Теория вероятностей

1. Основные понятия и определения.

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности в случайных явлениях.

Под **случайным явлением** понимают явление, исход которого предсказать невозможно. Примеры случайных явлений: выпадение герба при подбрасывании монеты; выигрыш по купленному лотерейному билету.

Предметом теории вероятностей является математические модели случайных явлений.

Цель теории вероятностей – осуществление прогноза в области случайных явлений, влияние на ход этих явлений.

В настоящее время нет практически ни одной области науки, в которой бы не применялись вероятностные методы.

Случайным событием (или просто событием) называется любой исход опыта, который может произойти или не произойти. Обозначение событий: A, B, C, …

Пример 1: бросание шестигранного кубика (1 очко, 2, 3, 4, 5, 6).

Пример 2 опыт: бросание игральной кости.
Событие A – выпадение 5 очков,
B – выпадение чётного числа очков,
C – выпадение 7 очков,
D – выпадение целого числа очков,
E – выпадение не менее трёх

Определение 1: непосредственные исходы опыта называются **элементарными событиями** и обозначаются W

Определение 2: множество всех элементарных событий называется пространством элементарных событий, обозначается через Ω (омега).

В примере 1 : шесть элементарных событий:

$W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6$.

Событие W_i означает, что в результате бросания кости выпало $i = 1,2,3,4,5,6$

- Пространство элементарных событий: Ω=$\{W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6\}$ или

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Определение 3: событие называется **достоверным**, если оно обязательно наступит в результате данного опыта, обозначается Ω .

Событие называется **невозможным**, если оно заведомо не произойдёт в результате произведения данного опыта, обозначается ϕ .

<u>В примере </u>2: события A и B – случайные события, C – невозможное, событие D – достоверное.

Определение 4: два события называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление другого события в одном и том же опыте.

В противном случае, события называются **совместными**.

В примере 2: события А и В – несовместные, А и Е – совместные.

Определение 5: события $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются **попарно-несовместными**, если любые два из них несовместны.

- Несколько событий образуют **полную группу**, если они попарно несовместны в результате каждого опыта происходит одно и только одно из них.

В примере 1: события $W_1 - W_6$ образуют полную группу, $W_1 - W_5$ - нет.

Определение 6: несколько событий в данном опыте называются **равновозможными**, если ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие, т.е. все события имеют равные «шансы».

• В примере 1:элементарные события $W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6$ равновозможны. Выпадение герба (A) или решки (B) при бросании монеты – равновозможные события.

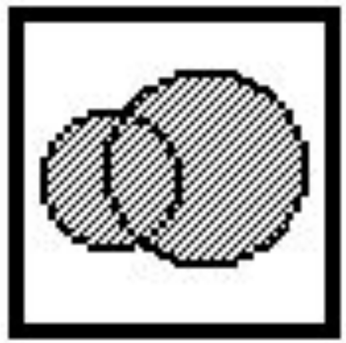
2. Действия над событиями

(алгебра событий)

Введём основные операции над событиями; они полностью соответствуют операциям над множествами.

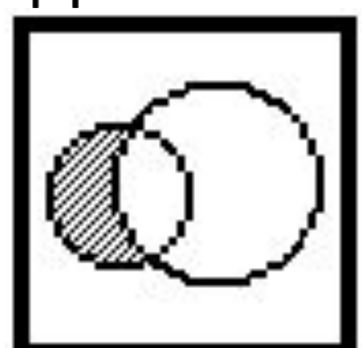
1) **Суммой событий** А и В называется событие C$= A + B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из них (т.е. или А или В, или А и В вместе).

$$A + B = A \cup B$$

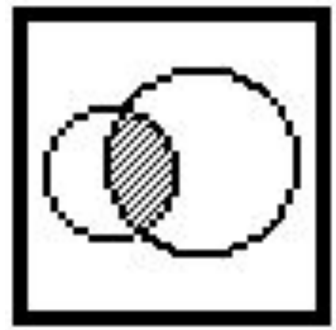


2) **Разностью событий** А и В называется событие C$= A - B$, происходящее тогда и только тогда, когда происходит событие А, но не происходит событие В.

$$A - B$$

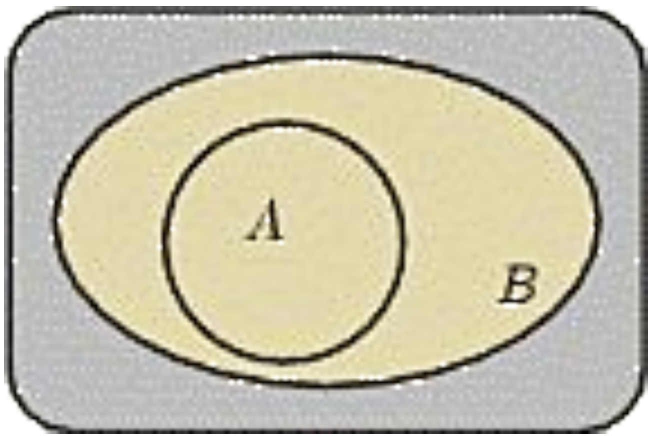


3) Произведением событий А и В называется событие $\mathrm{C}= \mathrm{A} \times \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ состоящее в совместном наступлении этих событий (т.е. А и В одновременно). $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$



4) Противоположным событию А называется событие $\overline{\mathrm{A}}$, которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие А (т.е. $\overline{\mathrm{A}}$ означает, что А не наступило).

5) Событие А влечёт событие В (или А является частным случаем В), если из того, что происходит событие А, следует, что происходит событие В; $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$.



6) Если $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ и $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$, то события А и В называются равными: $\mathrm{A} = \mathrm{B}$

- В примере 2: $\mathrm{B} = \{2,4,6\}$, $\mathrm{E} = \{3,4,5,6\}$, $\mathrm{A} = \{5\}$, $D = \{1,2,3,4,5,6\}$,

Тогда $\mathrm{B} + \mathrm{E} = \{2,3,4,5,6\}$

$\mathrm{B} \times \mathrm{E} = \{4,6\}$

$\mathrm{B} - \mathrm{E} = \{2\}$, $\overline{\mathrm{A}} = \{1,2,3,4,6\}$

$\mathrm{B} \subseteq D$, $D = \Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

3. Классическое определение вероятности.

Пример 3: в урне 7 одинаковых, тщательно перемешанных шаров: 2 красных, 3 жёлтых, 2 белых. Найти вероятность того, что наудачу будет вынут цветной шар.

Возможность вынуть на удачу из урны цветной шар больше, чем возможность извлечь белый. Эту возможность можно охарактеризовать числом.

Вероятность есть число, характеризующее степень возможности появления события.

Пусть событие А – появление цветного шара. Каждый из возможных результатов испытания (извлечение шара из урны) назовём элементарным событием. Обозначим их $W_1, W_2, W_3, \dots, W_7$. Эти исходы образуют полную группу (обязательно появится один шар) и все они равновозможны.

Элементарные события, при которых данное событие наступает, называется **благоприятствующим** этому событию.

Событию А благоприятствуют 5 элементарных исходов W_1, W_2, W_3, W_4, W_5.

Определение: вероятностью события называется отношение числа элементарных исходов, благоприятствующих данному событию, к числу всех равновозможных случаев, образующих полную группу: $\mathrm{P(A)} = \frac{m}{n}$

Это определение вероятности называется классическим.

<u>В примере 3</u>: $\mathrm{P(A)} = \frac{5}{7}$.

- Из классического определения вероятности следуют свойства:

1) Вероятность любого события

$$0 \ll \mathrm{P(A)} \ll 1$$

2) Вероятность невозможного события нулю, т.е.

$$\mathrm{P}(\phi) = 0$$

3) Вероятность достоверного события равна единице, т.е.

$$\mathrm{P}(\Omega) = 1$$

4) Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей, этих событий, т.е. если $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \phi$, то $\mathrm{P}(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B})$.

Пример 4: в урне находятся 12 белых и 8 чёрных шаров. Какова вероятность того, что наудачу вынутый шар будет белым?

Решение: пусть А – событие, состоящее в том, что вынут белый шар.

$n = 12 + 8 = 20$- число всех равновозможных случаев (исходов опыта). Число случаев, благоприятствующих

$\mathrm{C}(\mathrm{A}) = 12$, т.е. $m = 12$ $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{12}{20} = 0{,}6$.

Недостатки классического определения:

Классическое определение вероятности предполагает, что число всех элементарных исходов конечно. На практике часто встречаются опыты, для которых множество таких исходов бесконечно.

Классическое определение вероятности предполагает, что все элементарные исходы равновозможны. На практике во многих случаях трудно указать основание, позволяющее считать, что все элементарные исходы равновозможны.

4. Статическое определение вероятности

Относительной частотой события называется отношение числа опытов, в которых это событие, к числу всех произведённых опытов.

$$W(A) = \frac{m}{n}$$

W обладает свойством статистической устойчивости: в различных сериях многочисленных испытаний она принимает значения, достаточно близкие к некоторой постоянной.

Эту постоянную называют вероятностью данного события.

Число появлений герба

4040	2048	0,5069
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

- Статистической вероятностью события А называется число около которого колеблется относительная частота события А при достаточно большом числе испытаний (опытов).

$\mathrm{P(A)} \approx W(A)$, т.е. в качестве статистической вероятности события принимают относительную частоту или число, близкое к ней.

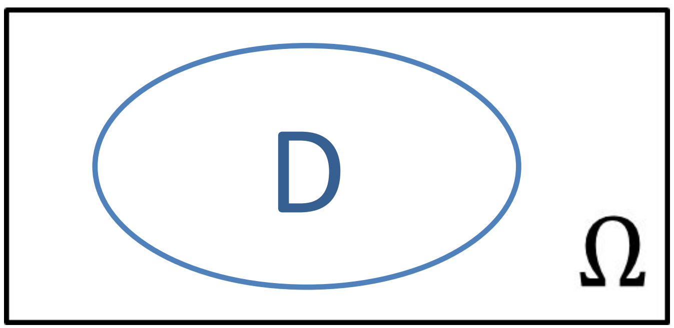
Недостатки статистического определения является неоднозначность статистической вероятности.

Например, в примере с бросанием монеты в качестве вероятности можно принять не только число 0,5, но и 0,49, или 0,51 и т.д.

Для надёжного определения вероятности нужно проделать большое число испытаний, что не всегда просто и дёшево.

Геометрическое определение вероятности

- Рассмотрим на плоскости некоторую область Ω имеющую площадь S_Ω, и внутри области Ω область D с площадью S_D.



В области Ω случайно выбирается точка X. Этот выбор можно интерпретировать <u>бросание точки X в область Ω</u>.

- При этом попадание точки в область Ω – достоверное событие, в D – случайное.

Предполагается, что все точки области Ω равномерные (все элементарные события равновозможны), т.е. что брошенная точка может попасть в любую точку области Ω и вероятность попасть в область D пропорциональна площади этой области и не зависит от её расположения и формы.

Событие $\mathrm{A} = \{\mathrm{X} \in D\}$, т.е. брошенная точка попадёт в область D.

- Определение: геометрической вероятностью события А называется отношение площади области D к площади области Ω, т.е.

$$\mathrm{P(A)} = \frac{S_D}{S_\Omega} \qquad (1)$$

Геометрическое определение вероятности события и в случае , когда области Ω и D обе линейные или объёмные.

• В этих случаях формулы имеют вид:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{l_D}{l_\Omega} \quad (2)$$

$$\mathrm{P}(A) = \frac{V_D}{V_\Omega} \quad (3)$$

Где ι – длина, а V – объём соответствующей области.

Все три формулы в общем виде можно записать:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{m\ell\mathcal{S}D}{m\ell\mathcal{S}\Omega} \qquad (4)$$

Где $m\ell\mathcal{S}$ – это мера области $\mathcal{S}$, ℓ или V.

Геометрическая вероятность обладает всеми свойствами, присущими классическому и дугим определениям.