Кинематика – раздел механики, в котором изучают движение материальных тел без учета причин, его вызывающих

- Виды движения:
  - Поступательное
  - Вращательное
  - Плоскопараллельное
  - Сферическое
  - Сложное
- Кинематические характеристики:
  - Положение точки (тела)
  - Траектория
  - Скорость
  - Ускорение
- Основные задачи кинематики:
  - Установление математических способов задания движения точек (тел)
  - Зная закон движения точки (тела), установить методы определения всех величин, характеризующих данное движение

Глава 1
Кинематика точки

§ 1. Способы задания движения

§ 2. Скорость и ускорение точки

2.1. Скорость при векторном способе задания движения точки

2.2. Ускорение при векторном способе задания движения точки

2.3. Скорость при координатном способе задания движения точки

2.4. Ускорение при координатном способе задания движения точки

2.5. Скорость при естественном способе задания движения точки

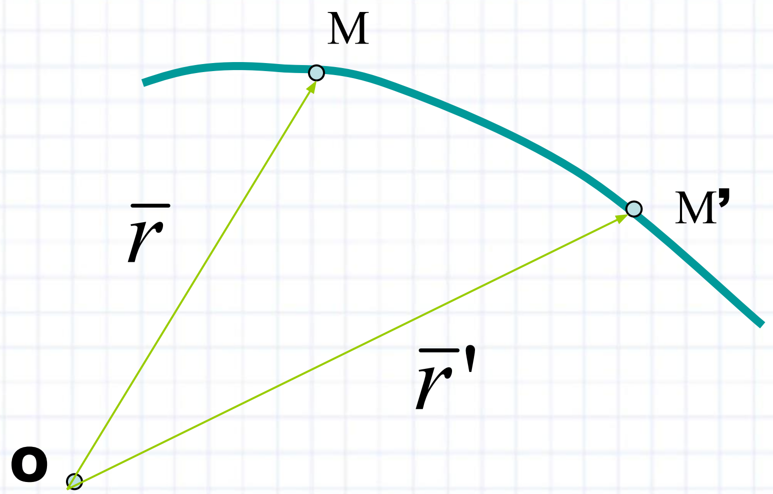
2.6. Ускорение при естественном способе задания движения точки

§ 3. Частные случаи движения точки

§ 1. Способы задания движения

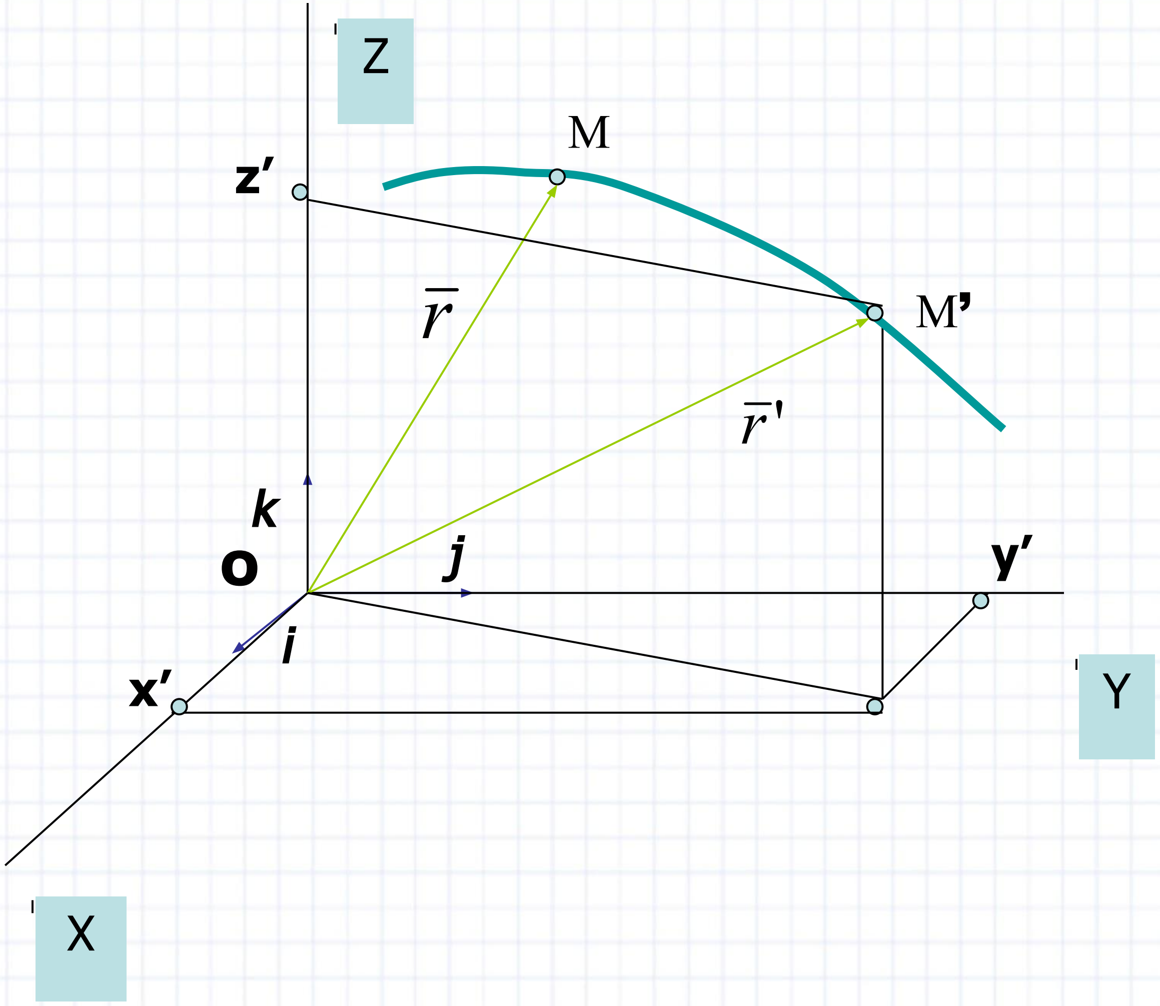
Движение точки по отношению к избранной системе отсчета считается заданным, если известен способ, при помощи которого можно определить положение точки в любой момент времени

Точка, двигаясь в пространстве, описывает кривую, называемую траекторией


M
$\bar{r}$
M'
$\bar{r}\,'$
o

Способы задания движения

- Векторный способ задания движения $\bar{r} = \bar{r}(t)$


Z
M
z′
M’
k
j
y′
o
i
x′
Y
X

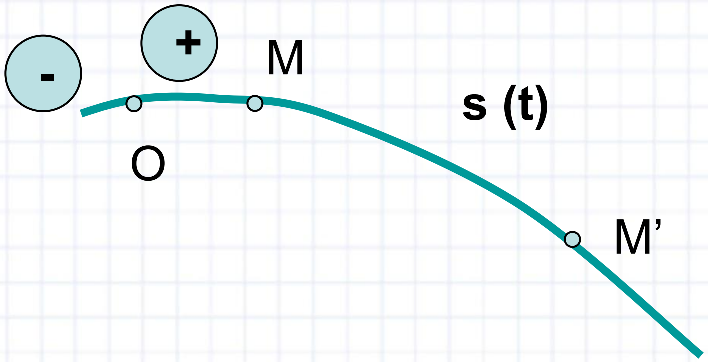
Способы задания движения

- Векторный способ задания движения $\bar{r} = \bar{r}(t)$

- Координатный способ задания движения

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

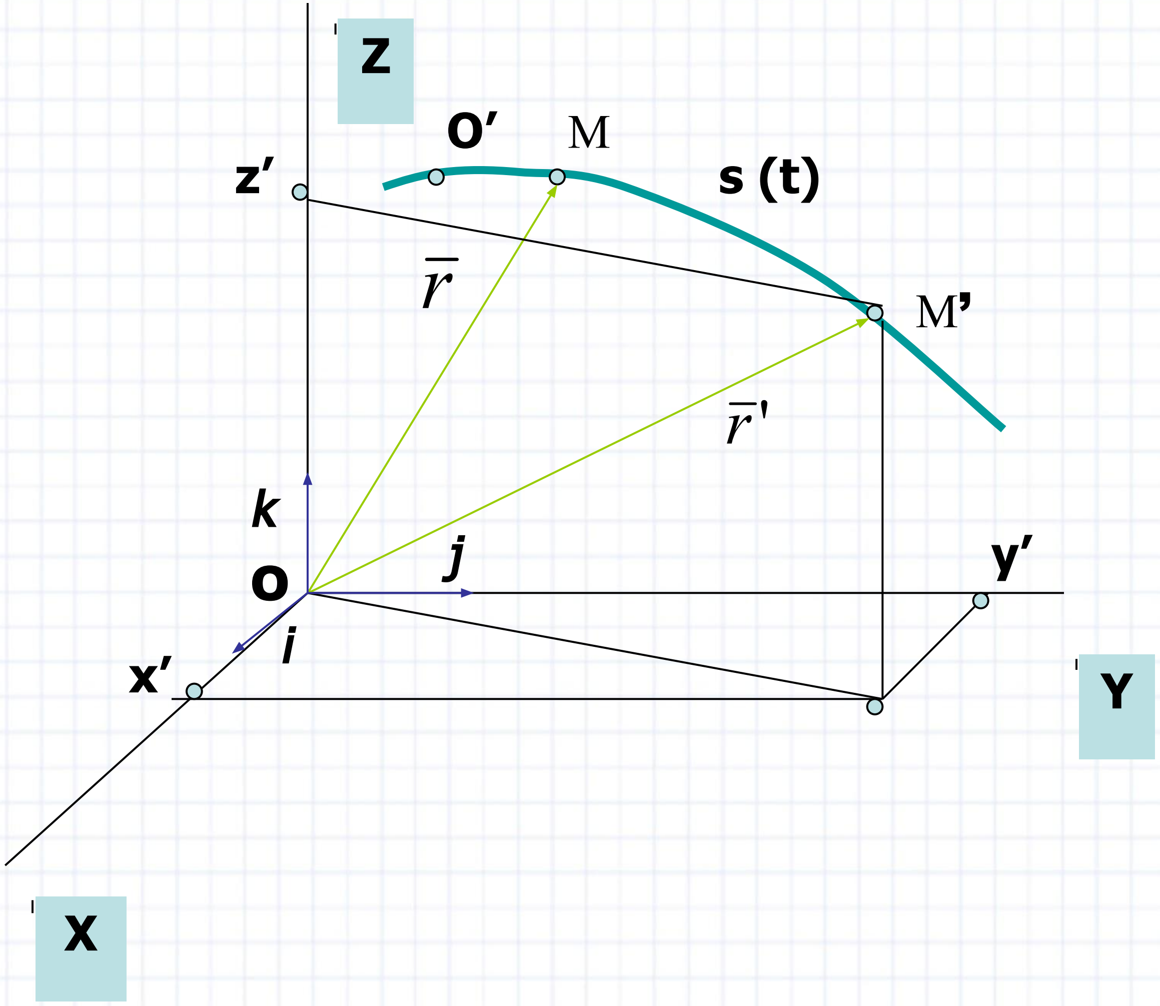
Естественный (траекторный) способ задания движения



- задаем траекторию движения
- начало отсчета
- направление отсчета расстояний
- закон движения точки по траектории $s = s(t)$

Способы задания движения

- Векторный способ задания движения $\bar{r} = \bar{r}(t)$
- Координатный способ задания движения $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$
- Естественный (траекторный) способ задания движения $s = s(t)$



Z
O′
M
s (t)
z′
$\bar{r}$
M'
$\bar{r}'$
k
j
y′
O
i
x′
Y
X

Скорость

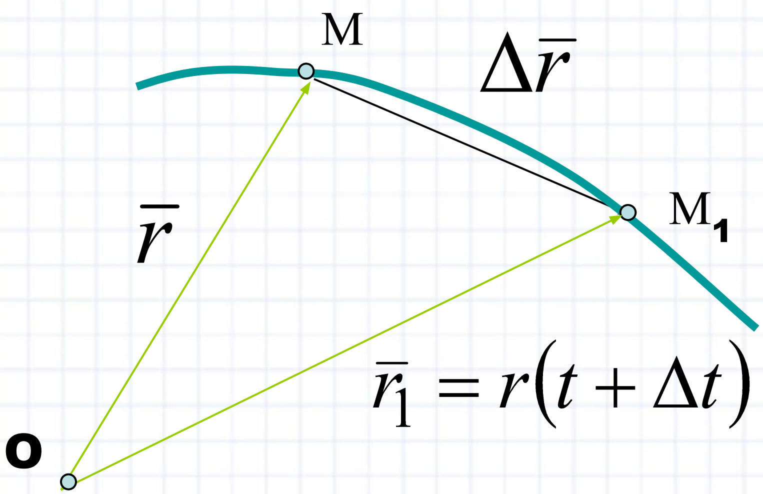
- Скорость точки $\overline{\mathbf{V}}$ (векторная величина) одна из основных кинематических характеристик движения точки
- Под средней скоростью точки (по модулю и направлению) понимают величину, равную отношению вектора перемещения к промежутку времени, за который это перемещение произошло

$$\overline{\mathbf{V}}_{cp} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}$$

- Скорость точки в данный момент времени называется мгновенной скоростью точки

$$\overline{\mathbf{V}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}$$

2.1. Скорость при векторном способе задания движения точки



- В момент времени t

$$\bar{r} = \bar{r}(t)$$

- при $t_1 = t + \Delta t$

$$\bar{r}_1 = \bar{r}(t+\Delta t)$$

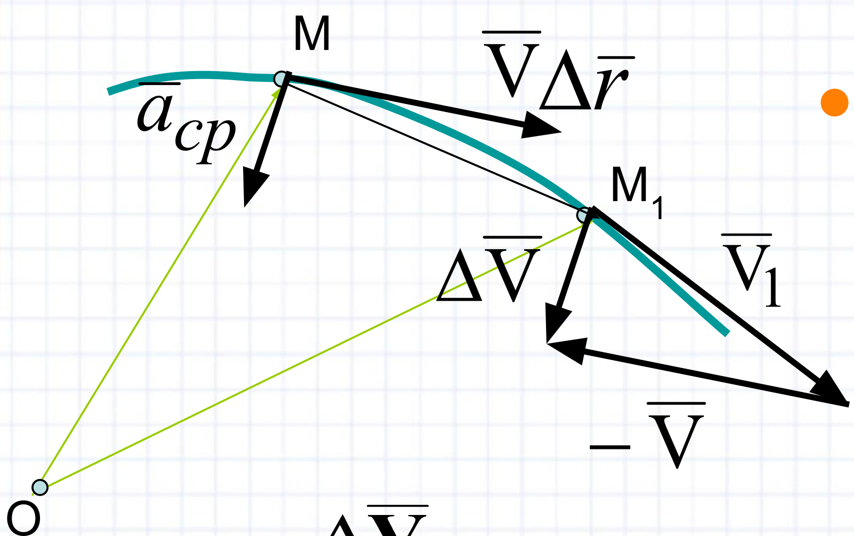
$$\bar{r}_1 = \bar{r}(t+\Delta t) = \bar{r} + \overline{MM}_1$$

$$\overline{MM}_1 = \bar{r}_1 - \bar{r} = \Delta\bar{r}$$

$$\bar{\mathbf{V}}_{cp} = \frac{\overline{MM}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}; \qquad \bar{\mathbf{V}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}$$

$$[\bar{\mathbf{V}}] = \left[\frac{длина}{время}\right] = \frac{м}{с}; \frac{км}{час}$$

2.2. Ускорение при векторном способе задания движения точки



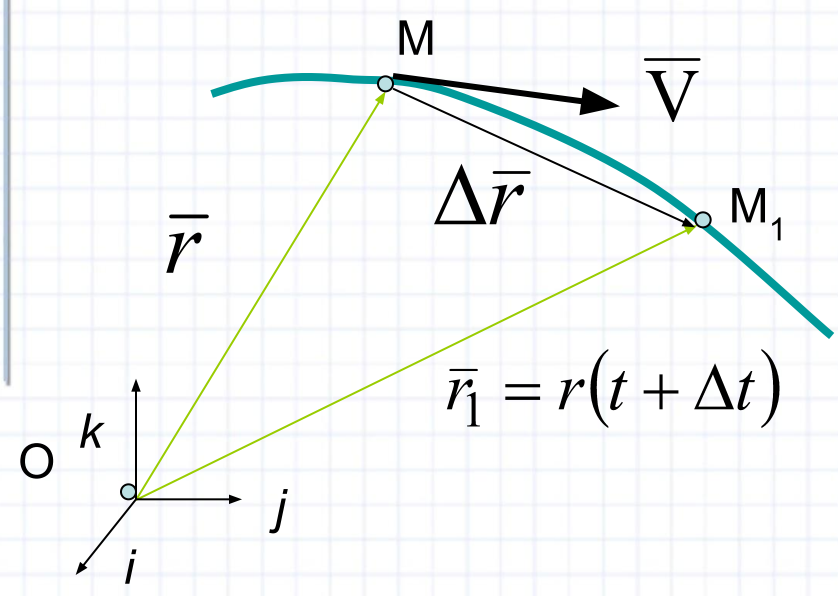
- В момент времени t скорость точки M $\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}(t)$
- при $t_1 = t + \Delta t$ в точке M_1
  $\bar{V}_1 = \bar{V}_1(t_1) = \bar{V}(t + \Delta t)$

$$\Delta\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}_1 - \bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}(t + \Delta t) - \bar{\mathbf{V}}(t)$$

$$\bar{a}_{cp} = \frac{\Delta\bar{\mathbf{V}}}{\Delta t}; \qquad \bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{\mathbf{V}}}{\Delta t} = \frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \dot{\bar{\mathbf{V}}} = \ddot{\bar{r}}$$

$$[\bar{a}] = \left[\frac{длина}{время^2}\right] = \frac{м}{с^2}$$

2.3. Скорость при координатном способе задания движения точки



$$\bar{r} = x\,\bar{i} + y\,\bar{j} + z\,\bar{k}$$

$$\Delta\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r} = \overline{MM_1}$$

$$\bar{\mathbf{V}} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}$$

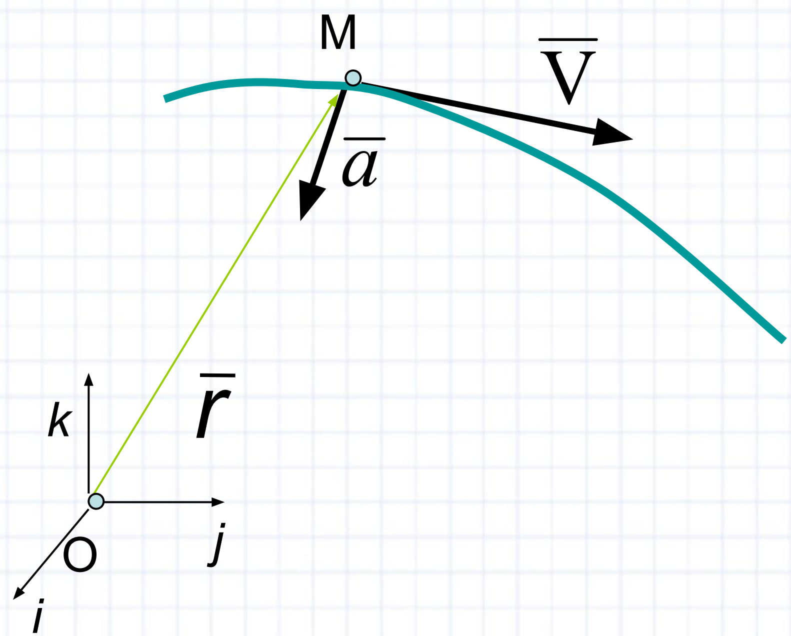
$$\bar{\mathbf{V}} = \dot{x}\,\bar{i} + \dot{y}\,\bar{j} + \dot{z}\,\bar{k}$$

$$\bar{\mathbf{V}} = V_x\,\bar{i} + V_y\,\bar{j} + V_z\,\bar{k}$$

$$\left|\bar{\mathbf{V}}\right| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos\left(\bar{\mathbf{V}}\,\widehat{,}\,\bar{x}\right) &= \frac{V_x}{V} \\
\cos\left(\bar{\mathbf{V}}\,\widehat{,}\,\bar{y}\right) &= \frac{V_y}{V} \\
\cos\left(\bar{\mathbf{V}}\,\widehat{,}\,\bar{z}\right) &= \frac{V_z}{V}
\end{aligned}\right\}$$ направляющие косинусы

2.4. Ускорение при координатном способе задания движения точки



$$\bar a = \frac{d\bar V}{dt} = \frac{d^2 \bar r}{dt^2} = \dot{\bar V} = \ddot{\bar r}$$

$$\bar a = a_x \,\bar i + a_y \,\bar j + a_z \,\bar k$$

$$\bar a = \dot V_x \,\bar i + \dot V_y \,\bar j + \dot V_z \,\bar k$$

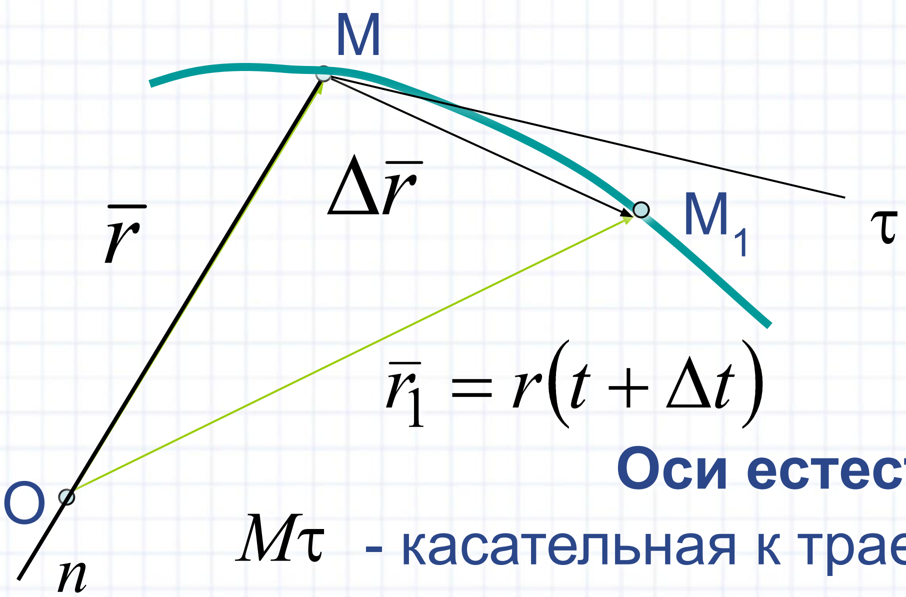
$$\bar a = \ddot x \,\bar i + \ddot y \,\bar j + \ddot z \,\bar k$$

$$|\bar a| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\left(\widehat{\bar a, \bar x}\right) &= \frac{a_x}{a} \\ \cos\left(\widehat{\bar a, \bar y}\right) &= \frac{a_y}{a} \\ \cos\left(\widehat{\bar a, \bar z}\right) &= \frac{a_z}{a} \end{aligned}\right\}$$

направляющие косинусы

2.5. Скорость при естественном способе задания движения точки



$s = s(t)$ – криволинейная (дуговая) координата

$S = S(t)$ – пройденный путь

Оси естественного трехгранника

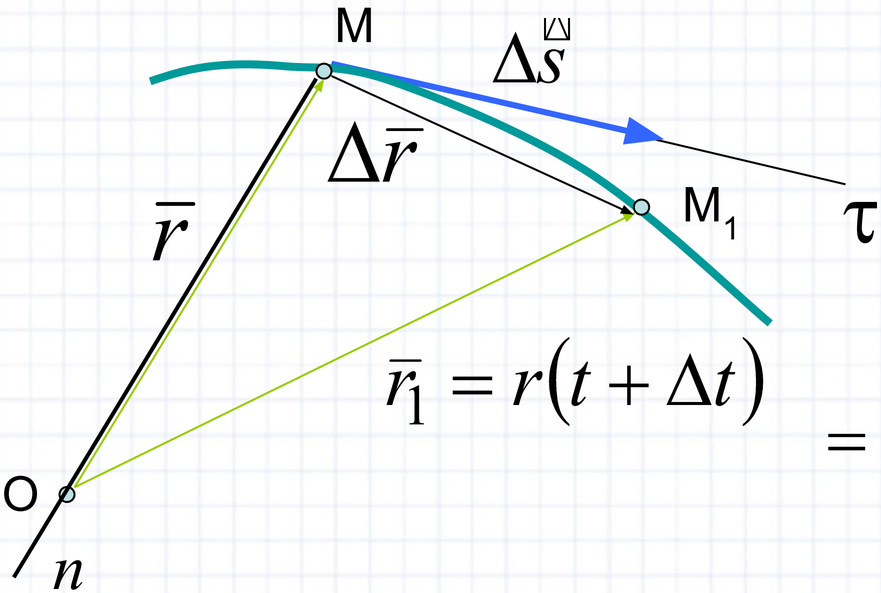
$M\tau$ - касательная к траектории, направленная в сторону движения

Mn - нормаль к траектории лежит в соприкасающейся плоскости и направлена в сторону вогнутости траектории

Mb - перпендикулярна к первым двум, так чтобы образовывала правую тройку векторов

$$\overline{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$ по определению или

$$\overline{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$$

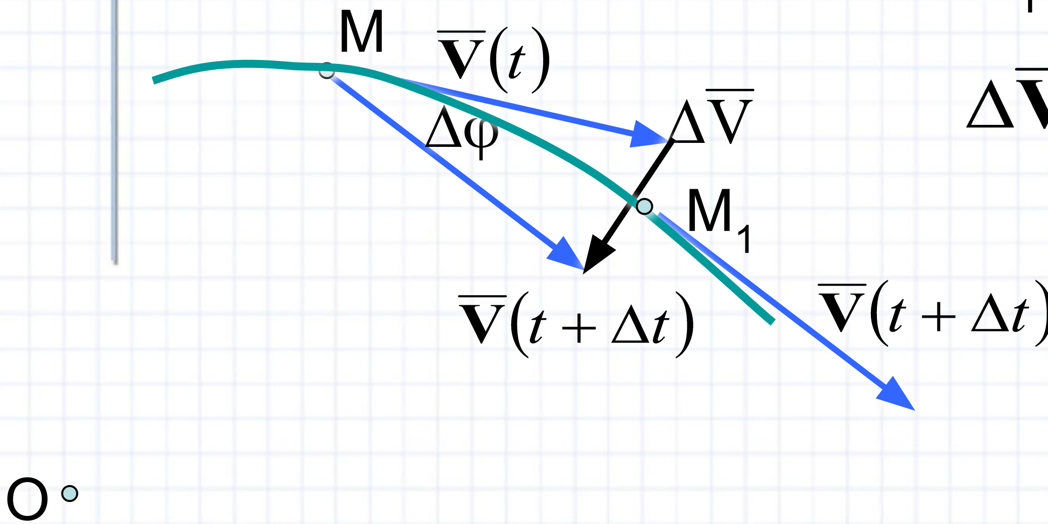


$$\overline{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta s} \right] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \bar{\tau} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$\overline{\mathbf{V}} = \frac{ds}{dt}\bar{\tau} = \dot{s}\,\bar{\tau}\,; \quad \mathbf{V}_\tau = \frac{ds}{dt}\,; \quad \left|\overline{\mathbf{V}}\right| = \left|\mathbf{V}_\tau\right|;$$

2.6. Ускорение при естественном способе задания движения точки



$\Delta\varphi$ – *угол смежности*

$$\Delta\overline{\mathbf{V}} = \overline{\mathbf{V}}(t+\Delta t) - \overline{\mathbf{V}}(t)$$

$$\overline{a}_{cp} = \frac{\Delta\overline{\mathbf{V}}}{\Delta t};\quad \overline{a}_{cp} \,||\, \Delta\overline{\mathbf{V}}$$

$\overline{a}_{cp}$ *лежит в соприкасающейся плоскости*

$$\overline{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overline{\mathbf{V}}}{\Delta t} = \frac{d\overline{\mathbf{V}}}{dt} = a_n\overline{n} + a_\tau\overline{\tau} + a_b\overline{b};$$

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{V}_\tau}{\Delta t} = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta\varphi \to 0}} \frac{\mathbf{V}_1 \cos\Delta\varphi - \mathbf{V}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{V}}{dt};$$

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{V}_n}{\Delta t} = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta\varphi \to 0}} \frac{\mathbf{V}_1 \sin\Delta\varphi}{\Delta t} = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta\varphi \to 0}} \left[\frac{\mathbf{V}_1 \sin\Delta\varphi}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta\varphi} \right] =$$

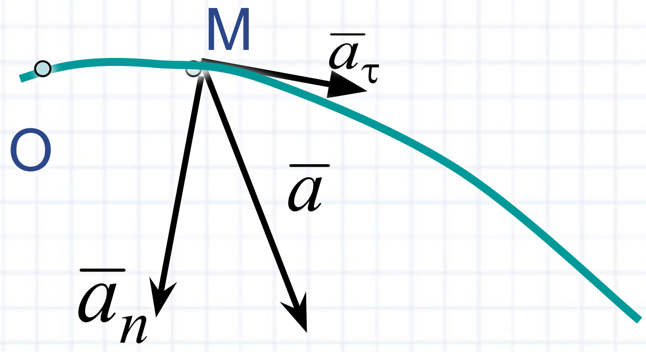
$$= \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta\varphi \to 0}} \left[\mathbf{V}_1 \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right] \cdot \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta\varphi \to 0}} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \cdot \lim_{\substack{\Delta\varphi \to 0 \\ \Delta t \to 0}} \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi} = \mathbf{V}^2 \cdot k = \frac{\mathbf{V}^2}{\rho};$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{|\Delta s|} = \frac{d\varphi}{ds} \equiv k$$ - кривизна кривой в точке М

$$\lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi} = 1$$

$$a_b \equiv 0$$

$$\rho = \frac{1}{k} \text{ – \textit{радиус кривизны траектории}}$$



$$\overline{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt}\overline{\tau} + \frac{\mathbf{V}^2}{\rho}\overline{n}$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

a_n всегда положительное, т.к. всегда направлено в сторону вогнутости траектории

a_τ показывает изменение скорости по величине

a_n показывает изменение скорости по направлению

§ 3. Частные случаи движения точки

Равномерное движение, если всегда $a_\tau = 0$

в случае $\overline{\mathbf{V}} \neq 0$ *имеем* $\overline{\mathbf{V}} = const$

- Равномерное прямолинейное движение, когда $a_n = 0$

  и значит $\dfrac{\mathbf{V}^2}{\rho} = 0 \Rightarrow \rho = \infty$

  либо если $\mathbf{V} = 0,$ то мгновенная остановка, т.е. скорость меняет направление – точка перегиба

- Равномерное криволинейное движение, когда $a_n = a$

  В этом случае уравнение движения $s(t) = s_0 + Vt$

Если $a_\tau = 0$ в какой-нибудь момент времени

имеем экстремум, т.е. $\overline{\mathbf{V}}_{\max}$ *или* $\overline{\mathbf{V}}_{\min}$

Если $a_\tau \neq 0,$ то движение с ускорением

- движение ускоренное, когда $a_\tau > 0$
- движение замедленное, когда $a_\tau < 0$

Равноускоренное движение, если всегда

$$a_\tau = const$$

В этом случае уравнение движения

$$a_\tau = const \qquad d\mathbf{V} = a_\tau\, dt \qquad \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + a_\tau t$$

$$ds = \left(\mathbf{V}_0 + a_\tau t\right) dt \qquad s\left(t\right) = s_0 + \mathbf{V}t + \frac{a_\tau\, t^2}{2}$$