

Тема 2. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭМВ В СВОБОДНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Лекция №4 (4). Электродинамические потенциалы ЭМП

1. Возбуждение ЭМП заданными источниками. Неоднородные уравнения Максвелла в комплексной форме.
2. Векторный и скалярный потенциалы для мгновенных значений поля.
3. Векторный и скалярный потенциалы для комплексных амплитуд. Уравнения Гельмгольца относительно векторных потенциалов.
4. Решение неоднородных уравнений Гельмгольца. Теорема запаздывающих потенциалов.

1 Волновые уравнения произвольной электромагнитной системы источников. Уравнения Гельмгольца

Физическая трактовка 1 и 2 уравнений Максвелла : изменение во времени электрического поля приводит к изменению магнитного поля и наоборот.

Волновой процесс – колебательное движение непрерывной среды.

Решение уравнений Максвелла – две волновые функции (волны): расходящаяся и сходящаяся волны.

Волнами переносится ЭМ энергия из объема, где действуют переменные сторонние токи, в окружающее этот объем пространство, где этих токов нет.

Процесс распространения в пространстве электромагнитных волн с конечной скоростью и утративших связь со своими источниками (переменными зарядами и токами), называется *излучением электромагнитных волн*.

Решение задачи об излучении заключается в определении в любой точке пространства структуры ЭМП, возбуждаемого сторонними токами.

С математической точки зрения задачи о возбуждении ЭМВ заданными источниками сводятся к решению системы неоднородных уравнений Максвелла:

Для произвольных сигналов

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}^{\text{э.ст.}}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \vec{j}^{\text{м.ст.}}$$

$$\varepsilon_a \operatorname{div} \vec{E} = \rho^{\text{э.ст.}}$$

$$\mu_a \operatorname{div} \vec{H} = \rho^{\text{м.ст.}}$$

Для гармонических сигналов

$$\operatorname{rot} \vec{H} - i\omega \varepsilon_a \vec{E} = \vec{j}^{\text{ст.э}}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + i\omega \mu_a \vec{H} = -\vec{j}^{\text{ст.м}}$$

$$\varepsilon_a \operatorname{div} \vec{E} = \rho^{\text{э.ст.}}$$

$$\mu_a \operatorname{div} \vec{H} = \rho^{\text{м.ст.}}$$

Для получения единственного решения системы должны быть дополнены 1) граничными условиями; 2) условиями излучения.

2 Векторный и скалярный потенциалы для мгновенных значений поля

Решение неоднородных уравнений является неточным, т.к. сторонние источники известны приближенно: данные берутся из опытов или предположений.

Выход из положения – введение *электродинамических потенциалов*: векторного $(\vec{A}^{\vartheta}, \vec{A}^M)$ и скалярного (u^{ϑ}, u^M) .

Для каждого типа источника выбирается один вид потенциалов.

Вводятся с помощью 4 уравнения Максвелла и закона непрерывного тока:

$$\mu_a \vec{H} = \text{rot } \vec{A}^{\vartheta} \quad \text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}^{\vartheta}}{\partial t} \right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{E} = -\text{grad } u^{\vartheta} - \frac{\partial \vec{A}^{\vartheta}}{\partial t}$$

Знак «минус» перед $\text{grad } u^{\vartheta}$ введен для совпадения в случае электростатического поля функция с обычным выражением для электростатического потенциала.

Подстановка выражений для потенциалов в 1 уравнение Максвелла и учет материальных уравнений позволяет записать:

$$(\mu_0 \mu)^{-1} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}^{\vartheta} = \vec{j}^{\vartheta cm} - \varepsilon_0 \varepsilon \left(\operatorname{grad} \frac{\partial u^{\vartheta}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{A}^{\vartheta}}{\partial t^2} \right) - \sigma \frac{\partial \vec{A}^{\vartheta}}{\partial t} - \sigma \operatorname{grad} u^{\vartheta}$$

Введение потенциалов было произвольным. Для устранения неоднозначности вводится условие калибровки. Классическое условие – *калибровка Лоренца*:

$$\operatorname{div} \vec{A}^{\vartheta} + \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial u^{\vartheta}}{\partial t} + \sigma u^{\vartheta} = 0$$

С учетом калибровки волновые уравнения принимают вид:

$$\nabla^2 \vec{A}^{\vartheta} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}^{\vartheta}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \vec{A}^{\vartheta}}{\partial t} = -\mu_0 \mu \vec{j}^{\vartheta cm} \qquad \nabla^2 u^{\vartheta} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 u^{\vartheta}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u^{\vartheta}}{\partial t} = -\frac{\rho^{\vartheta cm}}{\varepsilon_0 \varepsilon}$$

Достоинство: в правые части входят сторонние источники тока, а не их производные.

Введение электродинамических потенциалов электрического типа:

$$\vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \operatorname{rot} \vec{A}^M \quad \vec{H} = -\operatorname{grad} u^M - \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{A}^M}{\partial t} - \sigma \vec{A}^M$$

Условие калибровки: $\operatorname{div} \vec{A}^M + \mu_0 \mu \frac{\partial u^M}{\partial t} = 0$

Получаемые волновые уравнения:

$$\nabla^2 \vec{A}^M - \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{A}^M}{\partial t^2} - \sigma \mu_0 \mu \frac{\partial \vec{A}^M}{\partial t} = -\vec{j}^M \quad \nabla^2 u^M - \frac{\partial^2 u^M}{\partial t^2} - \sigma \frac{\partial u^M}{\partial t} = \frac{\rho^M}{\mu_0 \mu}$$

3 Векторный и скалярный потенциалы для комплексных амплитуд. Уравнения Гельмгольца относительно векторных потенциалов

Введение потенциалов для гармонических сигналов

Электрического типа

$$\begin{aligned}\vec{H}_m(\vec{r}) &= \frac{1}{\mu_0 \mu} \operatorname{rot} \vec{A}_m^{\text{э}}(\vec{r}) \\ \vec{E}_m(\vec{r}) &= -\operatorname{grad} u_m^{\text{э}}(\vec{r}) - i\omega \mu_0 \mu \vec{A}_m^{\text{э}}(\vec{r})\end{aligned}$$

Магнитного типа

$$\begin{aligned}\vec{E}_m(\vec{r}) &= \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \operatorname{rot} \vec{A}_m^{\text{м}}(\vec{r}) \\ \vec{H}_m(\vec{r}) &= -\operatorname{grad} u_m^{\text{м}}(\vec{r}) - \tilde{\varepsilon}_a \vec{A}_m^{\text{м}}(\vec{r})\end{aligned}$$

Волновые уравнения (неоднородные уравнения Гельмгольца):

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{A}_m^{\text{э}}(\vec{r}) + \gamma^2 \vec{A}_m^{\text{э}}(\vec{r}) &= -\vec{j}_m^{\text{э.ст}} \\ \nabla^2 u_m^{\text{э}}(\vec{r}) + \gamma^2 u_m^{\text{э}}(\vec{r}) &= -\frac{\rho_m^{\text{э.ст}}}{\varepsilon_0 \varepsilon}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{A}_m^{\text{м}}(\vec{r}) + \gamma^2 \vec{A}_m^{\text{м}}(\vec{r}) &= -\vec{j}_m^{\text{м.ст}} \\ \nabla^2 u_m^{\text{м}}(\vec{r}) + \gamma^2 u_m^{\text{м}}(\vec{r}) &= -\frac{\rho_m^{\text{м.ст}}}{\mu_0 \mu}\end{aligned}$$

$\gamma = ik = \omega \sqrt{\tilde{\varepsilon}_a \tilde{\mu}_a} = k_\alpha - ik_\beta$ - коэффициент распространения;
 k_α - коэффициент затухания;
 k_β - коэффициент фазы.

Уравнения связи:

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= -i\omega\mu_a \vec{A}^\vartheta + \frac{1}{i\omega\tilde{\varepsilon}_a} \text{grad div } \vec{A}^\vartheta - \text{rot } \vec{A}^M \\
 \vec{H} &= \text{rot } \vec{A}^\vartheta - i\omega\tilde{\varepsilon}_a \vec{A}^M + \frac{1}{i\omega\mu_a} \text{grad div } \vec{A}^M
 \end{aligned}$$

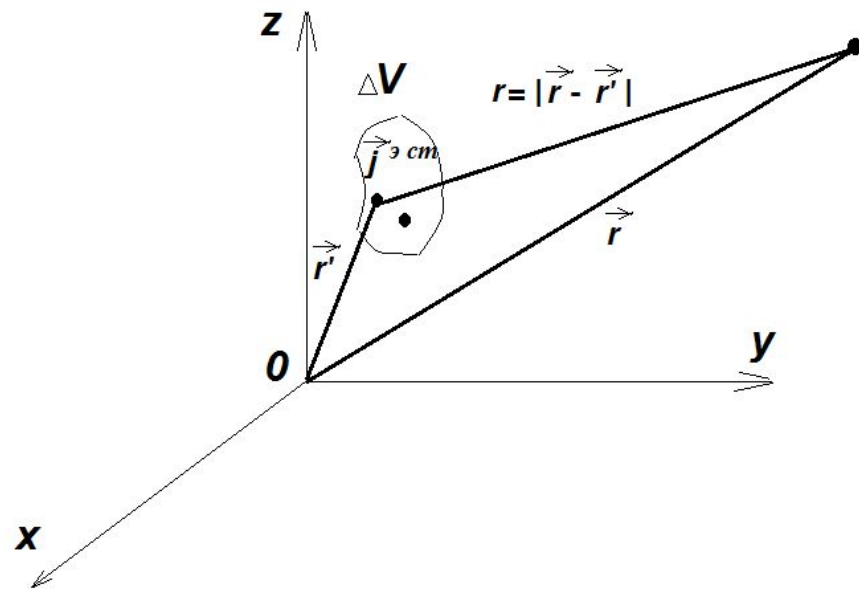
$\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_0 \varepsilon - i\sigma^\vartheta / \omega$ - комплексная диэлектрическая проницаемость
 (для реальных сред с потерями)

Достоинство: 1) в правые части входят сторонние источники тока, а не их производные;

2) число неизвестных сокращается с 6 до 4.

4 Решение неоднородных уравнений Гельмгольца. Теорема запаздывающих потенциалов

Решение рассмотрим на примере источников электрического типа – потенциалы электрические.



Допущения: 1) среда изотропная;
2) волновое число
определяется выражением

$$\tilde{k} = k_\beta - ik_\alpha$$

Вид волновых уравнений:

$$\nabla^2 \vec{A}_m^{\text{э}}(\vec{r}) - \tilde{k}^2 \vec{A}_m^{\text{э}}(\vec{r}) = -\vec{J}^{\text{э cm}}$$

$$\nabla^2 u_m^{\text{э}}(\vec{r}) - \tilde{k}^2 u_m^{\text{э}}(\vec{r}) = -\frac{\rho^{\text{э.ст}}}{\epsilon_0 \epsilon}$$

Рисунок 1 – Геометрия задачи

Последовательность решения:

1. Предположим, что
 - сторонний электрический ток занимает весьма малую область $\Delta V \rightarrow 0$ вблизи начала координат;
 - остальное пространство удовлетворяет однородным волновым уравнениям;
 - решение симметрично в сферической системе координат (не зависит от углов θ, ϕ).
2. С учетом предположений решение имеет вид: $u_m^{\text{э}}(\vec{r}) = \frac{B}{r} \exp(-i\tilde{k}r)$
3. Нахождение коэффициента B , описывающего интенсивность источника. 1) Понижаем частоту излучения ($\tilde{k} = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a} \rightarrow 0$). В пределе получаем поле электростатического заряда:

$$B = \frac{\rho_m^{\text{э.ст}} \Delta V}{4\pi\varepsilon_a}$$

- 2) Возвращаемся к произвольной частоте и произвольному объему:

$$u_m^{\text{э}}(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho_m^{\text{э.ст}} \exp(-i\tilde{k}r)}{4\pi\varepsilon_a r} dv$$

Последовательность решения:

4. Представляем векторное уравнение тремя скалярными проекциями и используем замены типа:

$$\frac{\rho_m^{\text{э.ст}}}{\tilde{\epsilon}_a} \rightarrow \tilde{\mu}_a \vec{J}_{m,x,y,z}^{\text{э.ст}} \quad u_m^{\text{э}} \rightarrow A_{m,x,y,z}^{\text{э}}$$

5. Решение после преобразований принимает вид **интеграла Кирхгофа для запаздывающих потенциалов**:

$$\vec{A}_m^{\text{э}}(\vec{r}) = \frac{\tilde{\mu}_a}{4\pi} \int_V \vec{j}_m^{\text{э.ст}}(\vec{r}') \frac{\exp(-i\tilde{k}r)}{r} dv$$

Векторный **потенциал** называется **запаздывающим**.

Экспоненциальный множитель соответствует конечной скорости распространения волны до источника со скоростью $v = \omega / \beta$.

Время запаздывания воздействия

$$t_3 = \frac{r}{v} = \frac{k_\beta r}{\omega}$$

Теорема запаздывающих потенциалов:

Векторный потенциал в точке с радиус-вектором $\vec{r}$ в момент времени t является функцией токов в точке расположения источников, существовавших в более ранний момент времени.

Токи и заряды меняются по гармоническому закону. В связи с этим экспоненциальный множитель в среде без потерь имеет вид:

$$\exp[i\omega(t - r/v)] = \exp(i\omega t) \exp(-i\omega r/v) = \exp(i\omega t) \exp(-ik_\beta r)$$

Вывод: применительно к гармоническим процессам запаздывание

на время $t_3 = \frac{r}{v} = \frac{k_\beta r}{\omega}$ учитывается множителем $\exp(-ik_\beta r)$ и

означает сдвиг по фазе на величину $\omega r/v$.