

Похибки наближених обчислень

План

- Елементи теорії похибок
- Абсолютна та відносна похибки
- Пряма задача теорії похибок

Елементи теорії похибок

Під похибкою розумітимемо величину, що характеризує точність результату. Похибки, що виникають під час розв'язування задачі, можна розділити на три групи:

- 1) похибка задачі (неусувна похибка);
- 2) похибка методу;
- 3) похибка заокруглень (похибка операцій).

Неусувна похибка є наслідком

- а) неточності вхідних даних, що є в математичному описі задачі;
- б) невідповідності математичної моделі реальній задачі (інколи цю похибку називають похибкою математичної моделі).

Елементи теорії похибок

Похибка методу виникає тому, що для розв'язування математичної задачі доводиться використовувати наближені схеми, оскільки отримання точного розв'язку потребує необмеженої або неприйнятно великої кількості арифметичних операцій. У багатьох випадках це просто неможливо. Похибка заокруглень виникає в разі введення-виведення даних до комп'ютера та в ході виконання математичних операцій.

Елементи теорії похибок

Основна задача теорії похибок – знаходження області невизначеності результату. Розрізняють такі задачі теорії похибок:

- пряма задача – визначення точності результату розв'язування задачі залежно від різних видів похибок;
- обернена задача – визначення того, з якою точністю треба взяти початкові дані, щоб неусувна похибка результату розв'язування задачі була менша від заданого значення.

Елементи теорії похибок

Розглянемо процес заокруглення чисел. Якщо число $x=2,128492$ і його потрібно заокруглити до п'яти десяткових знаків після коми, то матимемо $\dot{x}=2,12849$. Тобто якщо старший розряд, який відкидають, менше 5, то попередня цифра не змінюється. Якщо $x=2,128492$ потрібно заокруглити до чотирьох знаків після коми, то $\dot{x}=2,1285$. Тобто якщо старший розряд, який відкидають, дорівнює або більше 5, то попередню цифру в числі збільшують на 1.

Елементи теорії похибок

Розглянемо приклади заокруглення чисел:

$$x = 4,6495843 ;$$

$$\tilde{x} = 4,649584 ;$$

$$\tilde{x} = 4,64958 ;$$

$$\tilde{x} = 4,6496 ;$$

$$\tilde{x} = 4,650 ;$$

$$\tilde{x} = 4,65 ;$$

$$\tilde{x} = 4,6 ;$$

$$\tilde{x} = 5 .$$

$$x = 237,472355 ;$$

$$\tilde{x} = 237,47236 ;$$

$$\tilde{x} = 237,4724 ;$$

$$\tilde{x} = 237,472 ;$$

$$\tilde{x} = 236,47$$

$$\tilde{x} = 237,5 ;$$

$$\tilde{x} = 238 ;$$

$$\tilde{x} = 2,4 \cdot 10^2 ;$$

$$\tilde{x} = 2 \cdot 10^2$$

Зауваження

Інколи вважають, якщо старший розряд, що відкидається дорівнює 5, а попередня до нього цифра парна, то вона не змінюється, якщо ж попередня цифра непарна, то вона збільшується на одиницю.

Абсолютна та відносна похибки

Припустимо x – точне значення деякої величини, а $\dot{x}$ – її відоме наближене значення. **Абсолютною похибкою** числа $\dot{x}$ називають величину $\Delta\dot{x}=|x-\dot{x}|$. **Відносною похибкою** числа $\dot{x}$ називають величину $\delta\dot{x}= \Delta\dot{x}/|x|$, якщо $x \neq 0$. Оскільки в більшості випадків точне значення числа невідоме, то на практиці використовують граничні абсолютну $\Delta_{\dot{x}}$ і відносну $\delta_{\dot{x}}$ похибки, які дещо більші, ніж значення $\Delta\dot{x}$ та $\delta\dot{x}$, відповідно.

Точність результату краще характеризує відносна похибка. Інформацію про абсолютну та відносну похибки можна використати для такого відображення числа x :

$$x = \dot{x} \pm \Delta\dot{x};$$

$$x = \dot{x}(1 \pm \delta\dot{x}).$$

Абсолютна та відносна похибки

Значущими цифрами числа називають усі цифри в його записі, починаючи з першої ненульової цифри зліва. Наприклад:

$x=5,650123$ – усі цифри в записі цього числа значущі;

$x=0,003487$ – значущі цифри тільки 3,4,8,7;

$x=0,02204900$ – значущі цифри 2, 2, 0, 4, 9, 0, 0 (два останні нулі в записі числа є значущими);

$x=1\ 230\ 000$ – усі цифри значущі;

$x=7,16 \cdot 10^6$ – значущі цифри тільки 7, 1,6.

Значущу цифру називають **правильною (точною)**, якщо абсолютна похибка числа не перевищує половини одиниці розряду, що відповідає цій цифрі (або одиниці розряду, що відповідає цій цифрі).

Приклади

Приклад 1. Нехай $x^*=14,537$ і відомо, що $\Delta(x^*)=0,04$. Скільки вірних значущих цифр має число x^* ?

Розв'язання. Маємо $\Delta(x^*)>0,5\cdot 10^{-2}$ і $\Delta(x^*)<0,5\cdot 10^{-1}$. Отже у числа x^* вірними будуть значущі цифри 1,4,5, а цифри 3 і 7 – сумнівні.

Приклад 2. Нехай $x^*=8,677142$ і $\Delta(x^*)=3\cdot 10^{-4}$. Скільки вірних значущих цифр має число x^* ?

Розв'язання. Оскільки $\Delta(x^*)=0,3\cdot 10^{-3}<0,5\cdot 10^{-3}$, то x^* має вірні три значущі цифри після коми, тобто вірними будуть значущі цифри 8,6,7,7.

Приклад 3. Нехай $x^*=0,046725$ і $\Delta(x^*)=0,008$. Скільки вірних значущих цифр має число x^* ?

Розв'язання. Маємо $\Delta(x^*)=0,0\cdot 10^{-2}>0,5\cdot 10^{-2}$. Отже у числа x^* всі значущі цифри сумнівні.

Приклади

Приклад 4. Припустимо $x=34,519$ і відомо, що $\Delta x=0,03$. Скільки правильних значущих цифр має число x ?

Приклад 5. Припустимо $x=9,535155$ і $\Delta x=2 \cdot 10^{-4}$. Скільки правильних значущих цифр має число x ?

Приклад 6. Нехай $x=0,054289$ і $\Delta x=0,006$. Скільки правильних значущих цифр має число x ?

Пряма задача теорії похибок

Пряма задача теорії похибок полягає в оцінці точності результату розв'язування задачі залежно від похибок вхідних даних.

Припустимо потрібно визначити абсолютну та відносну похибки функції $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо задані похибки аргументів. Припустимо, що функція y є неперервно диференційовною в області невизначеності аргументів, тобто в області

$$\dot{x}_i - \Delta \dot{x}_i \leq x_i \leq \dot{x}_i + \Delta \dot{x}_i \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

де $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n$ – наближені значення відповідних аргументів, $\Delta \dot{x}_i$ – гранична абсолютна похибка наближеного значення $\dot{x}_i$ ($i=1, 2, \dots, n$).

Пряма задача теорії похибок

Припустимо $\Delta \dot{x}_i = |x_i - \dot{x}_i|$ ($i=1,2,\dots,n$) – абсолютна похибка наближеного значення аргументу $\dot{x}_i$; $\Delta \hat{y} = |y - \hat{y}|$ – абсолютна похибка функції, де y – точне значення функції; $\hat{y}$ – її наближене значення. Тоді, використовуючи теорему Лагранжа про скінченний приріст, одержимо

$$y - \tilde{y} = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)}{\partial x_i} (x_i - \tilde{x}_i).$$

Пряма задача теорії похибок

Отже, обмежуючись лінійною частиною приросту Δy , якою є повний диференціал dy , отримаємо

(1)

$$|dy| = |df(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)| =$$
$$= \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)}{\partial x_i} \Delta \tilde{x}_i \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)}{\partial x_i} \right| \Delta \tilde{x}_i. \quad \text{З огляду на (1),}$$

використовують оцінку

(2)

як $\Delta_{\tilde{y}} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)}{\partial x_i} \right| \Delta \tilde{x}_i$, якою оцінкою похибки. З оцінки (2) знайдемо відносну похибку

(3)

$$\delta_{\tilde{y}} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \right| \cdot |\tilde{x}_i| \delta_{\tilde{x}_i}.$$

Приклади

Приклад 7. Заокруглюючи числа до трьох значущих цифр, визначити абсолютну та відносну похибки отриманих наближених чисел: 1) 0,5235; 2) 5,3244; 3) -154,82.

Приклад 8. Визначити кількість правильних цифр у числі x , якщо відома його відносна похибка:

- 1) $x = 23,924$, $\delta x = 0,1$;
- 2) $x = 9,4698$, $\delta x = 0,1102$;
- 3) $x = 51782$, $\delta x = 0,01$.

Обернена задача теорії похибок

Обернена задача теорії похибок полягає в наступному: з якою точністю потрібно задати значення аргументів $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ функції $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, щоб похибка значення функції $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ не перевищувала заданої величини ε .

Для функції однієї змінної $y=f(x)$ абсолютну похибку можна наближено обчислити за формулою

$$\Delta(x^*) = \frac{\Delta(y^*)}{|f'(x^*)|}, \quad (f'(x^*) \neq 0) \quad (4)$$

Обернена задача теорії похибок

Для функції декількох змінних $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задача розв'язується за допомогою наступних рекомендацій:

а) принцип рівних впливів, тобто вважаємо, що всі доданки $c_i=|\partial f / \partial x_i| \Delta(x_i^*)$, $i=1, \dots, n$, рівні між собою. Тоді абсолютні похибки всіх аргументів визначаються формулою

$$\Delta(x_i^*) = \frac{\Delta(y^*)}{n \left| \frac{\partial f^*}{\partial x_i} \right|}, \quad i = \overline{1, n} \quad (5)$$

б) вважаємо всі похибки рівними, причому максимально можливими, тобто покладемо

$$\Delta(x_1^*) = \Delta(x_2^*) = \dots = \Delta(x_n^*),$$

де

$$\delta = \varepsilon / (c_1 + c_2 + \dots + c_n)$$

Приклади

Приклад 9. *Сторона квадрата дорівнює 2м. З якою точністю її потрібно виміряти, щоб похибка знаходження площі не перевищувала 1см^2 ?*

Розв'язання. Позначимо сторону квадрату через x ; $S=x^2$, $S'=2x$. Тоді за формулою (4) отримаємо

$$\Delta(x^*) = \frac{1(\text{см})}{2 \cdot 200} \neq \frac{1}{4} 10^{-2}$$

Приклади

- Приклад 10. З якою кількістю вірних значущих цифр потрібно взяти вільний член квадратного рівняння $x^2 - 2x + \lg 2 = 0$, щоб отримати корені рівняння з чотирма вірними значущими цифрами?

Розв'язання. Для коренів даного рівняння маємо $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \lg 2}$. Оскільки $\lg 2 \approx 0,3 \dots$, тоді $x_1 \approx 1,8 \dots$, $x_2 \approx 0,1 \dots$. Отже за змістом задачі x_1^* потрібно визначити так, щоб $\Delta(x_1^*) \leq 0,5 \cdot 10^{-3}$, а для x_2^* , щоб $\Delta(x_2^*) \leq 0,5 \cdot 10^{-4}$. Позначимо $z = \lg 2$ і розглянемо функцію $y = 1 + \sqrt{1 - z}$. З'ясуємо, з якою точністю потрібно обчислити z^* в околі точки 0,3, щоб $\Delta f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{1-z}}$, то використовуючи формулу (14), будемо мати

$$\Delta(z^*) \leq 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{0,7}} = 0,000299.$$

Звідси робимо висновок, що для знаходження кореня x_1 потрібно обчислити $\lg 2$ з трьома вірними значущими цифрами після коми, тобто $\lg 2 = 0,301$.

Аналогічно, розглядаючи функцію $y = 1 - \sqrt{1 - z}$ отримаємо, що для знаходження кореня x_2 з точністю $0,5 \cdot 10^{-4}$ потрібно обчислити $\lg 2$ з чотирма вірними значущими цифрами після коми, тобто $\lg 2 = 0,3010$.