

Лекция 4

«Волны в идеальной жидкости»

Содержание:

1. Гравитационные волны (жидкость неограниченной глубины).
2. Звуковые волны.

1. Гравитационные волны (жидкость неограниченной глубины)

- В современной физике волны – краеугольный камень в изучении линейных (а благодаря компьютерным технологиям и нелинейных) динамических процессов.
- Оптика, акустика, электродинамика (радиофизика) – полностью волновые разделы физики.
- Гидромеханика – волны (ударные и акустические) в атмосфере и гидросфере, волны на поверхностях и внутренних границах жидких сред (гравитационные волны, капиллярные волны, внутренние волны, волны в каналах и пр.).
- Сфера приложений: метеорология, волнозащита прибрежных сооружений, кораблестроение (волнообразование при движении кораблей), защита от акустического шума, гидролокация.

Гравитационные волны – волны на поверхности воды (рис. 1), для существования которых фундаментальную роль играет сила тяжести



Рис. 1

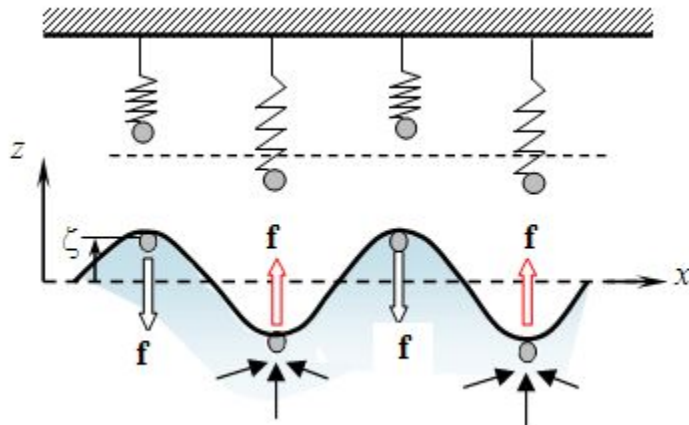


Рис. 2

(отсюда название; не путать с гравитационными волнами специальной теории относительности - предсказаны, обнаружены 2016 г.)

Возбуждаются: при ударе по поверхности жидкости, ветровом воздействии, движении кораблей.

Сила тяжести при вертикальных отклонениях поверхности жидкости – возвращающая сила. Частицы жидкости во впадинах выдавливаются вверх. Горбы и впадины аналогичны сжатым и растянутым пружинам осцилляторов.

Исходные допущения:

1. Жидкость неограниченно большой глубины $-\infty < z \leq 0$
2. Отклонения поверхности ζ настолько малы, что им сопутствуют малые скорости v , позволяющие пренебречь нелинейным членом в уравнении Эйлера и в силу условия $|v| \ll c$ (c – скорость звука) принять жидкость несжимаемой ($\rho = \text{const}$), а течение потенциальным ($v = \nabla \phi$).

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \text{grad}) v = -\frac{1}{\rho} \text{grad} P \quad \Rightarrow \quad \nabla \left(\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + P \right) = 0 \quad \nabla^2 \phi = 0$$

Основная трудность решения заключается в формулировке граничного условия, поскольку поверхность жидкости не остается фиксированной и испытывает отклонения.

Обратимся с этой целью к уравнению, которое должно выполняться во всей области $z \leq \zeta$, включая и саму границу.

$$\nabla \left(\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + P \right) = 0$$

от координат
не зависит

$$\nabla\left(\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + P\right) = 0 \implies \nabla\left(\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p + \rho_0 g z\right) = 0 \implies \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p + \rho_0 g z = \mathbf{P}(t)$$

Производимая волной разность давлений $\Delta P = \mathbf{P}(t) - p = \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho_0 g z$ в точках границы $z = \zeta$ должна отсутствовать независимо от вида возмущений (граница с вакуумом). Отсюда имеем граничное условие

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=\zeta} + g\zeta = 0$$

Решение уравнения Лапласа ищем в виде $\varphi = f(z) \exp[i(kx - \omega t)]$

Подстановка $\Rightarrow$ к ОДУ $\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0$ что дает $f(z) \propto \exp[\pm k(z - \zeta)]$

В области решения из-за возмущения границы волной $z - \zeta < 0$ и по требованию ограниченности выбираем положительный знак

В итоге имеем решение вида: $\varphi = \varphi_0 \exp[k(z - \zeta)] \exp[i(kx - \omega t)]$

Вывод дисперсионного соотношения

По условиям возбуждения величины φ_0, ω известны. Волновое число k еще подлежит определению.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_z \Big|_{z=\zeta} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} \Rightarrow \zeta = \frac{i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Big|_{z=\zeta}}{\omega}$$

Преобразованное граничное условие

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=\zeta} + g \zeta = 0 \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \Big|_{z=\zeta} + g \frac{i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Big|_{z=\zeta}}{\omega} = 0$$

Подстановка φ в ГУ: $-i\omega \varphi \exp[i(kx - \omega t)] + g \frac{i}{\omega} k \varphi \exp[i(kx - \omega t)] = 0$

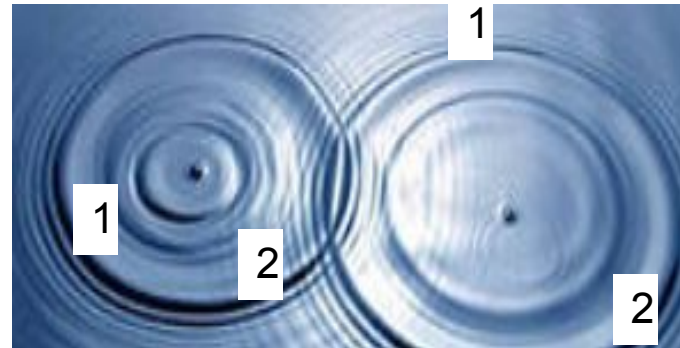
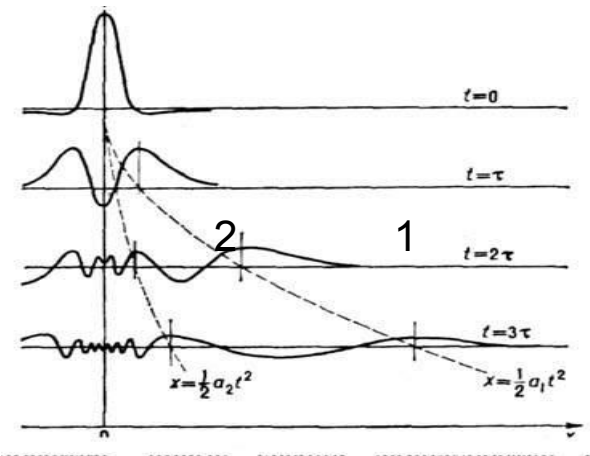
приводит к дисперсионному соотношению

$$k = \frac{\omega^2}{g}$$

Дисперсионное соотношение дает недостающее значение k и завершает построение решения

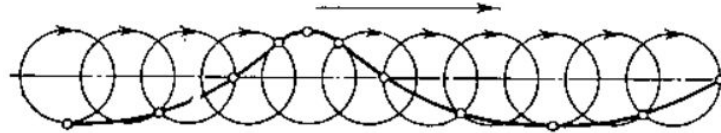
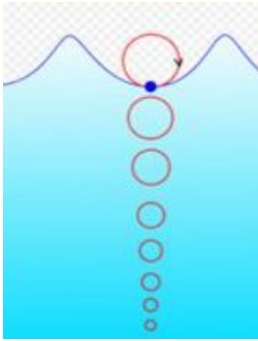
Особенности гравитационных волн на глубокой воде

1. Частотная дисперсия: $\omega = \omega(k)$ вида $\omega = \sqrt{kg}$ $v = \frac{\omega}{k} = g / \omega$
2. Искажение импульсов, цугов волн



Групповая скорость $U = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{v}{2}$

Траектории частиц



Компоненты вектора скорости

$$v_x = \frac{\partial}{\partial x} [\text{Re}(\varphi)] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi_0 e^{k(z-\zeta)} \cos(kx - \omega t) \right] = -\varphi_0 e^{k(z-\zeta)} k \sin(kx - \omega t)$$

$$v_z = \frac{\partial}{\partial z} [\text{Re}(\varphi)] = \frac{\partial}{\partial z} \left[\varphi_0 e^{k(z-\zeta)} \cos(kx - \omega t) \right] = \varphi_0 e^{k(z-\zeta)} k \cos(kx - \omega t)$$

В каждой точке (x, z) области жидкости вектор скорости $\mathbf{v}$ вращается равномерно, оставаясь неизменным по величине: $|\mathbf{v}| = \text{const}$

В лагранжевом представлении (x, z) – координаты выделенной частицы)

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\varphi_0 e^{k(z-\zeta)} k \sin(kx - \omega t) \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \varphi_0 e^{k(z-\zeta)} k \cos(kx - \omega t)$$

$$x(t) = \int v_x dt \Rightarrow x - x_0 = -\varphi_0 e^{k(z_0 - \zeta)} \frac{k}{\omega} \cos(kx_0 - \omega t)$$

$$z(t) = \int v_z dt \Rightarrow z - z_0 = -\varphi_0 e^{k(z_0 - \zeta)} \frac{k}{\omega} \sin(kx_0 - \omega t)$$

Уравнения движения частицы жидкости в параметрической форме. Показывают, что частицы жидкости в гравитационной волне описывают вокруг точек x_0, y_0 окружности с радиусами, экспоненциально уменьшающимися с удалением вглубь жидкости. При совершении еще и равномерного горизонтального перемещения со скоростью волны v образующаяся при $z_0 = \zeta \equiv 0$ кривая изображает поверхностный профиль волны.

2. Звуковые волны

Звуковые волны – малые возмущения сжатия. Принципиально важен учет сжимаемости среды. Уравнения гидродинамики

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0$$

рассматриваются обычно с учетом адиабатической связи $p = p(\rho)$

Адиабатическая связь $p(\rho)$ – следствие обычно быстрого протекания акустических процессов, когда теплопередача между участками среды практически отсутствует

Равновесное состояние и отклонения от равновесия

В отсутствие звуковой волны жидкость характеризуют равновесными значениями плотности ρ_0 и давления $p_0 = p(\rho_0)$

Под действием звуковой волны возникают отклонения

$$\rho' = \rho - \rho_0, \quad p' = p - p_0$$

Зависимость $p=p(\rho)$ разлагают в ряд по этим отклонениям

$$p = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \Big|_{\rho=\rho_0} (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_s \Big|_{\rho=\rho_0} (\rho - \rho_0)^2 + \dots$$

В линейном приближении по малым отклонениям

$$\rho' \ll \rho_0, \quad p' \ll p_0$$

имеет место связь $p' = c^2 \rho'$, $c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=\rho_0}$
 $\frac{\partial p}{\partial \rho} > 0$ всегда > 0

Линеаризация уравнений гидродинамики. Вывод волнового уравнения

$\mathbf{v}$ – скорость акустического смещения частиц жидкости – величина такого же порядка малости, как ρ' , p'

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &\approx - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \approx - \frac{1}{\rho_0} \nabla p' \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) &\approx 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \mathbf{v} \approx 0 \\ p' &= c^2 \rho' \\ \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} &= - \frac{1}{\rho_0} \nabla \left(\frac{\partial p'}{\partial t} \right) = - \frac{c^2}{\rho_0} \nabla \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = - \frac{c^2}{\rho_0} \nabla (-\rho_0 \nabla \mathbf{v})$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \mathbf{v}} \quad - \text{ волновое уравнение}$$

Так как
 $\mathbf{v} = \nabla \phi$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \phi}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cong -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' \quad \Rightarrow \quad \cancel{\frac{\partial \nabla \phi}{\partial t}} = -\frac{1}{\rho_0} \cancel{\nabla p'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p' = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 p'}$$

и благодаря связи $p' = c^2 \rho'$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \rho'}$$

Предпочтение отдается записи волнового уравнения для давления
(оно обычно измеряется в эксперименте)

Плоские звуковые волны

Опуская далее штрихи у звуковых давления и плотности, имеем

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

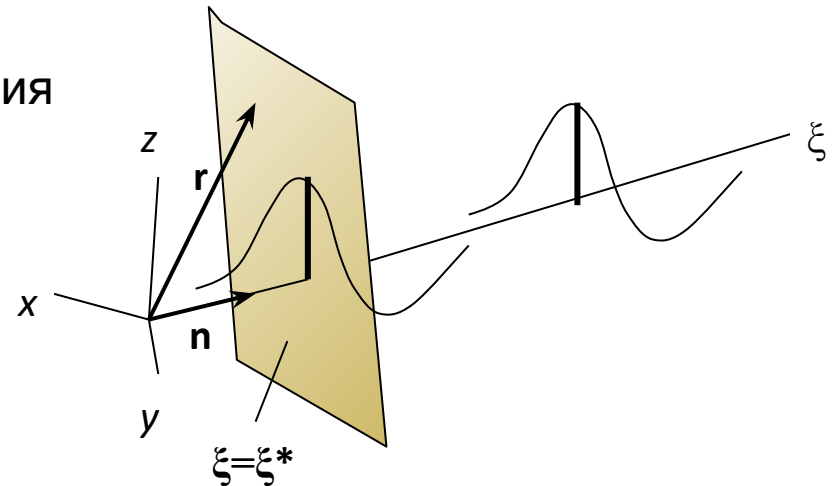
В плоской звуковой волне, распространяющейся в направлении вектора $\mathbf{n}$

$$p = PF(\xi - ct), \quad \xi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$$

ξ – координата, отсчитываемая по направлению распространения

c – скорость распространения волны (скорость звука)

F – функция, описывающая волновой профиль



Продольность звуковых волн

Обратимся к представлению волны потенциалом $\varphi = \Phi F(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct)$

Тогда скорость частиц в волне $\mathbf{v} = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{n} \Phi F'(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct)$

Отсюда: $\mathbf{v} \parallel \mathbf{n}$ - частицы движутся по направлению распространения волны, т.е. звуковые волны являются продольными.

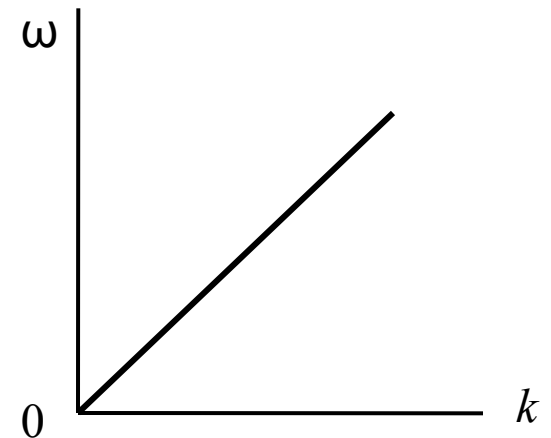
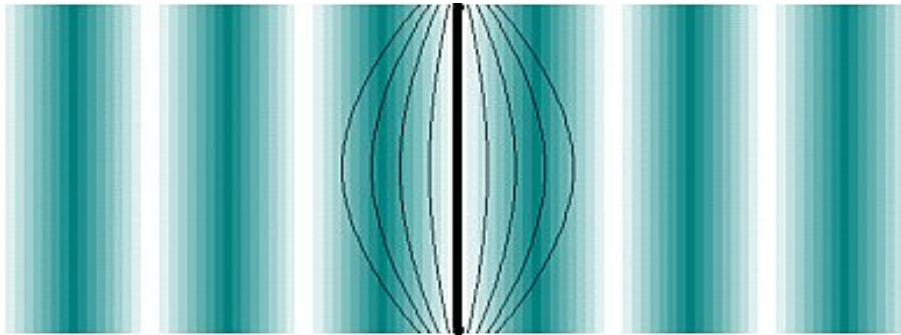
Плоские гармонические волны $F(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct) \begin{cases} \rightarrow \sin(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct) \\ \rightarrow \cos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct) \end{cases}$

$$p = P \cos[k(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct)] \Rightarrow p = P \cos[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$$

$\mathbf{k} = \mathbf{n}k$ - волновой вектор, $\omega = kc$ -

частота

$p = P \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ - экспоненциальная форма записи



Спектр звуковых волн в идеальной жидкости

Шаровые и цилиндрические звуковые волны

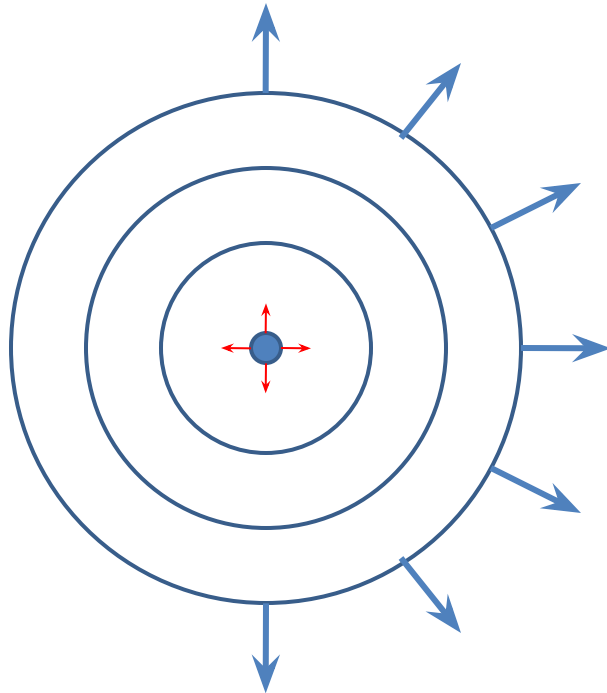
Решение волнового уравнения в сферических координатах в случае независимости поля от угловых координат

$$p = P \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$$



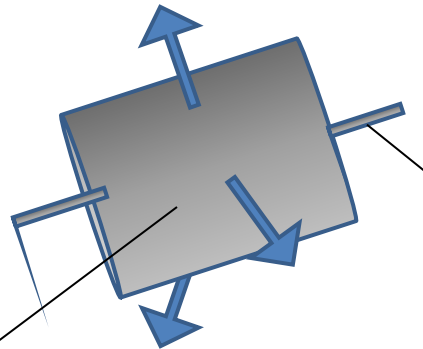
$$p = \frac{P}{r} \exp[i(kr - \omega t)]$$

Шаровая волна



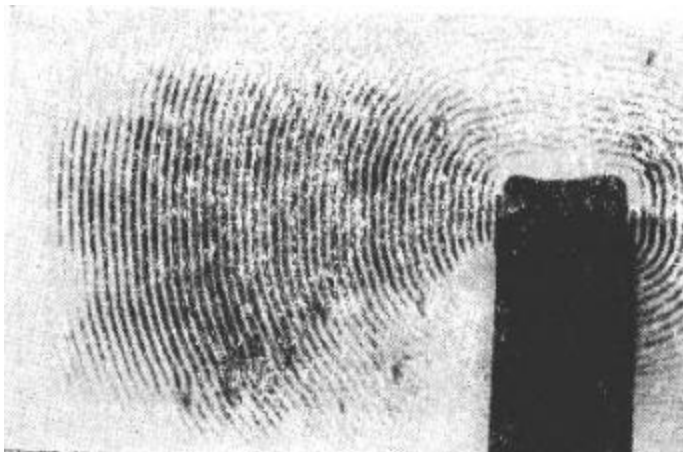
$$p = \frac{P}{\sqrt{r}} \exp[i(kr - \omega t)]$$

Цилиндрическая волна

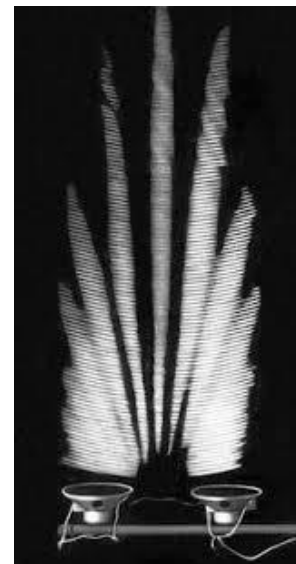


Линейный
пульсирующий
источник

Цилиндрический фронт
волны



Волновое поле колеблющегося кварца размером в 4λ



Интерференция полей излучателей



Отражение и преломление ультразвукового пучка на границе «керосин-вода»



Дифракция Френеля ультразвуковой волны на краю экрана и шаре