

Лекция 1
ПРЕДМЕТ И МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ.
ПОНЯТИЕ И СВОЙСТВА СТАТИСТИЧЕСКОЙ СОВОКУПНОСТИ
И ВЫБОРКИ

Литература

1. Снедекор Д. У. Статистические методы в применении к исследованиям в сельском хозяйстве и биологии. Пер. с англ. – М.: Сельхозгиз, 1961.
2. Поллард Дж. Справочник по вычислительным методам статистики / Пер. с англ. В.С. Занадворов. – М.: «Финансы и статистика», 1982.
3. Доспехов Б. А. Методика полевого опыта (с основами статистической обработки результатов исследований). – 5-е изд., доп. и перераб. – М.: Агропромиздат, 1985.
4. Лакин Г. Ф. Биометрия. – М.: Высшая школа, 1980.
5. Мойсейченко В.Ф. и др. Основы научных исследований в агрономии. – М.: Колос, 1996.
6. Пискунов А.С. Методы агрохимических исследований. – М.: КолосС, 2004.
7. Кирюшин Б.Д. и др. Основы научных исследований в агрономии. М.: КолосС, 2009.

Содержание лекции

1. Предмет и методы математической статистики
2. Генеральная и выборочная совокупность
3. Статистические параметры выборки

1. Предмет и методы математической статистики

Математическая статистика – раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и использования статистических данных для научных и практических выводов. Статистические методы применимы **к массовым случайным явлениям** различной природы, то есть к явлениям, исход которых в каждый настоящий момент нельзя точно предсказать.

Итак, предметом математической статистики являются **не единичные, а групповые объекты**, то есть **множества** объектов. Такие объекты внутри группы принято называть *единицами* наблюдений. Множество единиц наблюдений называют *статистической совокупностью*.

Понятие статистической совокупности — одно из **фундаментальных** понятий статистики. Статистическая совокупность – это не всякое множество элементов. Обязательным требованием к ней является качественная однородность ее состава. Нельзя объединять в одну совокупность особей разного пола и возраста. Недопустимо изучать модификационную изменчивость организмов на генетически неоднородном материале.

Вместе с тем однородность единиц не подразумевает их идентичности. Каждая из них в отдельности строго индивидуальна и отличается от других рядом признаков — высотой, массой, структурой и т. д. *Свойство единиц наблюдения отличаться друг от друга даже в однородных совокупностях называется изменчивостью, или варьированием.* Изменчивость — это свойство, присущее всем природным объектам: двух совершенно одинаковых предметов не существует, хотя различия между ними могут быть и незаметными для невооруженного глаза.

Другой источник варьирования – это внешняя среда, условия которой также никогда не повторяются для двух или более однородных объектов. Еще один источник – это погрешность измерения. Таким образом, если сравнивать между собой, например, два сорта растений, фактически мы имеем дело с четырьмя источниками варьирования: это, **во-первых**, генетические различия между сортами, **во-вторых**, различия между растениями внутри сорта, **в-третьих**, различия в условиях среды, которые складываются для обоих сортов и отдельных растений по-разному, **в четвертых**, случайные ошибки, вызванные с погрешность приборов и личными особенностями субъекта.

Необходимо понимать, что первый источник варьирования является закономерным и управляемым. Он в обычном случае и выступает как объект исследования. Напротив, второй, третий и четвертый источники являются случайными, их влияние крайне трудно, а иногда и невозможно учесть в ходе наблюдений. Обычно мы имеем дело не с самим влиянием этих источников, а только с его последствиями, которые и проявляются в случайном, или стохастическом варьировании того или иного признака (размеров, массы, структуры и др.).

Как правило, случайная составляющая варьирования накладывается на его закономерную составляющую и создает стохастический «шум», который затрудняет изучение объекта. Задача исследователя состоит в том, чтобы **отделить закономерные различия между объектами от случайного варьирования**. В этом и заключается одна из функций математической статистики. На это направлены ее методы, понятия и инструментарий, которые должны быть освоены в ходе данного курса.

2. Генеральная и выборочная совокупность

Как уже определено, *статистической совокупностью* называют любое множество однородных единиц наблюдений. При этом различают совокупности двух типов – генеральную и выборочную.

Генеральная совокупность – это полное собрание объектов, являющееся источником исследуемых данных. Генеральной совокупностью можно считать все запасы зерна, хранящиеся на элеваторе, все растения одного сорта какой-либо сельскохозяйственной культуры, выращиваемого в определенном хозяйстве, весь запас воды в мировом океане, всю популяцию одного вида вредителей на данном поле и т.д.

Целью любого исследования является изучение именно генеральной совокупности – познание ее свойств, оценка и моделирование ее поведения, сопоставление или сравнение двух и более генеральных совокупностей. Однако получение сведений обо всей генеральной совокупности в большинстве случаев затруднено, а чаще всего – просто невозможно. Причин тому несколько:

- большой объем наблюдений, связанный с неоправданно высокими затратами труда и ресурсов (физически невозможно изучить все растения на поле, а тем более – в хозяйстве);
- недоступность большинства объектов для их измерения (например, вредители способны мигрировать в пределах поля и «уходить» от учета);
- воображаемый характер некоторых совокупностей (мировой океан);
- наконец, тот факт, что в ходе изучения некоторые объекты приходится уничтожать (например, при изучении всхожести семян).

Эти причины приводят к тому, что из генеральной совокупности приходится делать выборку объектов и по этим выбранным объектам давать характеристику всему их множеству. Такое собрание выбранных объектов называется **выборочной совокупностью**. Из каждой совокупности можно сделать много разных выборок. Следовательно, генеральная совокупность всегда одна, тогда как выборочных совокупностей может быть бесконечно много.

Таким образом, реальные исследования массовых объектов или явлений всегда проводятся **выборочным методом**. Главная цель выборочного метода — по статистическим показателям малой выборки (средней пробе) возможно точнее охарактеризовать всю генеральную совокупность объектов.

В качестве примера рассмотрим результаты измерения двух сортов подсолнечника в полевом опыте (**слайд 6**). Предположим, что измерены все растения на двух делянках. При этом результаты измерений и расчета средней высоты могут трактоваться двояко. Их можно рассматривать как **характеристику генеральной совокупности**, если нас интересует высота растений, собранных на **двух конкретных делянках**. Но если наша задача – сравнить по высоте не просто растения, а именно два сорта, **наши ряды становятся выборками**. Тогда мы должны доказать, что разница в высоте растений на делянках действительно отражает различия в свойствах сортов, а не является результатом действия каких-то случайных факторов например, затенения некоторых растений. Такими доказательствами и занимается математическая статистика.

Пример

Высота растений (см) подсолнечника двух сортов, измеренная на двух делянках опыта.

№ растения	Сорт 1	Сорт 2
1	174	176
2	177	188
3	184	189
4	177	176
5	184	173
6	171	180
7	174	185
8	177	190
9	184	177
10	185	189
Средняя	178	183

3. Статистические параметры выборки

Трудность доказательств заключается в том, что проверить соответствие выборки генеральной совокупности напрямую обычно невозможно. **Исключение составляют разве что результаты политических выборов или перепись населения.**

Следовательно, выборка должна заведомо (априори) достаточно точно отражать генеральную совокупность, то есть быть репрезентативной. *Заклинание.* Репрезентативность выборки обеспечивается, во-первых, ее достаточным объемом, во-вторых, случайным характером. Таким образом, выборка отражает варьирование некоторой случайной величины, причем также, так генеральная совокупность. Поэтому, если выборка репрезентативна, то ее статистические параметры совпадают с параметрами генеральной совокупности.

В ходе развития математической статистики разработана целая система статистических параметров, или параметров варьирования случайной величины.

1. Средняя величина. Простейшим из параметров является средняя величина, или математическое ожидание. Это среднее арифметическое всех случайных величин выборки (1):

$$\bar{x} = \sum x / n \quad (1)$$

Кроме среднего арифметического, выделяют среднее квадратическое, среднее кубическое, среднее геометрическое.

2. Лимиты и размах вариации. Средние величины не являются универсальными характеристиками варьирующих объектов. При одинаковых средних признаки могут отличаться по величине и характеру варьирования. Поэтому наряду со средними для характеристики варьирующих признаков используют и показатели вариации. Простейшими из таких показателей являются лимиты. Под этим термином понимают значения минимальной $X_{\min}$ и максимальной $X_{\max}$ величин совокупности. Разность между максимальной и минимальной величинами совокупности называют размахом вариации R .

3. Среднее линейное отклонение. Лимиты и размах вариации — простые и наглядные характеристики варьирования, однако им присущи существенные недостатки: при повторных измерениях одного и того же группового объекта они могут значительно изменяться; кроме того, они не отражают существенные черты варьирования величины, так как учитывают лишь крайние ее значения. Чтобы учесть варьирование всех значений выборки, можно просуммировать отклонения этих значений от средней, то есть рассчитать среднее линейное отклонение (2):

$$\bar{d} = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n} \quad (2)$$

Поскольку простая сумма отклонений всегда равна нулю, при расчете берутся модули отклонений.

4. Дисперсия. Среднее линейное отклонение гораздо полнее отражает варьирование ряда наблюдений, чем лимиты и размах вариации, но оно оказалось непригодным для решения ряда важных статистических задач. Поэтому широкое распространение получил другой параметр — дисперсия. Дисперсия (от лат. dispersio — рассеяние) — это фундаментальное понятие статистики; она служит основной мерой вариации случайной величины. Она представляет собой сумму квадратов отклонений и рассчитывается по формуле (3):

$$S^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1} \quad (3)$$

В этом случае от знаков «-» избавляются путем возведения каждого отклонения в квадрат, а не с помощью его модуля. Число $(n - 1)$ в формуле (3) является **числом степеней свободы**. Это также одно из фундаментальных понятий статистики. Оно соответствует числу свободно варьирующих величин выборки и часто обозначается символом ν .

5. Стандартное отклонение. Размерность дисперсии равна квадрату размерности изучаемого признака, что зачастую неудобно и заставляет ввести для измерения рассеяния другую характеристику, имеющую размерность варьирующей величины и называемую *стандартным* или *средним квадратическим* отклонением. Его получают извлечением квадратного корня из дисперсии (4):

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}} \quad (4)$$

Иногда стандартное отклонение обозначают греческой буквой «сигма».

Если дисперсия или стандартное отклонение одной выборки больше, чем другой, значит, средняя величина первой выборки варьирует сильнее. Например, стандартное отклонение высоты растений пшеницы на одном поле составляет 32, а на другом – 21 см.

6. Коэффициент вариации. Дисперсия и стандартное отклонение применимы лишь для сравнительной оценки одноименных средних величин. В практике же довольно часто приходится сравнивать изменчивость признаков, выраженных разными единицами. В таких случаях используют не абсолютные, а относительные показатели вариации. Одним из них является *коэффициент вариации*. Этот показатель представляет собой стандартное отклонение, выраженное в процентах от средней арифметической (5):

$$V = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100 \quad (5)$$

Изменчивость принято считать незначительной, если коэффициент вариации не превышает 10 % средней, если V выше 10 %, но менее 20 %, и значительной, если коэффициент вариации более 20 %.

Коэффициент вариации, будучи отвлеченным числом, выраженным в процентах, дает возможность сравнивать варьирование признаков разной размерности, например высоты и массы, а также величин, уровень которых резко различен (например, урожай зерна и корнеплодов).

7. Ошибка выборочной средней, или ошибка выборки $S_{\bar{x}}$ является мерой отклонения выборочной средней $\bar{x}$ от средней всей (генеральной) совокупности μ . Ошибки выборки возникают вследствие неполной репрезентативности выборочной совокупности и всегда свойственны выборочному методу исследования. Они связаны с перенесением результатов, полученных при изучении выборки, на всю генеральную совокупность.

Ошибка выборочной средней прямо пропорциональна выборочному стандартному отклонению S (6):

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{S^2}{n}} \quad (6)$$

Ошибки выборки выражают в тех же единицах измерения, что и варьирующий признак, и приписывают к выборочным средним со знаками $\pm$, т. е. $\bar{x} \pm S_{\bar{x}}$. Ошибка средней тем меньше, чем меньше варьирует опытный материал и чем из большего числа измерений вычислено среднее арифметическое.

По формулам $\bar{x} - S_{\bar{x}}$ и $\bar{x} + S_{\bar{x}}$ вычисляют нижнюю и верхнюю границы доверительного интервала для средней. В границах этого интервала, согласно теории математической статистики, находится предполагаемая **средняя для генеральной совокупности**.

8. Относительная ошибка выборочной средней выражается в процентах от средней величины выборки (7):

$$S_{\bar{x}} \% = \frac{S_{\bar{x}}}{\bar{x}} \cdot 100 \quad (7)$$

Относительную ошибку средней иногда называют «точностью опыта», «точностью анализа» и часто необоснованно используют для оценки качества опытной работы и браковки полевых опытов. При этом считают, что если точность опыта выше 5 %, этот опыт следует браковать. Данный подход сегодня признается спорным.

Все изложенное можно обобщить, сформулировав несколько аксиом математической статистики:

1. Объекты научного исследования представлены множествами однородных единиц наблюдения, которые образуют статистические совокупности и варьируют в их пределах по количественным и качественным параметрам.

2. Объектом любого исследования является генеральная статистическая совокупность, которую исследователь вынужден оценивать по выборочной совокупности (выборке).

3. При выборке единиц наблюдения из генеральной совокупности возникает ошибка, пропорциональная степени варьирования количественных и качественных параметров объектов.

4. Если выборка репрезентативна, то ее ошибка может быть измерена через оценку параметров варьирования единиц наблюдения (случайной величины).

5. Параметры варьирования генеральной и выборочной совокупностей (статистические параметры) являются предметом математической статистики

Задание 1. Сравнить ряды по степени варьирования случайной величины, пользуясь материалами задания из файла *Практическая работа-1.xls*. Определить, доказаны ли различия между рядами по анализируемому признаку. Для этого рассчитать нижнюю и верхнюю границы доверительного интервала. Если доверительные интервалы пересекаются, считается, что оба ряда являются выборками из одной и той же генеральной совокупности, и следовательно, различия в средних мнимые, связанные с действием случайных факторов. В противном случае говорят о том, что между рядами имеются статистически доказанные (или существенные, или достоверные) различия.