.



Исаак Ньютон
(1643-1727)

«Был этот мир глубокой тьмой окутан. Да будет свет! И вот явился Ньютон»

А.Поуг

Главный его труд-
«Математические начала
натуральной философии»- оказал
колоссальное влияние на развитие
естествознания, стал поворотным
пунктом в истории естествознания.

Ньютон ввёл понятие
производной, изучая законы
механики, тем самым раскрыл её
механический смысл.





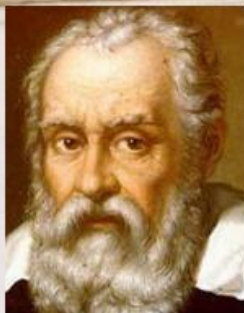
Г.В.Лейбниц.
(1646-1716)

«Предупреждаю, чтобы остерегались отбрасывать dx – это ошибка, которую часто допускают и которая препятствует продвижению вперёд».

Создатель Берлинской академии наук, основоположник дифференциального исчисления, ввёл большую часть современной символики математического анализа. Лейбниц пришёл к понятию производной, решая задачу проведения касательной к произвольной линии, объяснив этим ее геометрический смысл.



Г. Галилей
(1564-1642
г.г.)



В 17 веке на основе учения Г. Галилея активно развилась кинематическая концепция производной.



О. Коши
(1789-1857
г.г.)

Ни Ньютон ни Лагранж не дали четкого определения производной. Впервые определение производной было сформулировано О. Коши, и именно это определение стало общепринятым и в настоящее время используется почти во всех курсах анализа.

Понятие производной встречается в работах ученых:



Ж.Роберваль
(1602-1675 г.г.)
Франция



Р.Декарт
(1596 -1650
г.г.)
Франция



Д.Грегори
(1638-
1675г.г.)
Англия



И.Барроу
(1630-1677г.г.)
Англия



Большой вклад в изучение дифференциального исчисления внесли



Гийом Франсуа
Лопиталь
(1661 г.-1704
г.)
Франция



Даниил
Бернулли
(1700 г.- 1782г.)
Швейцария



Жозеф Луи
Лагранж
(1736 г.-1813
г.)
Франция



Леонард
Эйлер
(1707г.-
1783г.)
Швейцария



Карл Фридрих
Гаусс
(1816г.-1855 г.)
Германия



ПРИРАЩЕНИЕ АРГУМЕНТА, ПРИРАЩЕНИЕ ФУНКЦИИ.

Пусть x – произвольная точка, лежащая в некоторой окрестности фиксированной точки x_0 .

Разность $x - x_0$ называется приращением независимой переменной

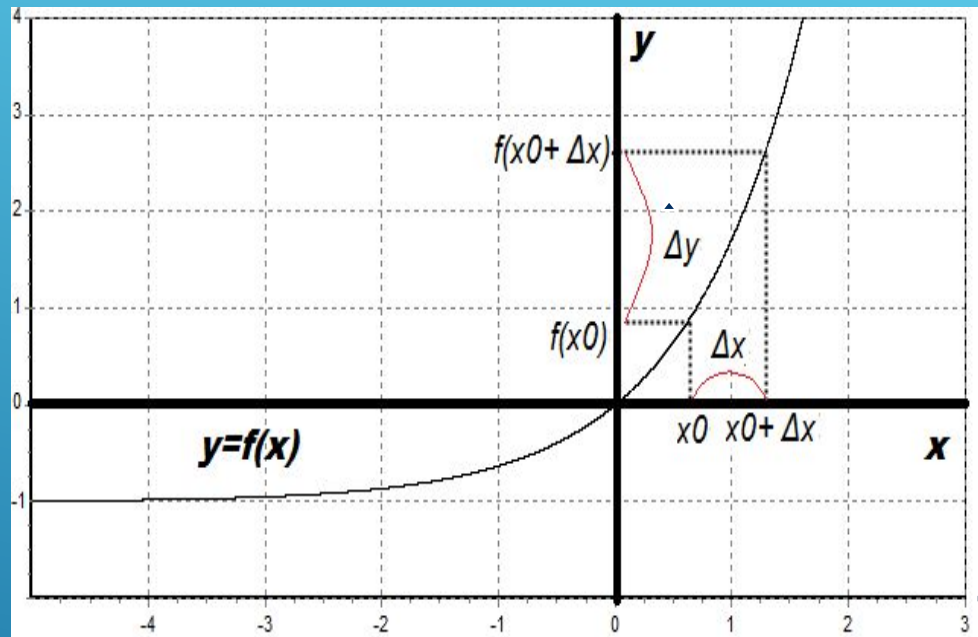
(или приращением аргумента) в точке x_0 и обозначается Δx .

$\Delta x = x - x_0$ – приращение независимой переменной

Приращением функции f в точке x_0 называется разность между значениями функции в произвольной точке и значением функции в фиксированной точке.

$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – приращение функции f

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$



Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется число, к которому стремится отношение приращения функции в этой точке к приращению аргумента при последнем, стремящемся к нулю.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0), \text{ при } \Delta x \rightarrow 0$$

Если функция в точке x_0 имеет производную, говорят, что она **дифференцируема** в этой точке.

Функция $f'(x)$ определенная во всех точках, в которых функция $f(x)$ дифференцируема, называется **производной** функции $f(x)$.

ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Если функции u и v дифференцируемы в точке x_0 , то справедливы следующие правила:

- ▶ 1. Производная суммы $(u+v)' = u' + v'$
- ▶ 2. О постоянном множителе $(Cu)' = Cu'$
- ▶ 3. Производная произведения
 $(uv)' = u'v + uv'$
- ▶ 4. Производная дроби $(u/v)' = (u'v - uv') / v^2$

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1. $C' = 0;$

2. $x' = 1;$

3. $(Cu)' = C \cdot u';$

4. $(x^n)' = nx^{n-1};$

5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$

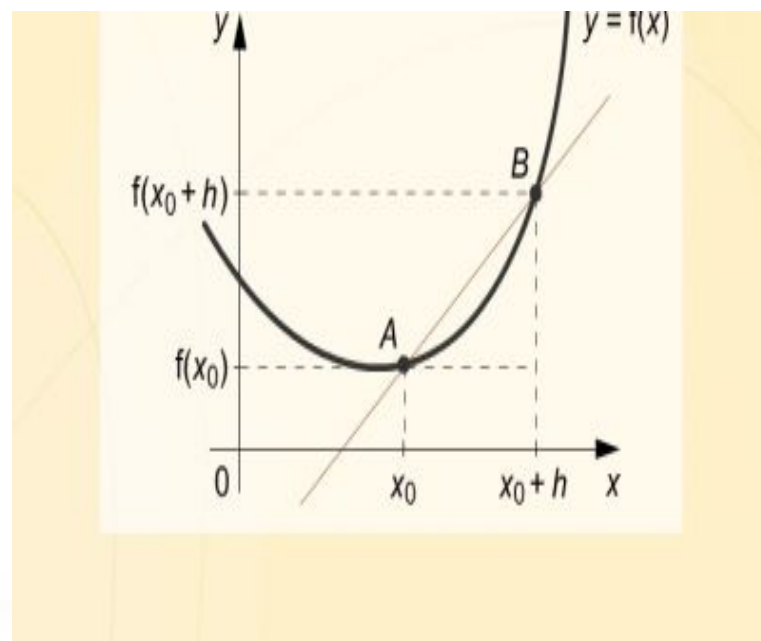
6. $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2};$

7. $(\sin x)' = \cos x;$

8. $(\cos x)' = -\sin x;$

9. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$

10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$



ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

$$1. (x^{10})' = 10x^9$$

$$2. (2x+3)' = 2 \qquad 5' = 0$$

$$3. (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$4. (2\sin x)' = 2\cos x$$

$$5. \cos(3x-4)' = (\cos(3x-4))' (3x-4)' = -3\sin(3x-4)$$

$$6. (x\sin x)' = x'\sin x + x(\sin x)' = \sin x + x\cos x$$

Решая примеры, проговаривайте вслух.

Помните: «Мысль рождается с собственной речи!»

ТЕСТ ПО ТЕМЕ «ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ»

Найдите производную функции:	Ответы:
1. $y = 4x^3$	И $1 + \frac{1}{x^2}$
2. $y = \frac{x^4}{4}$	Р $3x$
3. $y = 3\sqrt{x}$	З $2x^2$
4. $y = \frac{2}{x}$	Ф $12x^2$
5. $y = x - 4\sqrt{x}$	Ю $\frac{3}{2\sqrt{x}}$
6. $y = x - \frac{1}{x}$	С $1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$
7. $y = x^5 + 3x^4 - 2x - 5$	Я $5x^4 + 12x^3 - 2$
	К $-\frac{2}{x^2}$
	Н $\frac{3}{2}\sqrt{x}$
	Л x^3
	М $4x^3$

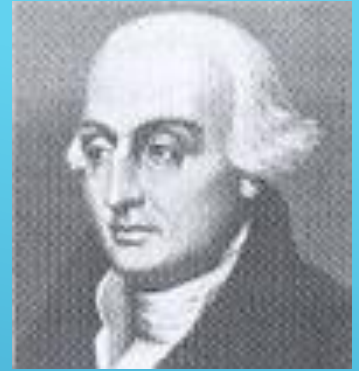
1. Выражение вида Δf появилось уже в конце 17 в. и означает «приращение».

2. Термин производная ввел в 1797г. Ж. Лагранж

3. И. Ньютон называл производную функцию флюксией, а саму функцию – флюентой.

4. Раздел математики, в котором изучаются производные и их применения к исследованию функций, называется дифференциальным исчислением.

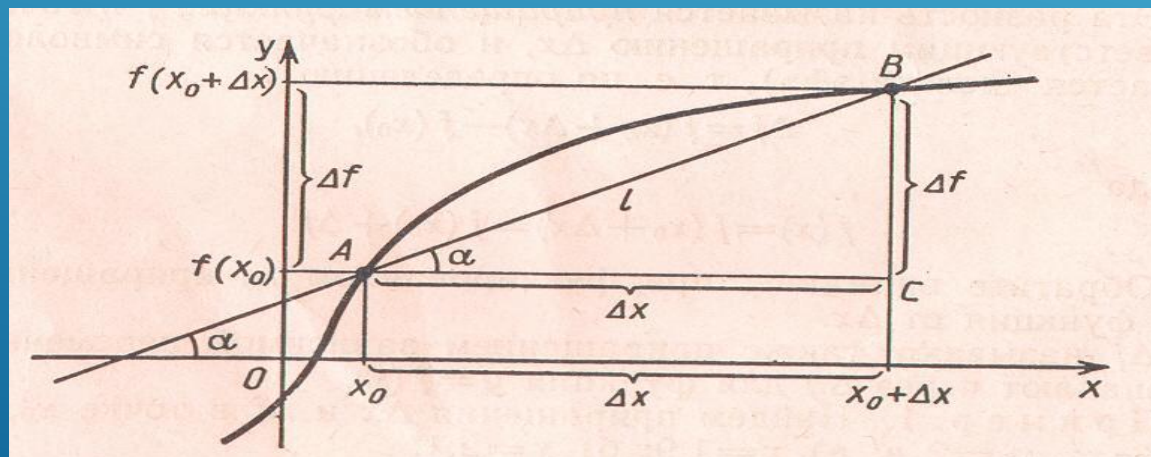
5. Дифференциальное исчисление создано Ньютоном и Лейбницем в конце 17 столетия.

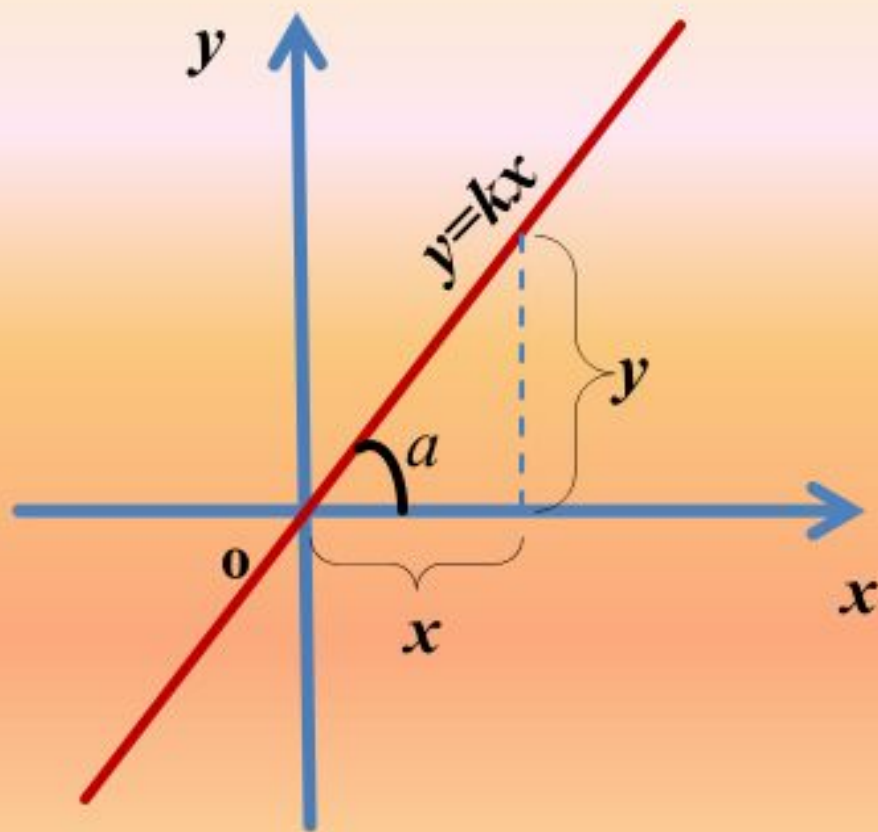


ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Геометрический смысл производной состоит в том, что производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной в точке x_0 и тангенсу угла наклона касательной

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \Delta y / \Delta x$$





$$k = \frac{y}{x} = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}} = \operatorname{tg} a$$

Уравнение касательной

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

$(x_0; f(x_0))$ – координаты точки касания

$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$ – тангенс угла наклона касательной в данной точке или угловой коэффициент

$(x; y)$ – координаты любой точки касательной

Найдите угловой коэффициент касательной к кривой $y = 2x^2 + x$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.

Решение.

$$y' = 4x + 1;$$

$$y'(-2) = -7.$$

$$k = -7.$$

Ответ : -7 .

Алгоритм нахождения уравнения касательной к графику функции $y=f(x)$.

1. Вычислим $f(x_0)$.
2. Найдем $f'(x)$
3. Вычислим $f'(x_0)$
4. Подставим найденные числа a , в формулу

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

$$f(1) = 1^2 = 1$$

$$f'(x) = 2x$$

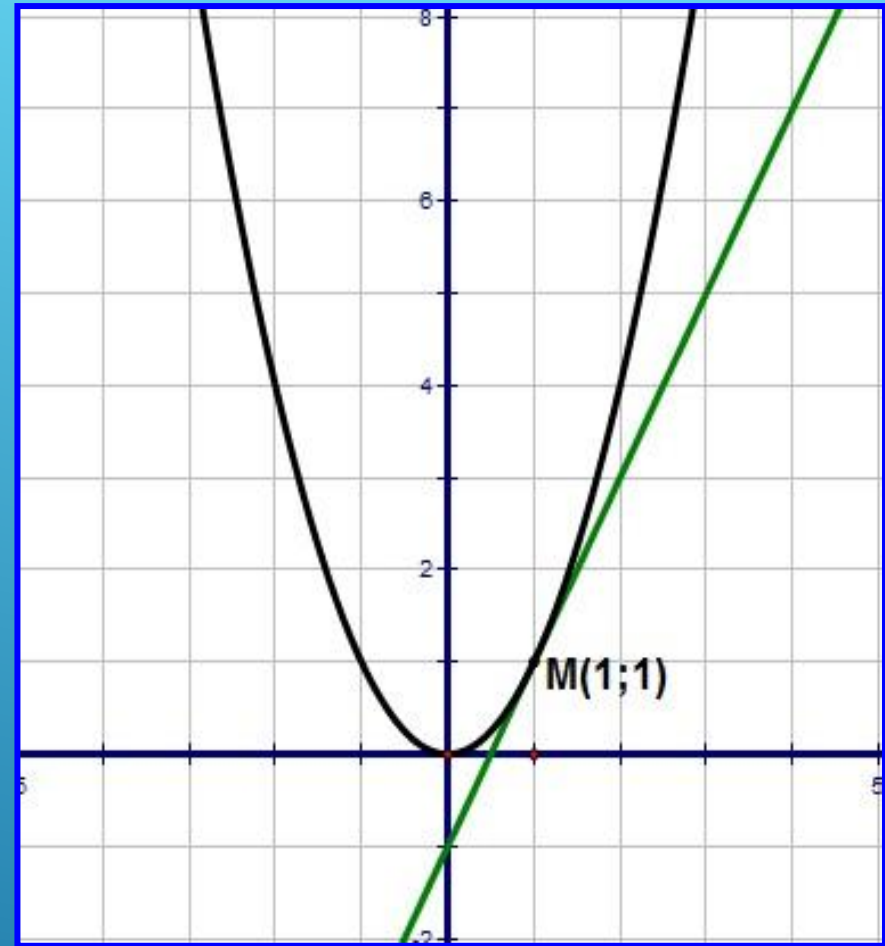
$$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$y = 1 + 2 \cdot (x - 1)$$

$$y = 1 + 2x - 2$$

$$y = 2x - 1 \quad f(x) = x^2$$



К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ $f(x) = x^2$ В ТОЧКЕ $M(1;1)$ СОСТАВИТЬ УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ.

$y = f(x)$ и точка касания $M(x_0; y_0)$

МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ (ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ)

Механический смысл производной состоит в том, что производная пути по времени равна мгновенной скорости в момент времени t_0 :

$$S'(t_0) = V(t_0).$$



РЕШАЕМ ЗАДАЧИ!

Точка движется по закону

$$x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t.$$

- а) выведите формулу для вычисления скорости движения точки в любой момент времени t ($t > 0$);
- б) найдите скорость в момент $t = 2$ с;
- в) через сколько секунд после начала движения точка остановится?

а) $V(t) = -t^2 + 4t + 5.$

б) $V(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 + 5 = -4 + 8 + 5 = 9(\text{м/с}).$

в) $V(t) = 0, \quad -t^2 + 4t + 5 = 0,$

$$t_1 = -1,$$

$$t_2 = 5,$$

$-1 < 0$, не удовлетворяет
условию задачи.

Точка остановится **через 5 секунд**
после начала движения.

Материальная точка движется
прямолинейно по закону $x(t) = t^3 - 4t^2$
Перемещение измеряется в метрах.
Найдите:

- скорость в момент $t = 5\text{с}$;
- ускорение в момент $t = 5\text{с}$.

Решение.

$$V(t) = x'(t) = 3 t^2 - 8 t ;$$

$$V(5) = 3 \cdot 5^2 - 8 \cdot 5 = 35 \text{ (м/с)}.$$

$$a(t) = x''(t) = 6t - 8;$$

$$a(5) = 6 \cdot 5 - 8 = 22 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

ОТВЕТИМ НА СЛЕДУЮЩИЕ ВОПРОСЫ:

- ▶ Сформулируйте определение производной функции?
- ▶ Как называется математическая операция нахождения производной функции?
- ▶ В чем заключается геометрический смысл производной функции?
- ▶ Каков физический (механический) смысл производной?

“УМ ЗАКЛЮЧАЕТСЯ НЕ ТОЛЬКО В
ЗНАНИИ,
НО И В УМЕНИИ ПРИМЕНЯТЬ ЗНАНИЯ
НА ПРАКТИКЕ”

Аристотель