«Матрицы и действия над ними»

<u>*1. Определение матрицы*</u>

Прямоугольная таблица чисел вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей**.

a_{ij} - ***элементы*** матрицы (*i* – номер строки, *j* – номер столбца) Размер матрицы – $m \times n$

Главная диагональ матрицы –

$a_{11}, a_{22} \ldots\ldots a_{mn}$

Пример:

$$A_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Виды матриц

Матрица называется ***прямоугольной***, если количество ее строк не совпадает с количеством столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Матрица называется ***квадратной***, если количество ее строк совпадает с количеством столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & -8 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Матрица называется ***нулевой***, если все ее элементы нулевые :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица называется ***единичной***, если элементы по главной диагонали единицы, а остальные элементы нулевые :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица называется ***диагональной***, если элементы по главной диагонали отличны от нуля, а остальные элементы нулевые:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица называется ***симметричной***, если относительно главной диагонали для всех ее элементов выполняется условие $a_{ij} = a_{ji}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 77 \\ -1 & 77 & 3 \end{pmatrix}$$

Матрицы А и В (одинаковых размерностей) называются ***равными***, если $a_{ij} = b_{ij}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{13} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{7} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{13} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$$

Квадратные матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называются ***треугольными***.

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Прямоугольная матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется ***квазитреугольной*** (ступенчатая или трапециевидная)

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Матрица, состоящая из одной строки называется ***матрицей-строкой*** или ***строчной матрицей***.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Матрица, состоящая из одного столбца называется ***матрицей-столбцом*** или ***столбцевой матрицей***

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Операции над матрицами

Линейные:

1) <u>Сумма </u>(разность) матриц;
2) <u>Произведение </u>матрицы на число.

Нелинейные:

1) <u>Транспонирование </u>матрицы;
2) <u>Умножение </u>матриц;
3) Нахождение обратной матрицы.

Сумма (разность) матриц

Для того, чтобы *сложить* две матрицы A и B (одинаковой размерности) нужно ***сложить их соответствующие элементы***.

Для того, чтобы найти ***разность матриц*** A и B (одинаковой размерности) нужно ***из каждого элемента матрицы A вычесть соответствующий элемент матрицы B.***

Матрица -A называется матрицей ***противоположной*** A.

Пример: Пусть $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}$.

Тогда

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -10 \\ 0 & 9 & 6 \end{bmatrix}, \quad A - B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -8 \end{bmatrix},$$

$$-A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 6 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислите:

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 7 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = ?$$

$$A - B = ?$$

$$B - A = ?$$

Ответ:

$$A+B=\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 7 & 4 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -7 & 4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B-A=\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 7 & -4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

Произведение матрицы на число

Для того, чтобы умножить матрицу ***A*** на число $\alpha \in \mathrm{R}$ нужно

каждый элемент матрицы умножить на число α.

Пример: Пусть $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$,

тогда $2 \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & -12 \\ 0 & 8 & -2 \end{bmatrix}$.

Вычислите:

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 7 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2A = ?$$

$$-3B = ?$$

$$4B - 7A = ?$$

Ответ:

$$2A=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 0 & 8\\ -8 & 18\end{pmatrix}$$

$$-3B=\begin{pmatrix}15 & -18\\ -21 & 0\\ 6 & -3\end{pmatrix}$$

$$4B-7A=\begin{pmatrix}-34 & 3\\ 28 & -28\\ 20 & -59\end{pmatrix}$$

Линейные операции обладают следующими **свойствами**:

1) $A+B=B+A$

2) $(A+B)+C=A+(B+C)$

3) $A+0=A$

4) $A+(-A)=0$

5) $1\cdot A=A$

6) $\alpha\cdot(\beta\cdot A)=(\alpha\cdot\beta)\cdot A$

7) $\alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$

8) $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, **транспонированной** относительно данной.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ то } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Свойства операции транспонирования:

$$1)\ \left(A^T\right)^T = A$$

$$2)\ \left(A+B\right)^T = A^T + B^T$$

$$3)\ \left(A\cdot B\right)^T = B^T A^T$$

Матрица ***А*** называется ***согласованной*** с матрицей ***В***, если число столбцов матрицы ***А*** равно числу строк матрицы ***В***:

Например:

1) $\grave{A}_{m\times n}, \quad B_{n\times k}$

2) $\grave{A}_{2\times 4}, \quad B_{4\times 1}$

3) $\grave{A}_{m\times 2}, \quad B_{2\times k}$

Умножение матриц определяется для <u>**согласованных**</u> матриц.

<u>Произведе</u> $\boldsymbol{A_{m\times n}=(a_{ij})}$

матрицы на матрицу $\boldsymbol{B_{n\times k}=(b_{ij})}$

называется матрица $\boldsymbol{C_{m\times k}=(c_{ij})}$, для которой

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}$$

т.е. каждый элемент матрицы ***С*** равен сумме произведений элементов *<u>i-й строки матрицы</u>* ***А*** на соответствующие элементы *<u>j-го столбца матрицы</u>* ***В***.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = C = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 5 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 23 & 18 \end{pmatrix}$$

Свойства операции умножение матриц:

1. Свойство сочетательности или ассоциативности

$$(AB)C = A(BC)$$

2.

$$\alpha(AB) = A(\alpha B) = (\alpha A)B$$

3. Свойство распределительности (дистрибутивности) справа и слева относительно сложения матриц

$$(A+B)C = AC + BC$$
$$C(A+B) = CA + CB$$

Вычислите:

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = ? \qquad B \cdot A = ?$$

$$A^T \cdot B = ? \qquad B^T \cdot A = ?$$

$$A^T \cdot B^T = ? \qquad B^T \cdot A^T = ?$$