

Затухающие колебания.

Затухающими называются колебания амплитуда, которых уменьшается с течением времени.

Пусть в системе действует диссипативная сила пропорциональная скорости колебаний

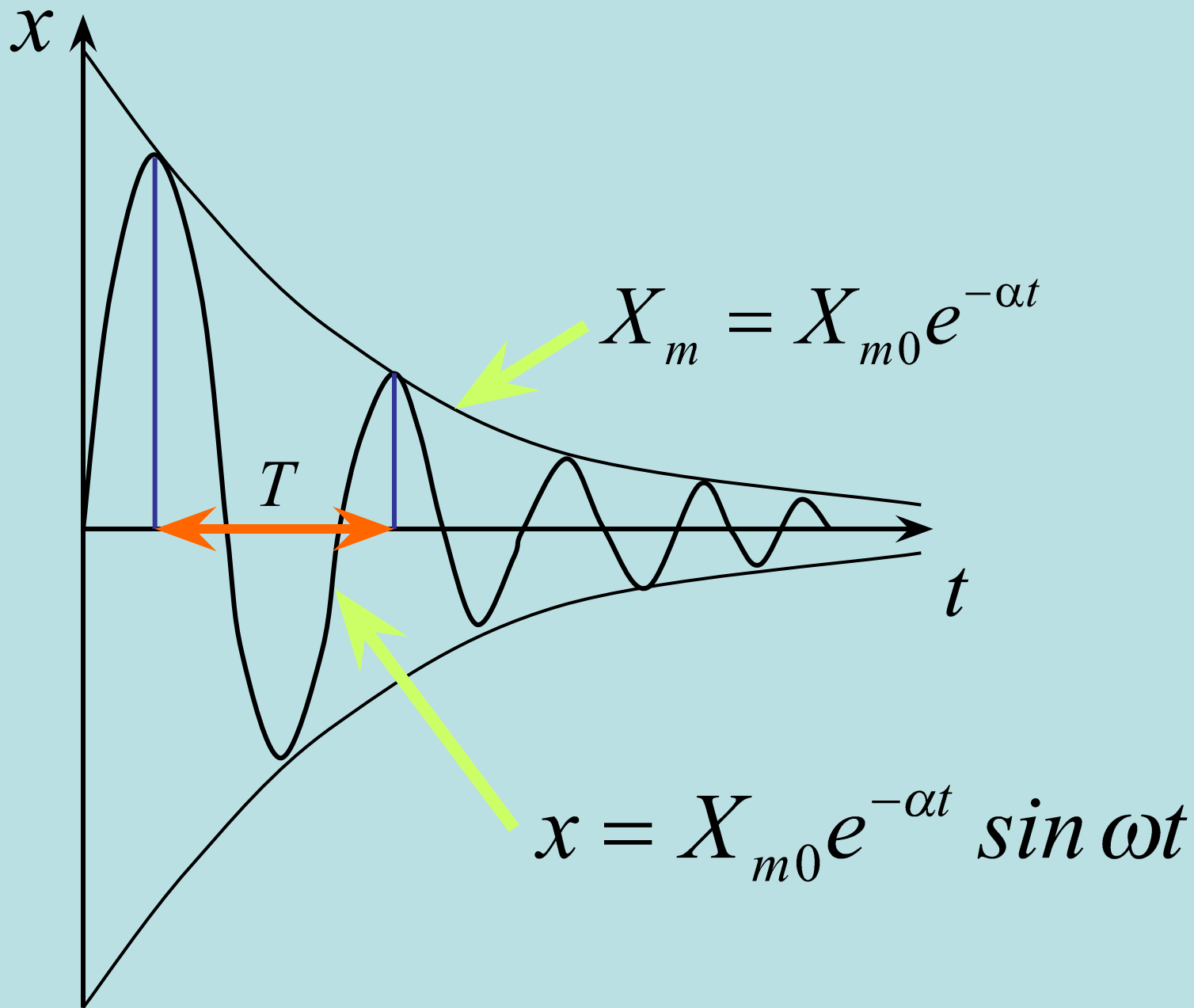
$$F = -r \frac{dx}{dt} \quad \text{где } r \text{ — коэффициент сопротивления}$$

Тогда дифференциальное уравнение затухающих колебаний примет вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

решением которого будет уравнение затухающих колебаний

$$x = X_{m0} e^{-\alpha t} \sin \omega t \quad \text{где } \alpha \text{ — коэффициент затухания} \quad \alpha = \frac{r}{2m}$$



Характеристики затухающих колебаний:

Частота затухающих колебаний: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

$\tau = \frac{1}{\alpha}$ **Время релаксации** – время в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз

Декремент затухания - отношение амплитуд двух последующих колебаний за период.

$$\chi = \frac{X_m(t)}{X_m(t+T)} = \boxed{} = e^{\alpha T}$$

Логарифмический декремент $\Theta = \ln \chi = \alpha T$

Добротность системы – величина равная отношению энергии системы к затраченной энергии за период.

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = \boxed{} = \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

Вынужденные колебания

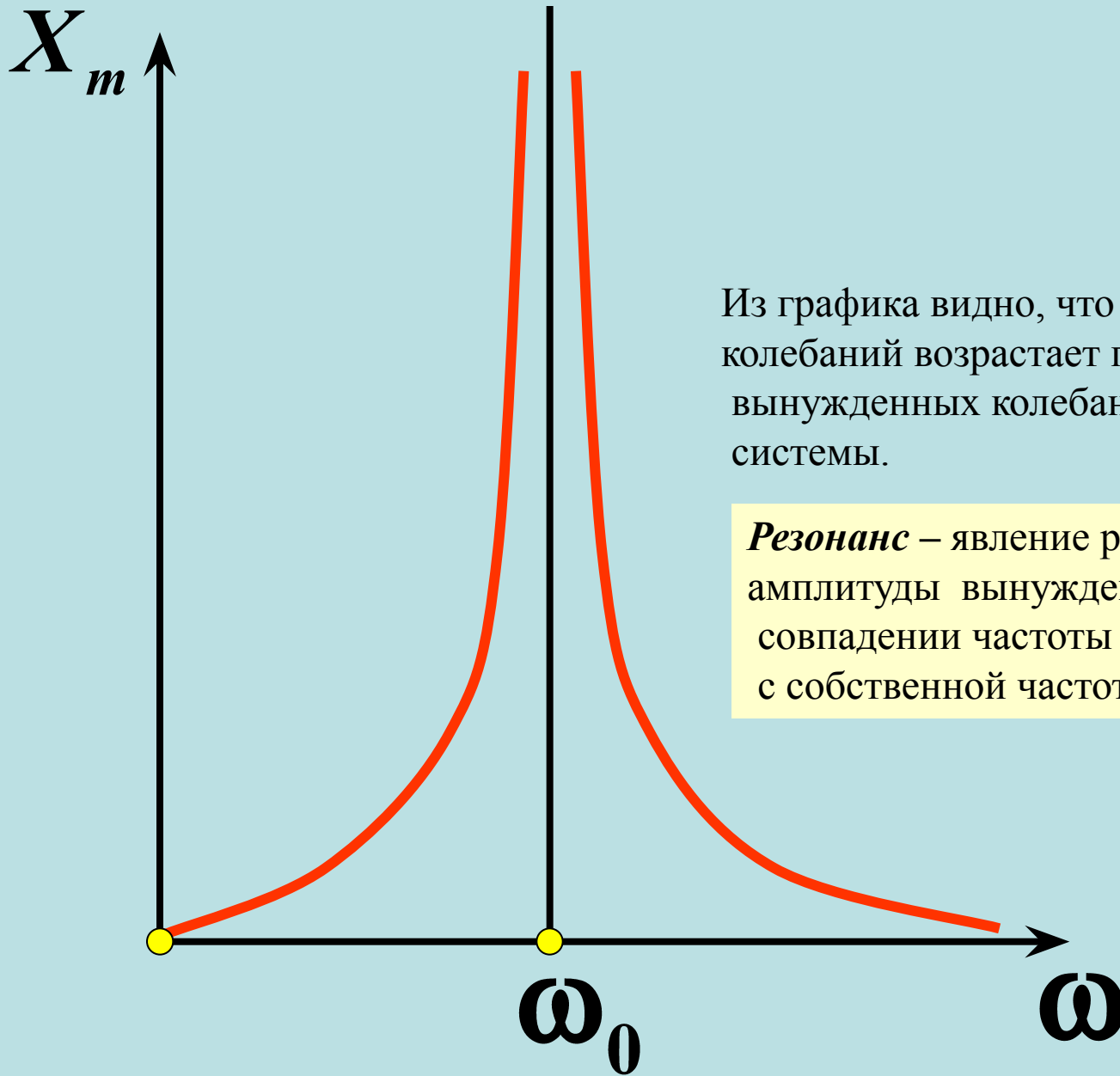
Вынужденными называются колебания совершаемые под действием внешней периодической силы. $F = F_m \sin \omega t$

Тогда дифференциальное уравнение затухающих колебаний примет вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{F_m}{m} \sin \omega t + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{Без учета затухания уравнение примет вид:}$$

$$-\omega^2 x - \frac{F_m}{m} \sin \omega t + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{отсюда } x = \boxed{\frac{F_m / m}{\omega_0^2 - \omega^2}} \sin \omega t$$

Из чего видно, что амплитуда вынужденных колебаний зависит от соотношения частот вынужденных колебаний и собственной частоты системы

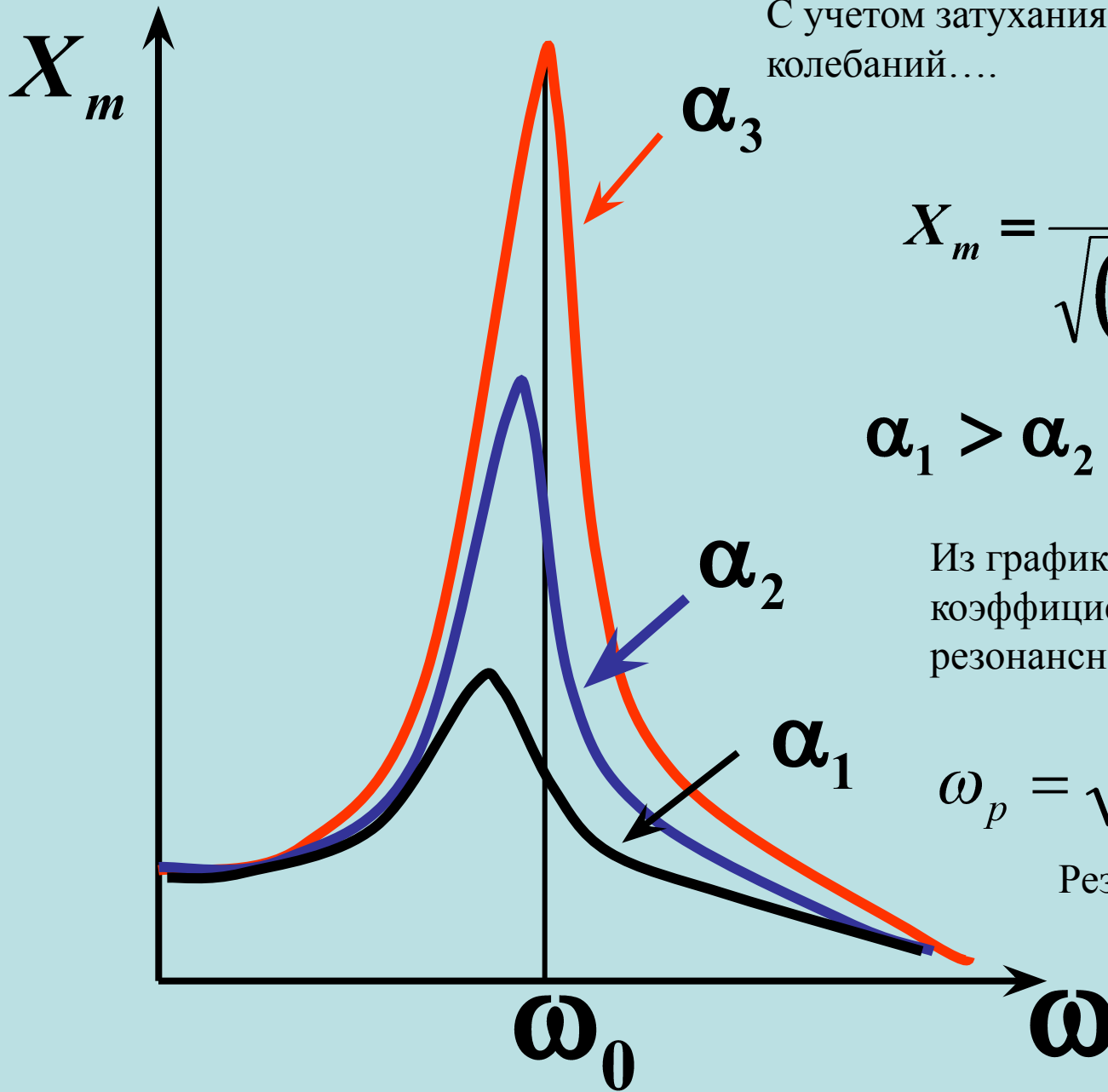


$$X_m = \frac{F_m / m}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Из графика видно, что амплитуда вынужденных колебаний возрастает при приближении частоты вынужденных колебаний к собственной частоте системы.

Резонанс – явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при совпадении частоты вынужденных колебаний с собственной частотой системы.

С учетом затухания амплитуда вынужденных колебаний....



$$X_m = \frac{F_m / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}}$$

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$$

Из графика видно, что чем больше коэффициент затухания, тем меньше резонансная амплитуда

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}$$

Резонансная частота