Теория вероятности и математическая статистика

Лектор -

Гусева Валентина Борисовна

доц. кафедры информатики

и математики

к.307.

Список литературы

1. Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман. Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики: учебно-справочное пособие для бакалавров. М.: Юрайт, 2012.
2. Н.Ш. Кремер.Теория вероятности и математическая статистика.
3. В.Е. Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика.

Электронные материалы
Y:_Teachers\Guseva\ТВиМС

1. Введение. Основные определения.

1.1 Случайная величина. Закон распределения случайной величины.

В данном курсе мы учимся работать с новым типом математических величин – *случайными величинами*.

Случайная величина – это математическая величина, принимающая одно из своих возможных значений случайным образом.

Для обозначения случайных величин используют большие латинские буквы.

Пример: X – случайная величина, равная оценке студента на экзамене по статистике, или *оценка*.

Закон распределения случайной величины содержит информацию о том, какие значения величина может принимать и насколько эти значения вероятны.

Если значения представлены отдельными числами (случайная величина является *дискретной*) закон распределения задается в виде таблицы.

X

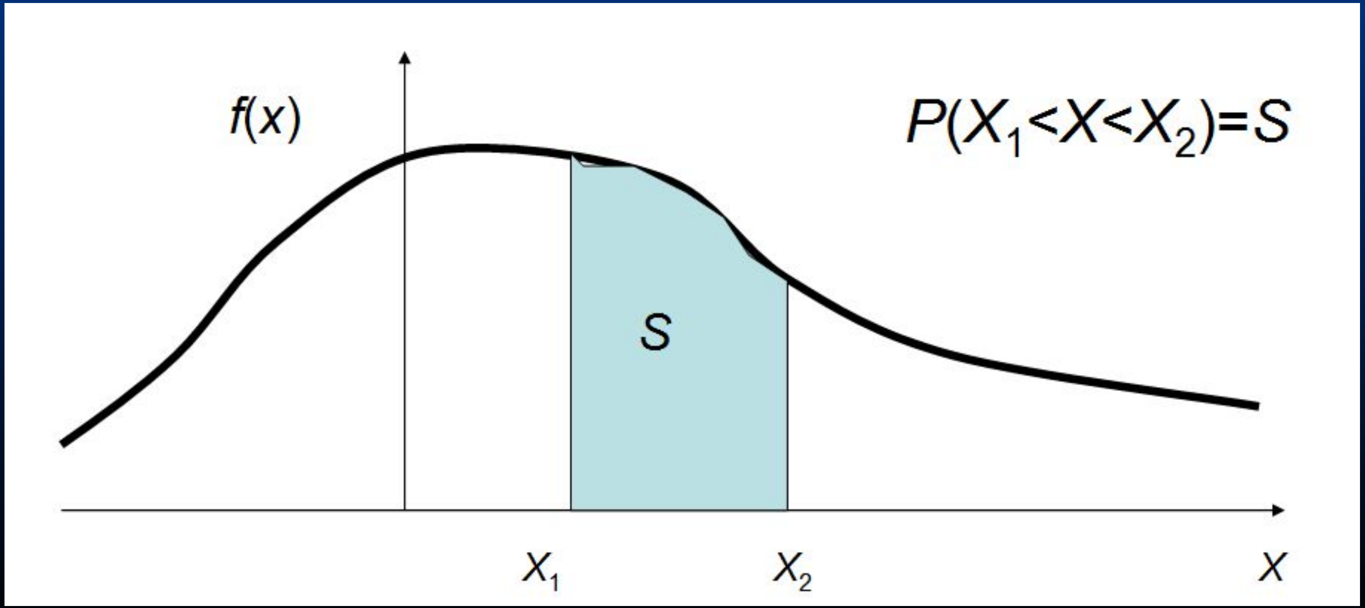
x_i	2	3	4	5
p_i	p_1	p_2	p_3	p_4

В верхней строке таблицы указывают возможные значения величины, в нижней строке - *вероятности* реализации этих значений.

Когда случайная величина принимает одно из возможных значений, этот факт можно рассматривать как наступление указанного ***события***, обладающего определенной ***вероятностью***.

Под ***вероятностью*** события понимают количественную меру возможности наступления этого события.

Если случайная величина может принимать непрерывный ряд значений (случайная величина является *непрерывной*) закон распределения задается с помощью функции $f(x)$, зависящей от принятого значения x. Чаще всего, для описания поведения такой величины используется функция, которая называется плотностью вероятности.



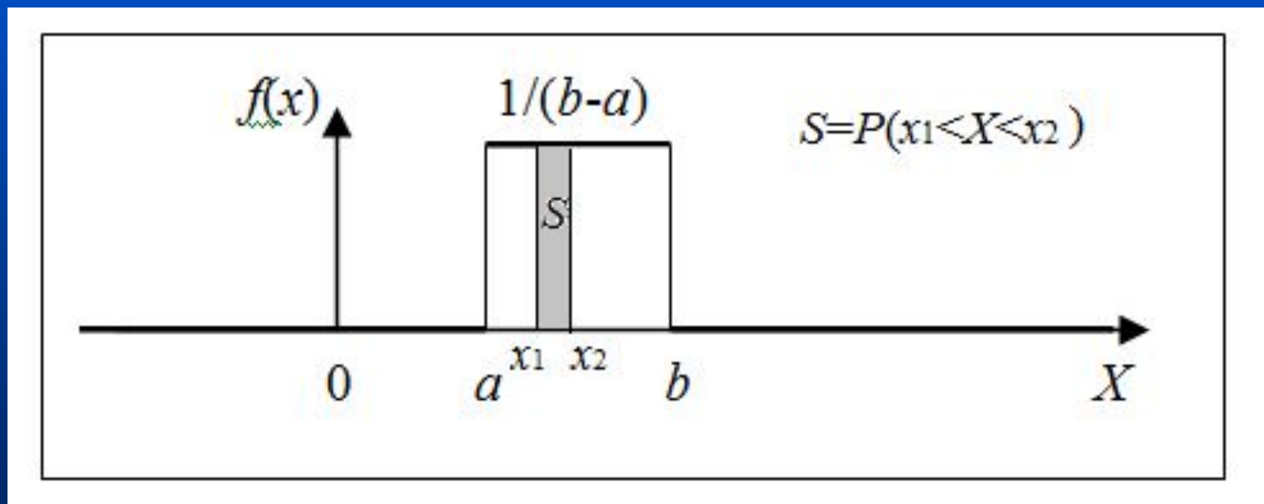
Вероятность того, что непрерывно распределенная случайная величина примет конкретное значение, всегда равна 0.

$P(X=x_0)=0$. Для обозначения вероятности события используют букву P, в скобках принято указывать событие, которому соответствует приведенная вероятность.

Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, лежащее в заданном интервале, равна определенному интегралу от плотности вероятности на заданном интервале.

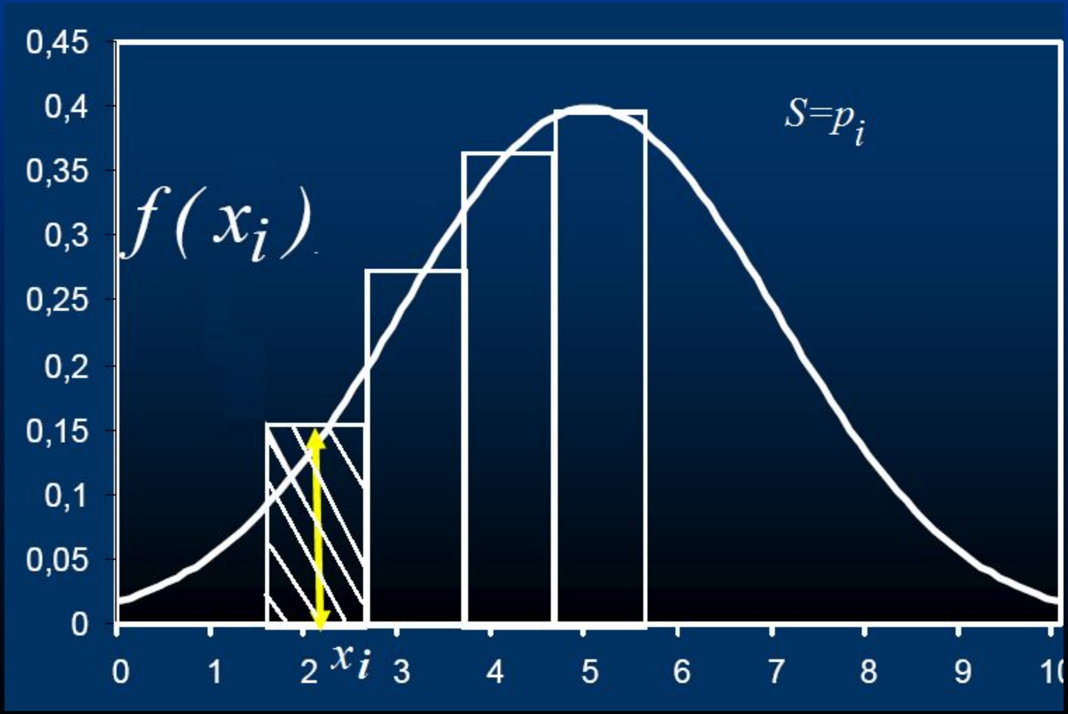
$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ 1/(b-a), & a<x\le b\\ 0, & x>b\end{cases}$$



Пример: Равномерное распределение случайной величины X , принимающей значения в интервале от a до b . Площадь закрашенной фигуры - вероятность того, что значение случайной величины лежит в интервале от x_1 до x_2.

Чтобы перейти от *непрерывного* к *дискретному* распределению, достаточно разбить всю область изменения X на смежные интервалы и рассчитать вероятности для этих интервалов, взяв их в качестве p_i. В качестве значений x_i можно взять середины интервалов.



Совместное распределение случайных величин

Связь между случайными величинами можно описать, задав закон их совместного распределения.

Для дискретных величин X и Y такой закон задается в виде таблицы вероятностей,

(X, Y)

	x_1	x_2	…	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	…	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	…	…
…	…	…	…	…
y_m	p_{1m}	p_{2m}	…	p_{nm}

для непрерывных – в виде плотности вероятности совместного распределения $f(x, y)$.

Связь между случайными величинами не обязательно должна быть *функциональной*. Она может иметь статистический (стохастический) характер.

$X \backslash Y$	6	8	10
3	p_{11}		
4		p_{22}	
5	p_{31}	p_{32}	

$X \backslash Y$	6	8	10
3	p_{11}	p_{12}	p_{13}
4	p_{21}	p_{22}	p_{23}
5	p_{31}	p_{32}	p_{33}

$X \backslash Y$	6	8	10
3	p_{11}		
4		p_{22}	
5		p_{32}	

Функция случайной величины

Если каждому значению x случайной величины X поставить в соответствие значение $z=\phi(x)$, мы построим новую случайную величину Z, которая является ***функцией*** исходной ***случайной величины*** X и обозначается $Z=\phi(X)$.

X

x_i	2	3	4	5
p_i	p_1	p_2	p_3	p_4

$Z=2X$

z_i	4	6	8	10
p_i	p_1	p_2	p_3	p_4

Вероятности , соответствующие значениям z и x, *могут не совпадать*, так как разным значениям x может соответствовать одно и то же значение z.

X

x_i	-1	0	1
p_i	p_1	p_2	p_3

$Z=X^2$

z_i	0	1
p_i	p_2	p_1+p_3

Случайная величина Z может являться *функцией нескольких случайных величин,* если ее значения вычисляются как функция возможных значений исходных величин.

$Z = \phi(X, Y)$, если каждой возможной паре значений x и у ставится в соответствие значение $z=\phi(x, y)$.

X			
	x_k	x_1	x_2
	p_k	p_1	p_2

Y			
	y_i	y_1	y_2
	p_i	g_1	g_2

$Z = X+Y$

z_i	x_1+y_1	x_2+y_1	x_1+y_2	x_2+y_2
p_i	p_{11}	p_{21}	p_{12}	p_{22}

При построении функции нескольких случайных величин в качестве значений итоговой величины в закон распределения включаются все возможные значения функции, полученные из комбинации исходных случайных величин. Информация о вероятности этих значений берется из закона совместного распределения.

Задача: Задав произвольно значения вероятностей p_{ij}, найдите закон распределения для случайной величины $Z=X+Y$, $Z=XY$, используя таблицы слайда 15

Для работы со случайными величинами удобно использовать ряд параметров, которые позволяют извлечь из законов распределения наиболее важную информацию. Это *математическое ожидание*, *дисперсия* и *коэффициент корреляции*.

1.2. Характеристики случайных величин

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины.

Математическое ожидание $M(X)$ характеризует некий средний уровень значений случайной величины X.

Дисперсия $D(X)$ и *среднеквадратичное отклонение* $\sigma(X)$ (корень квадратный из дисперсии) – степень разброса отдельных значений величины X относительно этого уровня.

Пусть X- дискретная случайная величина, имеющая закон распределения $\{x_i, p_i\}$. Математическим ожиданием случайной величины X называется число $M(X)$ определяемое выражением

$$M(X)=\sum_i p_i \cdot x_i$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины называется интеграл

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\cdot dx$$

Задача.

Вероятность выиграть в лотерею 100 рублей (единственный приз) равна 0.001, вероятность ничего не выиграть равна 0.999. Найдите математическое ожидание выигрыша, если билет стоит 1 рубль.

Дисперсия

случайной величины равна математическому ожиданию квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания

$$D(X)=M([X-M(X)]^2)$$

Дисперсия дискретной случайной величины с заданным законом распределения

X	x_i	x_1	x_2	...	x_m
	p_i	p_1	p_2	...	p_m

Рассчитывается по формуле $D(X)=\sum_i (x_i - M(X))^2 \cdot p_i$

Дисперсия непрерывной случайной величины

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^2 \cdot f(x) \cdot dx$$

Пример

Акционерному обществу предлагается два рисковых проекта:

	Проект 1			Проект 2		
Вероятности событий p_i	0,2	0,6	0,2	0,4	0,2	0,4
Прибыль при реализации события, млн. руб. x_i	40	50	60	0	50	100

Какой проект должны выбрать акционеры и почему?

Решение

Для оценки эффективности рассматриваемых инвестиционных проектов вычислим ожидаемую прибыль и величину риска получения прибыли.

Ожидаемая прибыль для первого и второго проектов :

$$M(x_1) = 40 \cdot 0{,}2 + 50 \cdot 0{,}6 + 60 \cdot 0{,}2 = 50 \text{ млн руб.}$$

$$M(x_2) = 0 \cdot 0{,}4 + 50 \cdot 0{,}2 + 100 \cdot 0{,}4 = 50 \text{ млн руб.}$$

Таким образом, математические ожидания прибыли для обоих проектов оказались равными.

Найдем теперь риск получения средней прибыли, вычислив среднеквадратические отклонения прибыли для обоих проектов. Учитывая, что дисперсия вычисляется по формуле

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathrm{M(x)})^2 \cdot p_i$$

находим $\sigma_1^2 = 40, \quad \sigma_2^2 = 2000.$

Таким образом, среднеквадратическое отклонение для первого проекта $\sigma_1 = 6{,}32$ млн руб., а для второго – $\sigma_2 = 44{,}72$ млн руб.

Важной характеристикой степени связи между случайными величинами являются *ковариация* и *коэффициент корреляции*.

Ковариацией случайных величин X и Y называют математическое ожидание произведения центрированных случайных величин

$$Cov(X, Y)=M(\dot{X}\cdot\dot{Y})=M([X-M(X)]\cdot[Y-M(Y)])$$

$$Cov(X, Y)=M(X\cdot Y)-M(X)\cdot M(Y)$$

Для дискретных случайных величин X и Y

$$Cov(X,Y)=\sum_{ij}(x_i-M(X))(y_j-M(Y))p_{ij}$$

Коэффициент корреляции представляет собой ковариацию нормированных случайных величин.

$$\rho(X, Y) = Cov(\hat{X}, \hat{Y}) = Cov(X, Y)/\sigma(X)/\sigma(Y).$$

Здесь

$$\hat{X} = X/\sigma(X) \text{ и } \hat{Y} = Y/\sigma(Y)$$

- нормированные случайные величины. Коэффициент корреляции может принимать значения в диапазоне от -1 до 1. Если он равен 0, это может означать, что связь между величинами отсутствует, если он равен по модулю 1, то связь между величинами *X* и *Y* является функциональной.

1.3. Связь между теорией вероятности и статистикой

Собирая статистические данные, мы получаем информацию о случайных величинах (и их законах распределения) опытным путем. Полученные таким образом *статистические законы распределения* (*ряды распределения*) также принято представлять в виде таблиц. В этих таблицах приводятся наблюдаемые значения случайной величины (в виде дискретных чисел или в виде интервалов, в зависимости от вида величины) и доля (процент) случаев, в которых наблюдалось данное значение.

Случайные величины в статистике называют *признаками*, поскольку они характеризуют изучаемые свойства (признаки) объектов статистической совокупности.

a_{i-1}	a_i	x_i	w_i
a_0	a_1	x_1	w_1
a_1	a_2	x_2	w_2
a_2	a_3	x_3	w_3
a_3	a_4	x_4	w_4
…	…	…	…
a_{k-1}	a_k	x_k	

В приведенной таблице величины a_i задают границы интервалов в которых лежат значения исследуемого признака (x_i – середины интервалов), а w_1 – доли объектов рассматриваемой статистической совокупности с величиной признака в указанном интервале.

При обработке статистических данных на основе полученного эмпирического закона распределения признака вычисляют такие параметры как *среднее значение* и *дисперсия*.

Среднее значение

$$\overline{X} = \sum_i w_i \cdot x_i$$

Дисперсия:

$$D(X) = \sum_i (x_i - \overline{X})^2 \cdot w_i = \sigma^2.$$

Из *теоремы Бернулли* (закона больших чисел)

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right|\right) < \varepsilon) = 1$$

следует, что на[illegible]еской оценкой для *вероятности p* события, которое может произойти в испытании, является ***доля*** *w=m/n* успешных испытаний (тех, в которых это событие произошло) в серии из *n* испытаний.

$$p \approx w$$

при достаточно большом числе наблюдений *n*.

Из *теоремы Чебышева*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - a\right) < \varepsilon\right) = 1$$

следует, что наилучшей оценкой для математического ожидания случайной величины является ее среднее значение.

$$a = M(X) \approx \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \bar{X}$$

2. Вычисление вероятности событий.

Испытание, исходы испытания

Испытание – совершение определенных действий, в результате которых возможно появление различных случайных событий.

Исход испытания – случайное событие, которое может произойти в результате проведения испытания. *Множество исходов испытания* – множество, состоящее из событий, являющихся исходами испытания.

Элементарный исход испытания – случайное событие, которое нельзя представить в виде комбинации более простых исходов испытания

Полная группа событий

Если случайные события являются взаимоисключающими и в совокупности описывают все возможные исходы испытания, они образуют полную группу событий.

Пример:

Рассмотрим множество элементарных исходов испытания, состоящего в бросании игральной кости

$$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$$

Эти события образуют полную группу

Вероятность, случайное событие

Вероятность **- количественная мера возможности наступления события.**

Если событие A может как произойти (наступить), так и не произойти в ходе испытания, оно называется *случайным*. Вероятность случайного события A обозначается $P(A)$.

Случайная величина.

С каждым (или несколькими сразу) исходами испытания свяжем определенное число. Тогда вероятности разных исходов испытания, одновременно являются вероятностями появления указанных чисел. Все эти числа образуют множество значений некоторой случайной величины.

Случайная величина X - величина, которая в результате испытания случайным образом принимает одно из множества своих возможных значений .

Закон распределения случайной величины содержит информацию о том, какие значения величина может принимать в результате испытания и какие вероятности соответствуют ее различным значениям.

Пример: Закон распределения случайной величины X – числа очков, выпавших при броске игральной кости

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Статистическое определение вероятности.

Вероятность события оценивается на основе ***доли ω*** тех испытаний серии, в которых событие произошло.

Будем повторять некое испытание многократно и каждый раз отмечать, произошло ли интересующее нас событие. Обозначим буквой n число проведенных испытаний, а буквой $n_А$ - число испытаний, в которых появилось событие A. Величина $\omega_А = n_А/n$ - относительная частота случайного события - в различных сериях испытаний может принимать близкие значения, при условии, что число испытаний n каждой серии достаточно велико. Значение, около которого группируются полученные частоты, называется *вероятностью события А*.

Классическое определение вероятности.

Вероятность события равна доле элементарных исходов испытания, при которых событие наступает.

Рассмотрим *классическое определение вероятности*. Пусть проводится испытание, для которого число элементарных равновозможных исходов равно n. Для произвольного события A вероятность его наступления вычисляется по формуле

$$P(A)=m_A/n,$$

где m_A - число исходов, благоприятных событию A , то есть таких, когда событие A наступило.

Еще одно очень важное замечание можно сделать о *возможных значениях вероятности случайного события*. Так как максимально возможное число благоприятных исходов равно n, а минимальное – 0, *вероятность случайного события может принимать значения только от 0 до 1.*

$$0 \le P(A) \le 1$$

При непосредственном расчете вероятности в соответствии с классическим определением могут оказаться полезными следующие формулы комбинаторики:

Формула для подсчета числа размещений

Формула для подсчета числа перестановок

Формула для подсчета числа сочетаний

Размещения.

Размещение – это упорядоченный набор из k элементов, выбранных из n имеющихся. О размещении говорят, когда необходимо заполнить k позиций любыми из имеющихся n элементов. Чтобы задать размещение из k элементов, необходимо на первое место поместить один из этих элементов. Это можно сделать n способами. На второе место можно поместить следующий элемент. Это возможно сдедать n-1 способами. Следующий элемент мы сможем выбрать n–2 способами, на позицию k элемент поместим n– (k-1) числом способов. Таким образом, число размещений определяется по формуле

$$A_n^k=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))=n!/(n-k)!$$

Напомним, что для любого натурального числа $m!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot m$. Кроме того, согласно принятому правилу $0!=1$

Перестановки

Частным случаем формулы для подсчета числа размещений является формула для подсчета *числа перестановок*. Ее можно получить, приравняв число позиций к числу элементов, то есть положив $k=n$. *Перестановка* - упорядоченный набор n элементов из n возможных. Число способов переставить n элементов местами равно

$$P_{\text{n}}=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot1=n!$$

Сочетания:

Еще одной важной формулой комбинаторики является формула для подсчета *числа сочетаний*. *Сочетанием из n элементов по k* называется любой *неупорядоченный* набор *k* элементов, выбранных из *n* имеющихся. Формулу для числа сочетаний легко получить из формулы для размещений. Посокольку набор *k* элементов не должен быть упорядочен, все размещения с определенным набором *k* элементов (*k*! размещений) относятся к одному и тому же сочетанию. Следовательно, сочетаний должно быть в *k*! раз меньше.

$$C_n^k = n!/(n-k)!/\,k!$$

Напомним, что выражение для числа сочетаний C_n^k на самом деле является биномиальным коэффициентом, то есть входит в формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^n a^n b^0 + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^0 a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

В частности, $(a+b)^2 = C_2^2 a^2 b^0 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^0 a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Определение вероятности с помощью теории множеств.

Вероятность события равна сумме вероятностей элементарных исходов испытания, при которых данное событие наступает.

Определить вероятность события можно и другим способом. В подходе, основанном на *представлениях теории множеств*, предполагается, что любое испытание характеризуется множеством элементарных исходов Ω. Любой элемент этого множества ω_i характеризуется вероятностью p_i . Элементарные исходы в этом подходе не обязательно должны быть равновозможными, однако в сумме их вероятности, как и в классическом случае, дают 1

При таком подходе вероятность события A определяется как сумма вероятностей событий ω_i, благоприятных событию A.

$$P(A)=\sum_{i=1}^{k} p_i^A$$

Геометрическое определение вероятности.

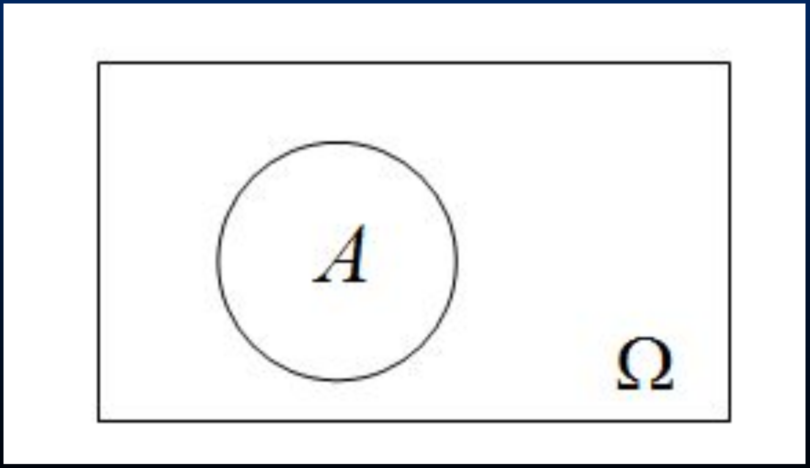
Вероятность определяется отношением геометрических показателей, характеризующих область наступления события и область всех возможных исходов испытания.

Согласно этому определению, при вычислении вероятности используется формула

$$P(A)=s_{\text{A}}/s_{\Omega},$$

где s_{A} и s_{Ω}–геометрические параметры (длина, площадь или объем, в зависимости от условий задачи) характеризующие область возможных элементарных исходов (Ω) и область исходов, благоприятных событию A.

Рассмотрим испытание, состоящее в случайном размещении точки в прямоугольнике заданного размера. Наступлению события *A* соответствует попадание точки в соответствующую область. Графическое изображение такого испытания носит название диаграммы Венна. Для определения вероятности наступления события *A* необходимо площадь фигуры *A* поделить на площадь всего многоугольника Ω.



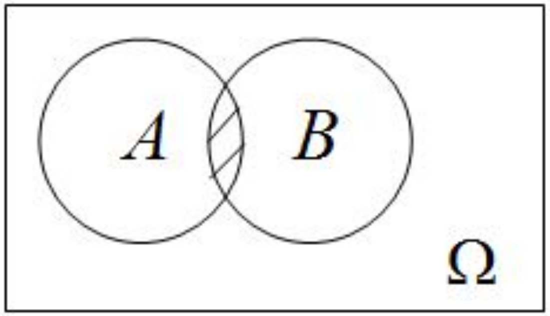
3. Операции над событиями. Расчет вероятности произведения и суммы событий.

Известные вероятности относительно простых событий можно использовать при расчете вероятностей более сложных событий, полученных путем применения определенных операций к исходным событиям.

Такими операциями являются умножение, сложение, отрицание и т.д.

Произведение событий *AB*

Произведение событий (их пересечение) состоит в одновременном наступлении событий A и B. Например, попадание точки в заштрихованную область означает одновременное наступление события A – точка попала в область A и события B – точка попала в область B.



Произведение событий A и B

Для нескольких событий их произведение – это событие, состоящее в наступление всех этих событий одновременно

$$C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Вероятность произведения событий

Пусть известно, что в результате испытания событие A произошло. Необходимо найти вероятность события B при условии наступления события A.Такая вероятность обозначается символом $P(B/A)$ и называется условной. Чтобы ее рассчитать, необходимо определить отношение числа исходов, благоприятных для события B при условии наступления события A, к полному числу исходов, соответствующих наступлению A. Для нее можно записать следующее выражение

$$P(B/A)=s_{AB}/s_A= P(AB)/P(A)$$

Переписав выражение для условной вероятности, получим формулу для вероятности произведения событий

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Данное выражение носит название *теоремы умножения вероятностей.*

Вероятность произведения независимых событий (не влияющих друг на друга).

Важным понятием, связанным с определением вероятности произведения является понятие *независимости* событий. События A и B являются *независимыми* тогда и только тогда, когда их условные вероятности равны их полным вероятностям, то есть $P(B/A)= P(B)$, $P(A/B)= P(A)$. Для независимых событий всегда

$$P(AB)= P(A)\cdot P(B)$$

Если равенство не выполняется, события являются зависимыми. Например, события A и B, для которых $P(A)=0.2$, $P(B)=0.6$, а $P(AB)= 0.08$, являются зависимыми.

Невозможные и достоверные события.

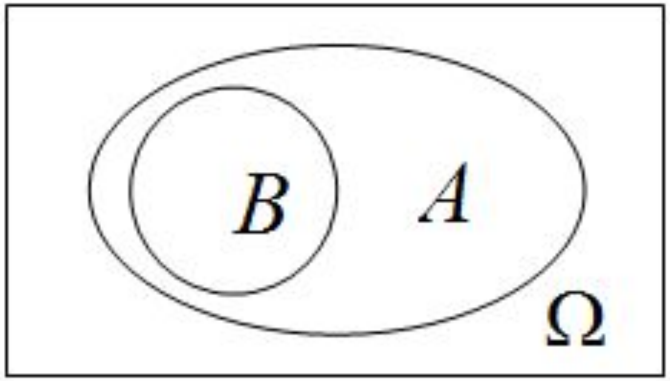
Событие называется *невозможным*, если оно не может произойти ни при каких обстоятельствах. Такое событие обозначается символом пустого множества $\varnothing$.

Еще один особый вид события – *достоверное*. Достоверным является событие, происходящее при любых условиях. Для его обозначения используется символ Ω.

Вероятность невозможного события всегда 0, вероятность достоверного события всегда 1.

Если одно из событий A и B является достоверным (или невозможным), события независимы.

Являются ли зависимыми события B и A ?

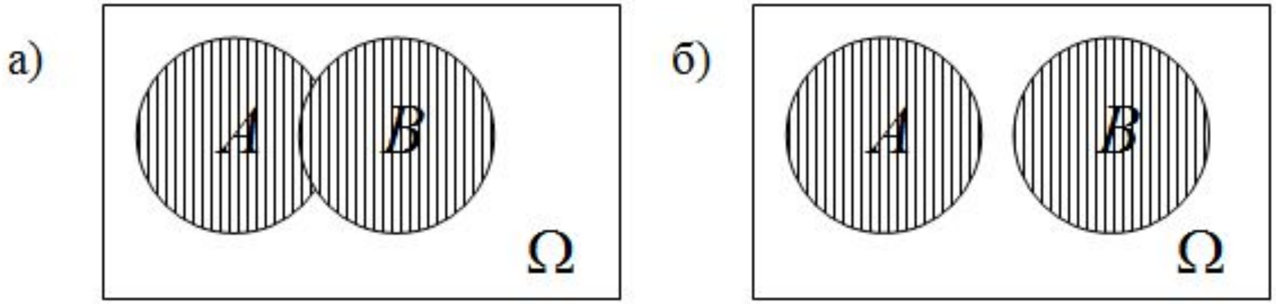


$B \subset A$

событие B влечет за собой событие A

Сумма событий $A+B$

Суммой событий A и B называется событие С, которое состоит в появлении хотя бы одного из событий A и B. Например попадание точки в заштрихованную область означает наступление события $C=A+B$.



Сумма событий A и B – событие C, состоящее в попадании точки в заштрихованную область.

В случае, когда складываются несколько событий, суммой событий $A_1, A_2, \ldots A_n$ является такое событие C, которое состоит в появлении хотя бы одного из перечисленных событий

$$C = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

Вероятность суммы событий

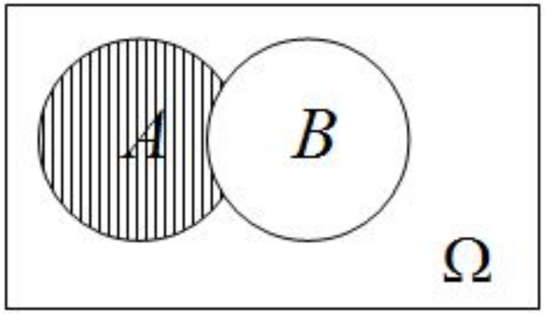
Вероятность суммы событий можно вычислить, используя геометрическое определение. Очевидно, что площадь фигуры $A+B$

$$s_{A+B}=s_{A\setminus AB}+s_{B\setminus AB}+s_{AB}=s_A+s_B-s_{AB}$$

и

$$P(A+B)=P(A\setminus AB)+P(B\setminus AB)+P(AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

выражение $A\setminus AB$ (разность событий) означает, что событие A произошло но не произошло событие AB.

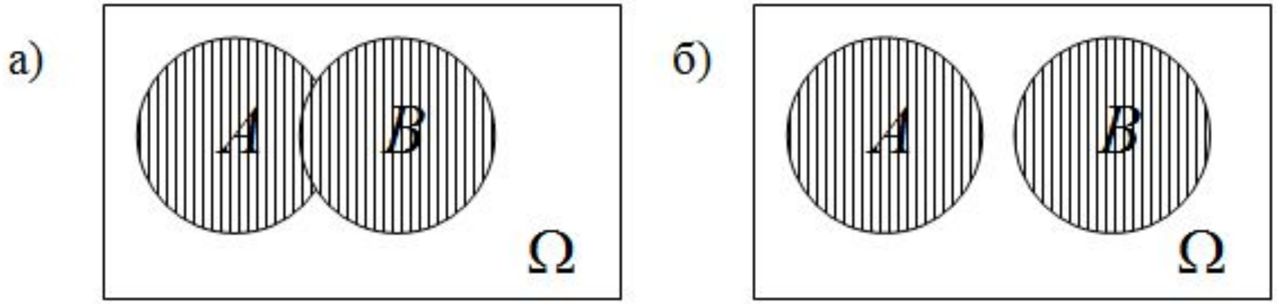


Разность событий A и B.

Вероятность суммы несовместных событий.

Несовместные события - те, что не могут наступить одновременно в результате испытания. В этом случае их произведение является *невозможным* событием. На рисунке б) события *A* и *B* несовместны, *AB* – невозможное событие: $AB = \varnothing$, поэтому $P(AB) = P(\varnothing) = 0$ и

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

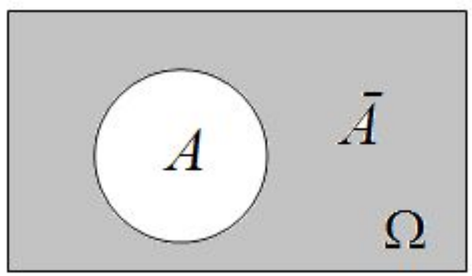


Сумма событий *A* и *B* – событие *C*, состоящее в попадании точки в заштрихованную область.

Несовместные возможные события зависимы

Противоположные события.

Противоположным событием $\bar{A}$, противоположным событию A, называют событие, состоящее в непоявлении события A. Противоположное событие возникает в результате применения к событию A операции отрицания. Например, попадание точки в область вне области A – это событие $\bar{A}$.



События A и $\bar{A}$.

$$\overline{\varnothing}=\Omega$$

$$\overline{\Omega}=\varnothing$$

Примером противоположных событий могут служить невозможное и достоверное событие.

Вероятность противоположного события

события $A_1, A_2, \ldots A_n$ образуют полную группу, если для любых двух событий A_i и A_j

и $A_i \cdot A_j = \varnothing$

$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$

Противоположные события всегда образуют полную группу событий.

$$A \cdot \bar{A} = \varnothing$$

$$A + \bar{A} = \Omega$$

Если рассмотреть события A_1, A_2, ...A_n, образующие полную группу (попарно несовместные и в сумме дающие достоверное событие), вероятность их суммы будет равна

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = P(\Omega) = 1$$

В частном случае, для событий $\bar{A}$ и A

$$P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1$$

и

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Таким образом, вероятность события, противоположного данному, всегда можно найти, если известна вероятность самого события.

Формула полной вероятности

Пусть случайное событие A может наступить в результате наступления одного из событий H_1, H_2, ...H_n, образующих полную группу. Тогда полная вероятность события A:

$$P(A)= P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+...+ P(H_n)\cdot P(A/H_n)$$

При выводе формулы можно воспользоваться соотношениями

$$A=A\cdot\Omega=A(H_1 + H_2 +...+H_n)= AH_1 + AH_2 +...+AH_n$$

События H_1, H_2, ...H_n называют гипотезами. Каждая гипотеза может привести к появлению события A с определенной вероятностью.

Формула Байеса

Пусть известно, что в результате испытания реализовалась одна из гипотез H_1, H_2, ...H_n и событие A произошло. В этом случае можно определить новые (апостериорные) значения вероятностей для гипотез с помощью формулы Байеса. Данные величины показывают, какова вероятность того, что событие произошло в результате реализации конкретной гипотезы:

$$P(H_i/A) = P(A/H_i)\, P(H_i)/P(A)$$

4. Биномиальный закон распределения дискретной случайной величины.

Формула Бернулли

Пусть последовательно проводятся n одинаковых независимых испытаний, в каждом из которых событие A может произойти с вероятностью $P(A)=p$. Вероятность того, что событие A не произойдет $P(\bar{A})=1-p=q$.

В общем случае, вероятность того, что в серии n независимых испытаний событие A появится k раз дается *формулой Бернулли*:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad \text{где } 0 \le k \le n.$$

Биномиальное распределение.

Случайная величина X называется распределенной по *биномиальному закону*, если она принимает значения 0, 1, 2, ...n, вероятность которых вычисляется по формуле Бернулли $p_k = p(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $0 \le k \le n$, $q = 1-p$, $0 \le p \le 1$. Распределение полностью определяется двумя параметрами – p и n. Примером биномиального распределения может являться задача о числе выпавших гербов при броске n монет. Если k - число гербов, вероятности k успехов в n испытаниях можно определить по формуле Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Математическое ожидание и дисперсия для случайной величины *X*, распределенной по биномиальному закону.

Можно показать, что для переменной X_1 с законом распределения

X_1

x_k	0	1
p_k	$1-p$	p

$$M(X_1)=0\cdot(1-p)+1\cdot p=p$$

$$D(X_1)=M([X_1]^2)-[M(X_1)]^2=1^2\cdot p+0^2\,(1-p)-p^2=p-p^2=p\,(1-p)=pq$$

$$X=\underbrace{X_1+X_1+\ldots X_1}_{n \text{ раз}}$$

$$M(X)=M(X_1+X_1+\ldots X_1)=p+p+\ldots+p=np$$

$$D(X)=D(X_1+X_1+\ldots X_1)=pq+pq+\ldots+pq=npq$$

Математическое ожидание и дисперсия суммы случайных величин.

При вычислении характеристик биномиального распределения мы использовали свойства дисперсии и математического ожидания случайных величин, полученных в результате суммирования.

Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых

$$M(X+Y)= M(X)+M(Y)$$

Входящая в выражение случайная величина $X+Y$ принимает значения, равные суммам всех различных пар значений X и Y.

X

x_k	x_1	x_2
p_k	p_1	p_2

Y

y_i	y_1	y_2
p_i	g_1	g_2

$Z= X+Y$

z_i	$x_1+ y_1$	$x_2+ y_1$	$x_1+ y_2$	$x_2+ y_2$
p_i	$p_{11}= p_1\cdot g_{11}$	$p_{21}= p_2\cdot g_{21}$	$p_{12}= p_1\cdot g_{12}$	$p_{22}= p_2\cdot g_{22}$

Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий. Если величины зависимы, к сумме дисперсий необходимо добавить удвоенную ковариацию этих величин.

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\,Cov(X,Y)$$

Для независимых случайных величин

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

▪

5. Нормальное распределение непрерывной случайной величины.

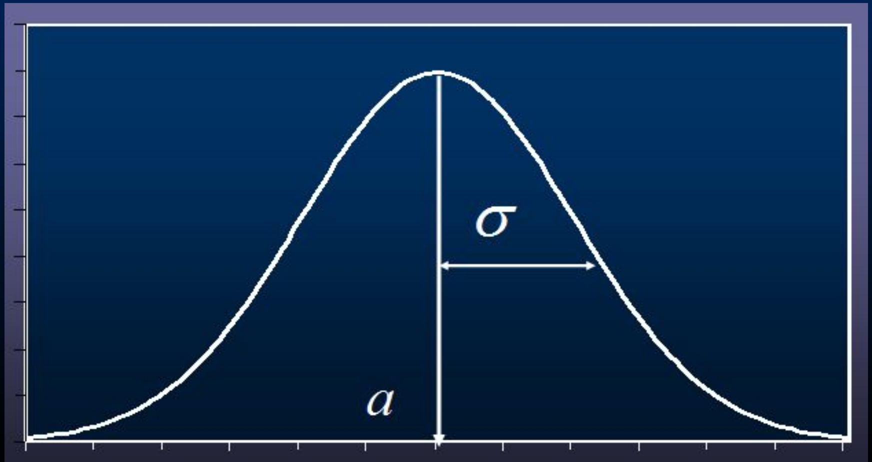
Нормальное распределение описывается законом

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Данный закон распределения зависит отдвух праметров – a и σ. Можно показать, что

$$M(X) = a \qquad D(X) = \sigma^2$$

График плотности нормального распределения называют нормальной кривой (кривой Гаусса), а соответствующую функцию - функцией Гаусса. Данная функция определена для всех значений x, симметрична относительно $x=a$, на бесконечности она стремится к 0, максимальна при $x=a$, $f(a) = 1/\sigma/(2\pi)^{0.5}$. Точки перегиба - $x=a+\sigma$ и - $x=a-\sigma$.



Нормированное нормальное распределение

Нормальное распределение называется нормированным при

$$M(X) = 0$$

$$D(X) = 1$$

Значения нормированной функции нормального распределения затабулированы.

$$\varphi(x) = 1/(2\pi)^{0.5} \cdot e^{-x^2/2}$$

Вероятность случайной величины оказаться в заданном интервале в случае ее нормированного нормального распределения определяется выражением

$$P(x_1 < x < x_2) = 1/(2\pi)^{0.5} \cdot \int_{x_1}^{x_2} e^{-t^2/2} \cdot dt = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$ где

$$\Phi(x) = 1/(2\pi)^{0.5} \cdot \int_{0}^{x} e^{-t^2/2} \cdot dt$$ - функция Лапласа.

В случае, если распределение случайной величины подчиняется нормальному закону с параметрами $M(X)=a\neq 0$, $\sigma \neq 1$, вероятность попасть на заданный интервал вычисляется по формуле:

$$P(x_1 < x < x_2) = \Phi((x_2 - a)/\sigma) - \Phi((x_1 - a)/\sigma),$$

где

$$\Phi(x) = 1/(2\pi)^{0.5} \cdot \int_0^x e^{-t2/2} \cdot dt$$

- функция Лапласа.

Правило «трех сигм».

Если случайная величина распределена нормальным образом с параметрами a и σ (не нормирована), тогда

$$P(x_1 < x < x_2) = \Phi((x_2 - a)/\sigma) - \Phi((x_1 - a)/\sigma),$$

$$\mathrm{P}(a - 3\sigma \le x \le a + 3\sigma) = 2\cdot\Phi(3) = 2\cdot 0.49865 = 0.9973$$

Таким образом, с вероятностью 99.73% значения нормально распределенной случайной величины находятся в интервале (a -3σ, a +3σ). Данное утверждение получило название правила “трех сигм”. Вероятность того,что отклонение математического ожидания превысит 3σ составляет всего 0.0027. На практике обычно предполагают, что если закон распределения случайной величины неизвестен, но правило трех сигм выполняется, распределение можно считать нормальным.

Таблица вероятностей для отклонений в 1, 2 и 3σ .

1	0,682689
2	0,9545
3	0,9973

Центральная предельная теорема

Нормальное распределение действительно очень часто встречается на практике. Объяснение этому факту дает теорема М. Ляпунова, которую также называют *центральной предельной теоремой*. Согласно этой теореме, *если случайная величина является суммой очень большого числа взаимно-независимых случайных величин, влияние каждой их которых на всю сумму ничтожно мало, то эта случайная величина имет распределение, близкое к нормальному*.

Таким образом, если величина Y является суммой достаточно большого числа независимых случайных величин X , имеющих одинаковый закон распределения, ее можно считать распределенной нормально с математическим ожиданием $M(Y)=nM(X)$ и дисперсией $D(Y)= nD(X)$, где n- число величин X.