Математика, часть 2

Корреляционный анализ данных

Лекция № 9

Система двух и более случайных величин

Данные, содержащими две или **n** случайных величин называются
- **двумерными**
- **n - мерными**

(X, Y) - **Обозначение двумерной случайной величины**

X, Y – составляющие или компоненты случайной величины (X, У).

Примеры ДСВ:

- ***геологическая проба руды, содержащая золото – X и серебро – Y***
- результаты геохимического опробования образцов железорудного месторождения, где кроме содержания железа определяется содержание марганца, титана, висмута, ванадия и других компонентов.

Необходимо различать
- **дискретные случайные величины**
- **непрерывные случайные величины**

$$\overline{Z}$$

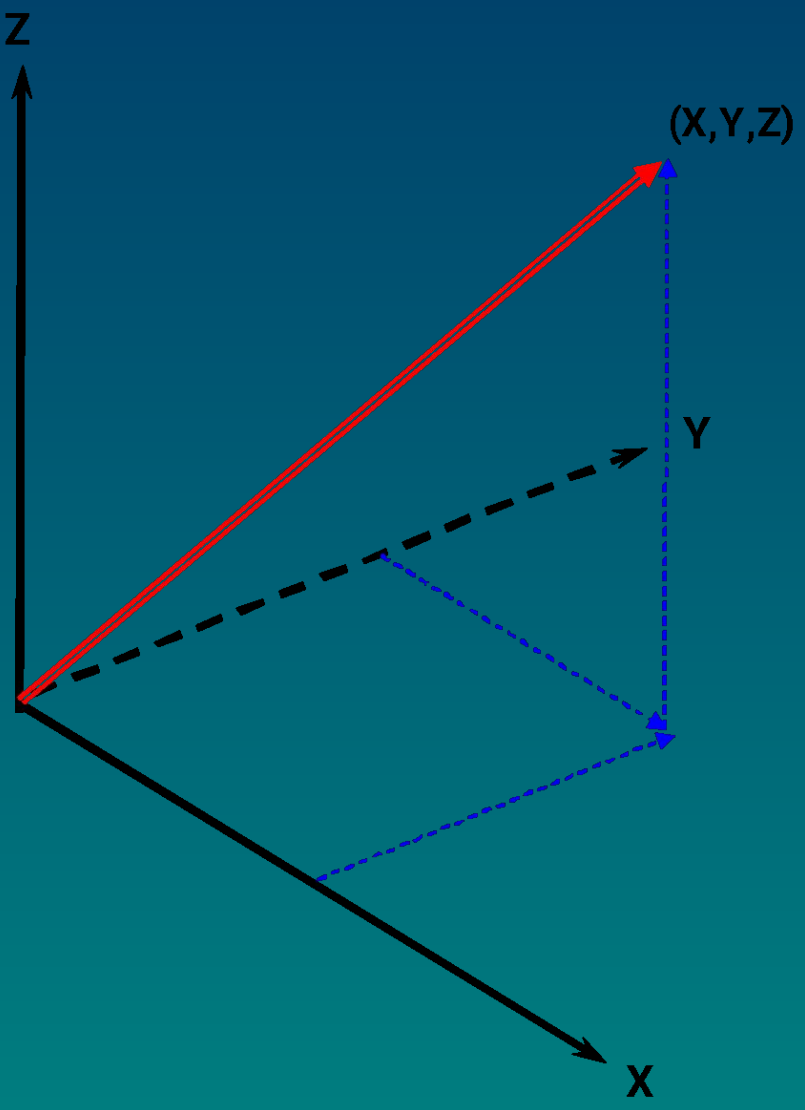
Изображение системы из двух случайных ведичин

Графически систему из двух случайных величин X_1 и Y_1 можно представить случайной точкой на плоскости XOY с координатами X_1 и Y_1 .

Изображение системы из трёх случайных величин

Трёхмерная случайная величина изображается

1. **точкой в трёхмерном пространстве с координатами X,Y,Z**
2. **вектором.**



2 задачи корреляционного анализа

1. *определение формы* корреляционной зависимости, иначе говоря, необходимо установить какой вид имеет функция регрессии (линейную или нелинейную)
2. *оценка силы (тесноты)* корреляционной связи с помощью коэффициента корреляции.

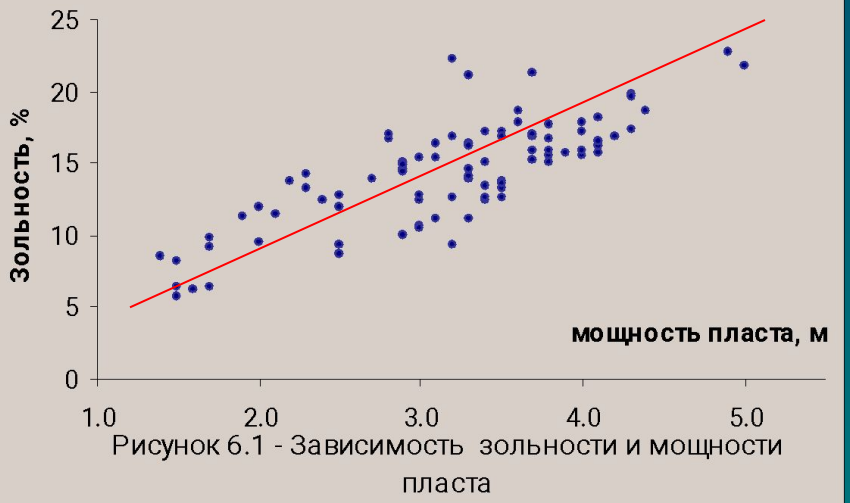


Рисунок 6.1 - Зависимость зольности и мощности пласта

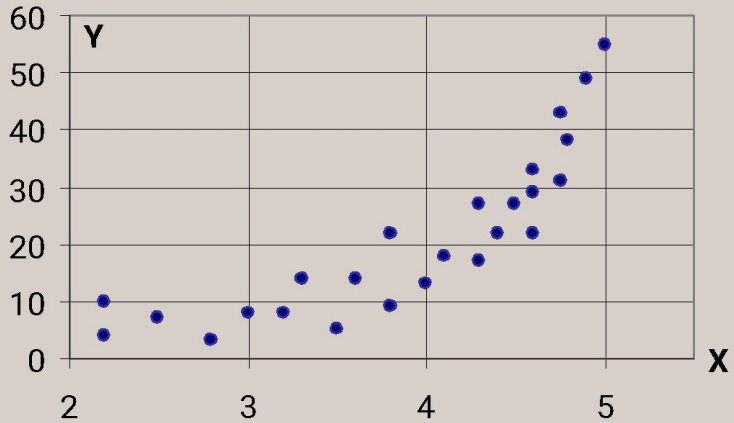


Рисунок 6.2 - Нелинейная зависимость

Закон распределения дискретной двумерной СВ

1. *Законом распределения* дискретной двумерной случайной величины называют перечень возможных значений этой величины (т. е. пар чисел $(x_i$ и $y_j)$ и их вероятностей $p(x_i, y_j)$ (i=l, 2, ..., n; j=1, 2, ..., *m).* Обычно закон распределения задают в виде таблицы с двойным входом

Y \ X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$		$p(x_i, y_1)$		$p(x_n, y_1)$
...	...	...	...	...	...	...
y_j	$p(x_1, y_j)$	$p(x_2, y_j)$	...	$p(x_i, y_j)$	...	$p(x_n, y_j)$
...	...	...	...	...	...	...
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	...	$p(x_i, y_m)$	...	$p(x_n, y_m)$

Интегральная функция распределения дискретной двумерной СВ

1. *Интегральной функцией распределения* двумерной случайной величины (X, Y) называют функцию *F(x, y)*, определяющую для каждой пары чисел ***x, y*** вероятность того, что X примет значение, меньшее *x* и при этом *Y* примет значение, меньшее *y:*

2. $$F(x, y)=P(X<x,\ \ Y<y),$$

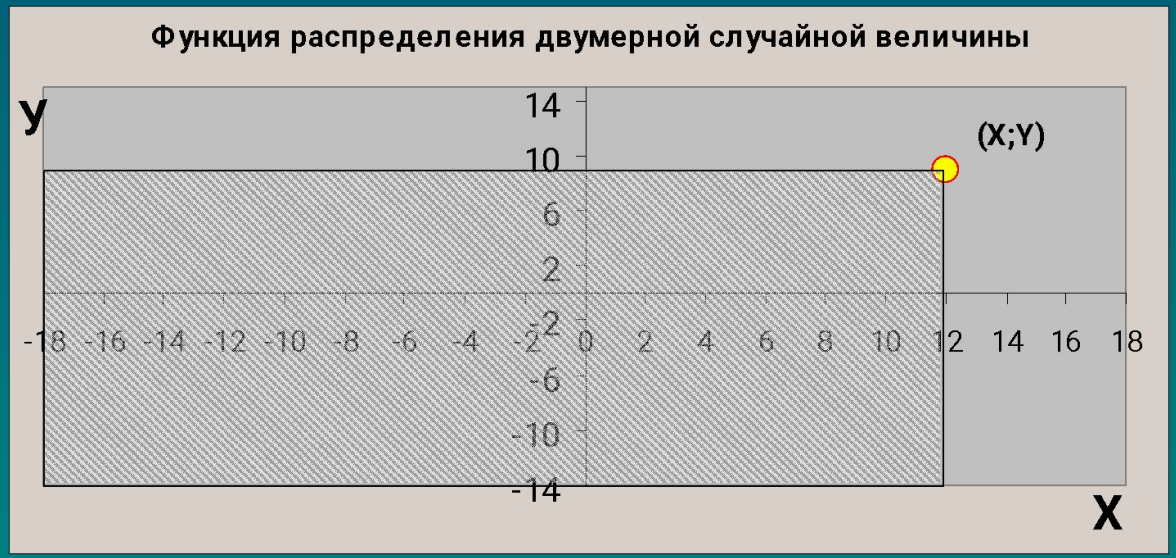
Свойства интегральной функции распределения двумерной СВ

1. **Свойство 1.** *Значения интегральной функции удовлетворяют двойному неравенству*

$$0 \le F(x, y) \le 1$$

2. **Свойство 2.** *F(x, y) есть неубывающая функция по каждому аргументу*

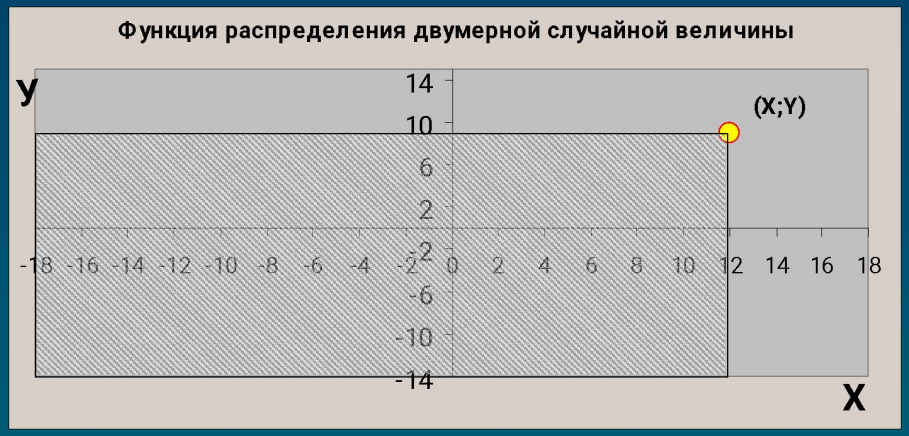
$$F(x_2, y) \geqslant F(x_1, y), \text{ если } x_2 > x_1;$$
$$F(x, y_2) \geqslant F(x, y_1), \text{ если } y_2 > y_1.$$



Свойства интегральной функции распределения двумерной СВ

3. *Свойство 3. Имеют место предельные соотношения:*

$$1)\ F(-\infty,\ y)=0,$$
$$2)\ F(x,\ -\infty)=0,$$
$$3)\ F(-\infty,\ -\infty)=0,$$
$$4)\ F(\infty,\ \infty)=1.$$



4. *Свойство 4.*

а) При y=□ интегральная функция системы становится интегральной функцией составляющей X:

$$F(x,\ \square)=F_1(x).$$

б) При x= □ интегральная функция системы становится интегральной функцией составляющей Y:,

$$F(\infty,\ y)=F_2(y).$$

Свойства интегральной функции распределения двумерной СВ

$$P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) =$$

$$= [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)]$$

Двумерная плотность вероятности

Дифференциальной функцией распределения f(x, y) **двумерной непрерывной случайной величины *(X, Y)* называют вторую смешанную частную производную от интегральной функции:**

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x * \partial y}$$

Геометрически эту функцию можно истолковать как поверхность, которую называют *поверхностью распределения.*

Зная дифференциальную функцию *f(x, y),* можно найти интегральную функцию *F(x, y)* по формуле

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,dx\,dy,$$

Свойства дифференциальной функции распределения

1. **Свойство 1**. ***Дифференциальная функция неотрицательна:***

$$f(x, y) \geqslant 0.$$

2. **Свойство 2.** ***Двойной несобственный интеграл с бесконечными пределами от дифференциальной функции равен единице:***

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1.$$

Отыскание дифференциальных функций

$$f_1(x) = \frac{d F_1(x)}{dx}.$$

$$\frac{dF_1}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy,$$

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy.$$

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x, y)\, dx\, dy$$

$$F_1(x) = F(x, \infty)$$

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy.$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$$

Зависимые и независимые СВ

две случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина.

Теорема. *Для того чтобы случайные величины* X и У *были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы интегральная функция системы (X, Y) была равна произведению интегральных функций составляющих:*

$$F(x,\ y) = F_1(x) \cdot F_2(y).$$

Следствие. *Для того чтобы непрерывные случайные величины X и У были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы дифференциальная функция системы (X, Y) была равна произведению дифференциальных функций составляющих:*

$$f(x,\ y) = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Корреляционный момент

Корреляционным моментом μ_{xy} случайных величин *X и Y* называют математическое ожидание произведения отклонений этих величин:

$$\mu_{xy} = M[(X - M(X))(Y - M(Y))].$$

Для вычисления корреляционного момента дискретных величин пользуются формулой

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - M(X))(y_j - M(Y))\, p(x_i, y_j).$$

а для непрерывных

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))(y - M(Y))\, f(x, y)\, dx\, dy.$$

Теорема. *Корреляционный момент двух независимых случайных величин X и Y равен нулю.*

$$\mu_{xy} = M[(X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))] =$$

$$= M[X - M(X)] \cdot M[Y - M(Y)] = 0.$$

Коэффициент корреляции. Зависимые СВ

Две случайные величины могут быть связаны между собой функциональной зависимостью, статистической либо независимыми между собой.

Строгая функциональная зависимость случайных величин X и Y встречается крайне редко и может быть записана, например, в виде:

$$Y = aX + b \qquad (6.1)$$

Эта запись означает, что каждому значению X соответствует только одно значение У. Функциональную зависимость можно ещё назвать теоретической.

Как правило, случайные величины подвержены влиянию не одного фактора, а целого набора случайных факторов. В результате одному значению X соответствует не одно, а множество значений Y. Это множество называется законом распределения случайной величины Y. В таком случае говорят о *статистической (корреляционной) зависимости*, при которой изменение случайной величины X вызывает изменение некоторых параметров *распределения* другой - Y, в частности, среднего значения $\overline{Y}$.

Пример корреляционной зависимости

Пример случайной величины Y, которая не связана с величиной X функционально, а связана корреляционно.

Одинаковые по форме образцы руды с одинаковым содержанием полезного компонента X характеризуются разной плотностью. Это объясняется тем, что на плотность образца породы, кроме удельного веса полезного компонента, влияют такие *случайные* факторы, как разная пористость, разное количество включений других минералов и др.

Таким образом, *конкретная* плотность Y руды не связана функционально с *конкретным* содержанием полезных компонентов. Однако практика показывает, что на полиметаллических месторождениях (свинцово-цинковых) *в среднем* на плотность руды Y влияет суммарное содержание свинца и цинка в пробе X, т.е. плотность Y связана с X корреляционной зависимостью.

Условные средние

Условным средним $\bar{y}_x$ называют среднее арифметическое значений Y, соответствующих значению случайной величины $X = x$.

Допустим, что в процессе эксперимента мы отобрали 3 образца с одинаковым значением содержания и определили плотность каждого из них. Так для содержания $x_1 = 35\%$ получены три значения плотности $y_1 = 3.30$ т/м^3, $y_2 = 3.26$ т/м^3, $y_3 = 3.28$ т/м^3. Среднее арифметическое значение плотности определяется по формуле 3.2 и будет равно:

$$\bar{y}_{35} = \frac{3.30 + 3.26 + 3.28}{3} = 3.28.$$

Число $\bar{y}_{35}$ называется *условным* средним, чёрточка над буквой служит обозначением среднего арифметического, цифра 35 означает, что рассматриваются только те значения плотности Y, которые соответствуют содержанию полезных компонентов в образце породы $x_1 = 35\%$.

Корреляционная зависимость

Если каждому значению x соответствует одно значение условной средней $\bar{y}_x$, то считается, что случайная величина Y зависит от X корреляционно.

Корреляционной зависимостью Y от X называют функциональную зависимость условной средней $\bar{y}_x$ от x:

$$\bar{y}_x = f(x), \qquad (5.1)$$

а уравнение (5.1) *уравнением регрессии* Y по X. Функция $f(x)$ называется *регрессией* Y по X, а её график - *линией регрессии* Y по X.

Поскольку случайные величины X, Y связаны корреляционно, то по аналогии можно определить корреляционную зависимость X по Y. Все вышеприведённые определения будут справедливы для данного случая, если в определениях поменять местами случайные величины X, Y.

Числовые характеристики СВ

Начальным моментом порядка k, s называется математическое ожидание произведения соответствующих степеней случайных величин:

$$m_{k,s} = M\left[X^k Y^s\right] \tag{6.13}$$

Для дискретных случайных величин выражение 6.13 имеет вид:

$$m_{k,s} = \sum_i \sum_j x^k y^s p_{i,j} \quad , \tag{6.14}$$

где: $p_{i,j} = P\left[(X = x_i)(Y = y_j)\right]$ - вероятности.

Для непрерывных случайных величин начальный момент порядка k, s запишется:

$$m_{k,s} = \int_{\infty} x^k y^s f(x, y)dxdy \tag{6.15}$$

где: $f(x, y)$ - плотность распределения системы двух случайных величин.

Числовые характеристики СВ

Центральным моментом порядка k,s называется математическое ожидание соответствующих степеней центрированных случайных величин $\overline{X},\overline{Y}$:

$$\mu_{k,s} = M\left[\overline{X}^{k}\overline{Y}^{s}\right] = M\left[\left(X - m_{1,0}\right)^{2}\left(Y - m_{0,1}\right)^{2}\right], \qquad (6.16)$$

где: $m_{1,0}, m_{0,1}$ - математические ожидания случайных величин X,Y.

(второй смешанный центральный момент).

$$\mu_{11} = K_{xy} = m_{11} - m_{10}m_{01}, \qquad (6.17)$$

и далее – коэффициент корреляции:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{20}\mu_{02}}} = \frac{m_{11} - m_{10}m_{01}}{\sigma_x\sigma_y}, \qquad (6.18)$$

где: μ_{20} - дисперсия случайной величины X;

μ_{02} - дисперсия случайной величины Y;

σ_x,σ_y - стандарты СВ X,Y; $\sigma_x = \sqrt{\mu_{20}}$, $\sigma_y = \sqrt{\mu_{02}}$.

Числовые характеристики СВ

Дисперсия для случайных величин X, Y вычисляется по следующим формулам:

$$\mu_{20} = m_{20} - m_{10}^2 \qquad (6.19)$$

$$\mu_{02} = m_{02} - m_{01}^2 \qquad (6.20)$$

Сила связи между X, Y оценивается при помощи выборочного коэффициента корреляции r_{xy}:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_x \sigma_y}, \qquad (6.2)$$

где: μ_{11} - второй смешанный центральный (корреляционный) момент;

σ_x, σ_y - стандарты (СКО) по x и y соответственно

Числовые характеристики СВ

Корреляционный момент K_{xy}, или его ещё называют *моментом связи*, вычисляется по одной их двух равноценных формул:

$$K_{xy} = \mu_{11} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N} \qquad (6.3)$$

$$K_{xy} = \mu_{11} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{N} - \bar{x} * \bar{y} \; . \qquad (6.4)$$

Выборочное уравнение регрессии (Y по X) имеет вид:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}) \; . \qquad (6.5)$$

Уравнение регрессии

Обычно в таком виде уравнение 6.5 не применяется, поэтому его приводят к линейному виду 6.1. Угловой коэффициент a и свободный член b можно определить из выражений:

$$a = r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \tag{6.6}$$

$$b = \bar{y} - r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\bar{x} \tag{6.7}$$

Окончательно уравнение регрессии (Y по X): $\bar{y}_x = ax + b$. Выборочное уравнение регрессии (X по Y) представлено формулой 6.8, но его, как и выражение 6.5, тоже приводят к линейному виду $\bar{x}_y = a'y + b'$.

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y}) \tag{6.8}$$

Погрешность коэффициента корреляции

Погрешность определения коэффициента корреляции σ_r зависит от объёма выборки из генеральной совокупности. С увеличением объёма выборки погрешность будет уменьшаться. Эта зависимость выражается следующей формулой:

$$\sigma_r = \frac{1 - r_{xy}^2}{\sqrt{N}} . \qquad (6.9)$$

Надёжность коэффициента корреляции оценивается при помощи следующего отношения:

$$\varphi = \frac{|r_{xy}|}{\sigma_r} . \qquad (6.10)$$

Если $\varphi \geq 3$ то, согласно теореме Ляпунова с вероятностью P=0,997 можно утверждать, что связь между изучаемыми случайными величинами надёжная и наоборот.

Числовые характеристики СВ

Чтобы оценить точность уравнения регрессии определяют среднее квадратичное отклонение предсказанных значений $\bar{y}_x$ от исходных y_i. Это можно выполнить по одной из двух формул:

$$\sigma_{y/x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \bar{y}_{x_i}\right)^2}{N}}, \qquad (6.11)$$

$$\sigma_{y/x} = \sigma_y \sqrt{1 - r_{xy}^2}. \qquad (6.12)$$

Корреляционный анализ при большом числе данных

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3.2 * \lg N}$$

$$\Delta y = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{1 + 3.2 * \lg N}$$

1. **Вычисляют классовый интервал по формуле Стержеса**
2. Строят корреляционную решётку
3. Заносят все пары исходных данных в корреляционную решётку
4. Находят суммы, суммы произведений
5. Вычисляют средние и стандарты для X и У, корреляционный момент и коэффициент корреляции
6. Рассчитывают уравнения регрессии, СГО
7. Выполняют оценку точности найденного уравнения регрессии

Корреляционная решётка

Таблица 6.3 Корреляционная решётка

		Условное значение класса α_x											
		-3	-2	-1	0	1	2	3	4				
α_y	Классы (x / y)	28,2 – 33,8	33,8 – 39,4	39,4 – 45,0	45,0 – 50,6	50,6 – 56,2	56,2 – 61,8	61,8 – 67,4	67,4 – 73,0	n_y	$n_y \alpha_y$	$n_y \alpha_y^2$	$\sum n_{xy} \alpha_x \alpha_y$
-3	3,12 – 3,32	14 *126*	5 *30*							19	-57	171	156
-2	3,32 – 3,52	3 *18*	9 *36*	9 *18*	1 *0*					22	-44	88	72
-1	3,52 – 3,72				6 *0*	1 *-1*				7	-7	7	-1
0	3,72 – 3,92				2 *0*	10 *0*				12	0	0	0
1	3,92 – 4,12					5 *5*	3 *6*			8	8	8	11
2	4,12 – 4,32					1 *2*	7 *28*	5 *30*	1 *8*	14	28	56	68
3	4,32 – 4,52						1 *6*	10 *90*	4 *48*	15	45	135	144
4	4,52 – 4,72							1 *12*	2 *32*	3	12	48	44
n_x		17	14	9	9	17	11	16	7	100	-15	513	494
$n_x \alpha_x$		-51	-28	-9	0	17	22	48	28	27			
$n_x \alpha_x^2$		153	56	9	0	17	44	144	112	535			
$\sum n_{xy} \alpha_x \alpha_y$		144	66	18	0	6	40	132	88	494			

Расчёт начальных моментов

Средние значения для случайных величин X и Y определяются из выражений:

$$m_{10} = x_0 + m'_{10} * \Delta x \qquad (6.21)$$

$$m_{01} = y_0 + m'_{01} * \Delta y \qquad (6.22)$$

Первые условные начальные моменты вычисляются по следующим формулам:

$$m'_{10} = \frac{\sum n_x \alpha_x}{N}, \qquad m'_{01} = \frac{\sum n_y \alpha_y}{N}, \qquad (6.23)$$

где: N – количество пар значений X, Y.

Чтобы получить $\sum n_x \alpha_x$, необходимо умножить число попавших значений n_x в класс на его условное значение α_x и просуммировать.

Расчёт вторых условных начальных моментов

Вторые условные начальные моменты в соответствии с их определением найдутся из следующих выражений:

$$m'_{20} = \frac{\sum n_x \alpha_x^2}{N}, \qquad m'_{02} = \frac{\sum n_y \alpha_y^2}{N} \tag{6.24}$$

Дисперсию и стандарты (СКО) удобнее вычислять через вторые условные центральные моменты:

$$D_x = \mu_{20} = \left(m'_{20} - m'^{\,2}_{10}\right) * \Delta x^2, \qquad D_y = \mu_{02} = \left(m'_{02} - m'^{\,2}_{01}\right) * \Delta y^2 \tag{6.25}$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}, \qquad \sigma_y = \sqrt{D_y} \tag{6.26}$$

Расчёт вторых условных начальных моментов

Коэффициент корреляции для принятого способа обработки вычисляют через условные начальные моменты и условные стандарты σ'_x, σ'_y по формуле:

$$r_{xy} = \frac{m'_{11} - m'_{10} m'_{01}}{\sigma'_x \sigma'_y}, \qquad (6.27)$$

где: m'_{11} - второй смешанный условный начальный момент:

$$m'_{11} = \frac{\sum n_{xy} \alpha_x \alpha_y}{N}. \qquad (6.28)$$

Пример

Вычислим коэффициент корреляции по данным табл. 6.3.

$$r_{xy} = \frac{\frac{494}{100} - \frac{27}{100} * \frac{-15}{100}}{2.30 * 2.26} = 0.959$$

Погрешность и значимость коэффициента корреляции определим по формулам 6.9, 6.10:

$$\sigma_r = \left(1 - 0.959^2\right) / \sqrt{100} = 0.008 \qquad \varphi = \left|0.959\right| / 0.008 = 120$$

На основании этих расчётов делаем следующие выводы:

Зависимость между содержанием железа и плотностью руды существенная, так как $r_{xy} > 0.5$;

Коэффициент корреляции вычислен надёжно, поскольку $\varphi > 3$;

Пример

Можно составить уравнение регрессии $\bar{y}_x = f(x)$.

$$\bar{y}_x - 3.79 = 0.959 \frac{0.45}{12.86}(x - 49.37).$$

После упрощений и преобразований будем иметь:

$$\bar{y}_x = 0.033707 * x + 2.12602 \qquad (6.29)$$

Уравнение регрессии X по Y получим из выражения 6.8:

$$\bar{x}_y = 27.30377 * y - 54.1153 \qquad (6.30)$$