

Введение в асимптотические методы.

Лекция 2

Асимптотические разложения

1. СХОДИМОСТЬ

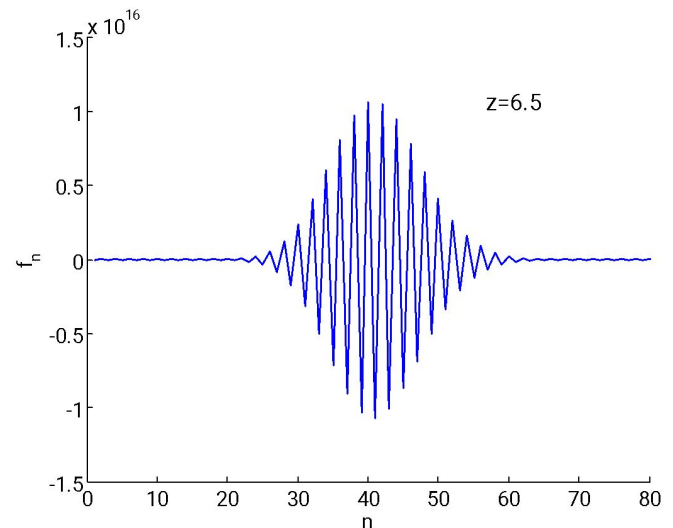
Ряд $\sum_n f_n(z)$ **сходится** при фиксированном z если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0(z, \varepsilon) : \forall M, N > N_0 \quad \left| \sum_{n=M}^N f_n(z) \right| < \varepsilon$$

Свойство сходимости не столь полезно на практике как принято думать:

$$\begin{aligned} \operatorname{Erf}(z) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^{2n}}{n!} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)n!} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{10} - \frac{z^7}{42} + \frac{z^9}{216} - \dots \right) \end{aligned}$$

Точность 10^{-5}	$z = 1$	$n = 8$
	$z = 2$	$n = 16$
	$z = 3$	$n = 31$
	$z = 7$	$n = 98$



2. АСИМПТОТИЧНОСТЬ

Альтернативное выражение для Erf при больших z :

$$\operatorname{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2} dt$$

Интегрирование
по частям:

$$\int_z^\infty e^{-t^2} dt = - \int_z^\infty \frac{de^{-t^2}}{2t} = \frac{e^{-z^2}}{2z} - \int_z^\infty \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt = \dots$$

Ряд расходится



$$= \frac{e^{-z^2}}{2z} \left(1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2z^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2z^2)^3} + \dots \right)$$

Точность 10^{-5}

$$z = 2.5 \quad n = 3$$

$$z > 3 \quad n = 2$$

$$\operatorname{Erf}(z) = 1 - \frac{e^{-z^2}}{2z} \left(1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2z^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2z^2)^3} + O(z^{-8}) \right)$$

Это разложение обладает тем важным свойством, что (при больших z) главный член дает очень хорошее приближение, а последующие члены все в меньшей и меньшей степени его корректируют. Такого сорта разложения называют асимптотическими. Более конкретно, в данном случае мы имеем дело с асимптотическим разложением функции $\operatorname{Erf} z$ по степеням z^{-k} при $z \rightarrow \infty$

3. Асимптотичность и сходимость

Идеология работы с асимптотическими разложениями в корне отличается от работы со сходящимися рядами.

❑ **Сходимость** требует, чтобы при $n \rightarrow \infty$ члены ряда быстро убывали. Не обязательно сразу, рано или поздно.

❑ **Асимптотичность** требует чтобы уже главный член был хорошим приближением при $z \rightarrow \infty$. Поэтому, как правило, он вполне достаточен, если нас интересует указанная асимптотика. Лишь в том случае, когда он тривиален (как в рассмотренном примере) нужен следующий член.

Определенные проблемы возникают, если значение z не достаточно велико. Добавка нескольких дополнительных членов в этом случае оказывается полезной. **Общим правилом** является ограничение их количества требованием того, чтобы **следующий член разложения был меньше предыдущего**.

4. Определения: Асимптотическая последовательность

Последовательность функций $\delta_0(z), \delta_1(z), \dots$ называется *асимптотической последовательностью* при $z \rightarrow a$, если при всех

$$z \rightarrow a: \quad \delta_{n+1} / \delta_n \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta_{n+1} = o(\delta_n)$$

Примеры

$$1, z, z^2, z^3, \dots \quad z \rightarrow 0$$

$$1, z^{1/2}, z^1, z^{3/2}, \dots \quad z \rightarrow 0$$

$$1, z^{-1}, z^{-2}, z^{-3}, \dots \quad z \rightarrow \infty$$

5. Определения: Асимптотическое разложение

Говорят, что функция $f(z)$ имеет **асимптотическое разложение** по последовательности $\delta_0(z), \delta_1(z), \dots$, если существуют константы $c_0, c_1, \dots$ такие что, для каждого $n < N$

$$f(z) - \sum_{k=0}^n c_k \delta_k(z) = o(\delta_n(z)) \quad z \rightarrow a$$

В этом случае пишут $f(\varepsilon) \asymp \sum_{n=0}^N c_n \delta_n(\varepsilon)$

Если $N = \infty$ то говорят об **асимптотическом ряде**

6. Единственность

Если асимптотическая последовательность фиксирована и асимптотическое разложение функции f существует, то константы c_k определяются однозначно.

$$\lim_{z \rightarrow a} \left[\frac{f(z) - \sum_0^n c_k \delta_k(z)}{\delta_n(z)} \right] = 0$$

$$\frac{f(z) - \sum_0^{n-1} c_k \delta_k(z)}{\delta_n(z)} = \frac{f(z) - \sum_0^n c_k \delta_k(z) + c_n \delta_n(z)}{\delta_n(z)} = c_n + \frac{f(z) - \sum_0^n c_k \delta_k(z)}{\delta_n(z)}$$

$$c_n = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta_k(z)}{\delta_n(z)}$$

7. AP не обязательно существует

При заданной асимптотической последовательности $\delta_0(z), \delta_1(z), \dots$ асимптотического разложения $f(z)$ может не существовать. Это выражается в том, что предела

$$c_n = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta_k(z)}{\delta_n(z)}$$

в этом случае нет (например, он равен бесконечности). Мы сталкивались с такой ситуацией на предыдущей лекции, когда пытались формально построить асимптотическое разложение

$$f = \frac{1 \pm \varepsilon^{1/2}}{1 - \varepsilon}$$

по целым степеням ε

Вывод: выбор «родной» асимптотической последовательности для данной функции является ответственным шагом при построения ее асимптотического разложения

8. Неединственность

Различные функции могут иметь одинаковое асимптотическое разложение по заданной асимптотической последовательности, равно как и заданная функция может иметь различные асимптотические разложения по разным асимптотическим последовательностям.

Примеры

$$\operatorname{tg}(\varepsilon) \asymp \varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon^3 + \frac{2}{15}\varepsilon^5$$

$$\asymp \sin \varepsilon + \frac{1}{2}(\sin \varepsilon)^3 + \frac{3}{8}(\sin \varepsilon)^5$$

$$\asymp \varepsilon \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\varepsilon\right) + \frac{31}{270}\left(\varepsilon \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\varepsilon\right)\right)^5$$

$$\exp(\varepsilon) \asymp \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

$$\exp(\varepsilon) + \exp(-\varepsilon^{-2}) \asymp \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!}$$

9. Операции над АР

- Можно складывать, вычитать, делить, умножать. При этом, возможно, придется расширить асимптотическую последовательность
- Можно подставлять одно АР в другое. При этом, однако, надо соблюдать осторожность.

$$f(z) = \exp(z^2) \quad f(z(\varepsilon)) = \exp(\varepsilon^{-2} + 2 + \varepsilon^2) \approx \exp(\varepsilon^{-2})e^2 (1 + \varepsilon^2 + \dots)$$

$$z = \varepsilon + \varepsilon^{-1} \quad f(z(\varepsilon)) \neq f(\varepsilon^{-1}) \approx \exp(\varepsilon^{-2})$$

- Можно интегрировать.
- В общем случае нельзя дифференцировать.

Трудности приходят от членов типа $\varepsilon \cos(\varepsilon^{-1})$ которые при дифф-ии дают не ожидаемые $O(1)$ а $O(\varepsilon^{-1})$. Это не аналитические члены. Если $f(\varepsilon)$ аналитична в некотором секторе ε -плоскости, то в этом секторе **можно диф-ть**

10. Еще раз о терминологии.

$$\left[\begin{array}{l} f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon)) \\ f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon)) \\ f(\varepsilon) \asymp g(\varepsilon) \\ f(\varepsilon) \propto g(\varepsilon) \end{array} \right. \quad \text{если} \quad \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} \quad \left[\begin{array}{l} \text{ограничено} \\ \rightarrow 0 \\ \rightarrow 1 \\ \rightarrow C \quad (C \neq 0, \pm\infty) \end{array} \right. \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

11. Разложения, зависящие от параметра

В данном курсе мы будем рассматривать главным образом функции двух (или большего числа) переменных $f(x, \varepsilon)$, изучая их асимптотическое поведение, когда одна из переменных, ε , мала. В типичных ситуациях $f(x, \varepsilon)$ удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению по отношению к x , а ε выступает в роли параметра задачи.

Естественное обобщение определения асимптотического разложения

$$f(x, \varepsilon) \sim \sum c_k(x) \delta_k(\varepsilon)$$

Если это разложение равномерно пригодным для всех x из области определения этой переменной, то говорят о **регулярном** (или **равномерно пригодном**), в противном случае – о **сингулярном** (или **неравномерно пригодном**) разложении.

12. Пример 1: внешнее разложение

$$f(x, \varepsilon) = \frac{1}{1 + x + \varepsilon + e^{-x/\varepsilon}}, \quad x \geq 0$$

«естественное» асимптотическое представление f при $x = O(1)$

$$f(x, \varepsilon) \sim \frac{1}{1+x} \left(1 - \frac{\varepsilon}{1+x} + \dots \right) \quad \begin{array}{l} \text{на самом деле верно при} \\ x \gg \varepsilon \end{array}$$

совершенно неверный результат в малой окрестности $x = 0$

$$f(0, \varepsilon) \sim 1 - \varepsilon + \dots \qquad f(0, \varepsilon) = \frac{1}{2 + \varepsilon} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\varepsilon + \dots$$

типичное сингулярное разложение, которое, как говорят,
«разваливается» в окрестности нуля

13. Пример 1: внутреннее разложение

$$f(x, \varepsilon) = \frac{1}{1 + x + \varepsilon + e^{-x/\varepsilon}}, \quad x \geq 0$$

причина сингулярности – в том, что предположение о малости ε по сравнению с x несправедливо при малых x . Оно нарушается, когда x есть величина порядка ε

Перенормировка $X = x / \varepsilon$

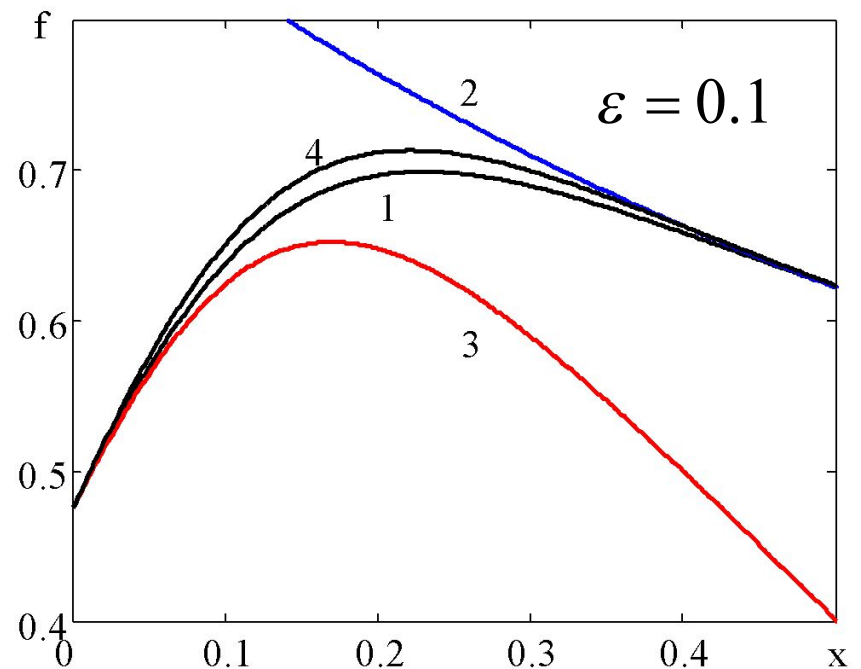
$$f(x, \varepsilon) \equiv F(X, \varepsilon) = \frac{1}{1 + e^{-X} + \varepsilon(1 + X)}$$

$$F(X, \varepsilon) \approx \frac{1}{1 + e^{-X}} \left(1 - \frac{\varepsilon(1 + X)}{1 + e^{-X}} + \dots \right) \quad \text{на самом деле верно при}$$
$$\varepsilon X \ll 1 \Leftrightarrow x \ll 1$$

14. Пример 1: вывод

$$f(x, \varepsilon) = \frac{1}{1 + x + \varepsilon + e^{-x/\varepsilon}}, \quad x \geq 0$$

□ Параметрическое разложение во многих практически важных задачах не является равномерно пригодным; в этом случае приходится конструировать несколько асимптотических разложений, каждое из которых пригодно на своем интервале изменения параметра



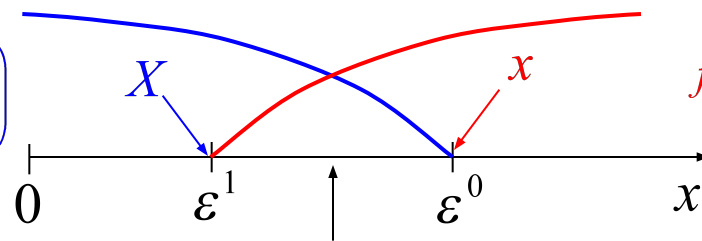
1 – точное решение, 2 – внешнее разложение, 3 – внутреннее разложение

15. Область перекрытия и промежуточная переменная

$$X = x/\varepsilon$$

$$f(x, \varepsilon) = \frac{1}{1 + x + \varepsilon + e^{-x/\varepsilon}}, \quad x \geq 0$$

$$F(X, \varepsilon) \approx \frac{1}{1 + e^{-X}} \left(1 - \frac{\varepsilon(1+X)}{1 + e^{-X}} + \dots \right)$$



$$f(x, \varepsilon) \approx \frac{1}{1 + x} \left(1 - \frac{\varepsilon}{1 + x} + \dots \right)$$

промежуточная переменная

$$\chi = x/\delta \quad \varepsilon \ll \delta \ll 1$$

$$\delta(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \varepsilon/\delta(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

$$F \approx \frac{1}{1 + e^{-\delta\chi/\varepsilon}} \left(1 - \frac{\varepsilon(1 + \delta\chi/\varepsilon)}{1 + e^{-\delta\chi/\varepsilon}} \right) \approx$$

$$\approx 1 - \delta\chi - \varepsilon$$

$$f \approx \frac{1}{1 + \delta\chi} \left(1 - \frac{\varepsilon}{1 + \delta\chi} \right) \approx$$

$$\approx (1 - \delta\chi + \dots)(1 - \varepsilon(1 - \delta\chi + \dots)) \approx$$

$$\approx 1 - \delta\chi - \varepsilon$$

Внешнее и внутреннее разложения идентичны в области перекрытия

16. Сращивание разложений

$$f(x, \varepsilon) = \frac{1}{1 + x + \varepsilon + e^{-x/\varepsilon}}, \quad x \geq 0$$

Внешнее и внутреннее разложения записываются одинаково при переходе к **любой** промежуточной переменной $\chi = x/\delta$ $\varepsilon \ll \delta \ll 1$
 Можно принять, например $\delta = \varepsilon^p$ $0 < p < 1$

Рассмотрим предельные случаи $p = 0, p = 1$

Рассматривая случай $p = 1$, мы должны во внешнем разложении положить $x = \varepsilon\chi$. Но это, то же самое, что перейти во внешнем разложении к внутренней переменной.

$$f \approx \frac{1}{1 + \varepsilon X} \left(1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon X} \right) \approx (1 - \varepsilon X + O(\varepsilon^2))(1 - \varepsilon + O(\varepsilon^2)) \approx 1 - \varepsilon(1 + X)$$

Аналогично при $p = 0$ во внутреннем разложении переходим к внешней переменной x

$$F \approx \frac{1}{1 + e^{-x/\varepsilon}} \left(1 - \frac{\varepsilon(1 + x/\varepsilon)}{1 + e^{-x/\varepsilon}} \right) \approx 1 - x - \varepsilon$$

Внешнее и внутреннее разложения **сращиваются** друг с другом

17. Принцип сращивания Ван Дайка

$E_1^{(n)}$ оператор, который дает n членов асимптотического представления функции $f(x, \varepsilon)$ для $x = O(1)$

$E_2^{(m)}$ оператор, который дает m членов асимптотического представления функции $F(X, \varepsilon)$ для $X = O(1)$

Функции $f(x, \varepsilon)$ и $F(X, \varepsilon)$ идентичны с некоторым множителем $\delta(\varepsilon)$

$$F(X, \varepsilon) \equiv f(\delta(\varepsilon)X, \varepsilon)$$

с некоторым множителем

$$E_2^{(m)} \left\{ \left(E_1^{(n)} f \right) (X, \varepsilon) \right\} \equiv E_1^{(n)} \left\{ \left(E_2^{(m)} F \right) (x, \varepsilon) \right\}$$

обе части при их сравнении, разумеется, должны быть записаны в терминах одной переменной

m -членное внутреннее разложение n -членного внешнего разложения должно совпадать с n -членным внешним разложением m -членного внутреннего разложения.

18. Пример применения

$$f(x, \varepsilon) = \sqrt{x + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{1+x}}, \quad x \geq 0 \quad n=3, m=2$$

1) Строим трехчленное разложение f при $x = O(1)$

$$E_1^{(3)} f \approx \sqrt{x} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2x} + \frac{\varepsilon^2}{8} \frac{(3x-1)}{x^2(1+x)} \right)$$

2) Строим 2-членное внутреннее разложение той же функции при

$$X = x/\varepsilon = O(1)$$

$$f(x, \varepsilon) \equiv F(X, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon(1+X) + \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon X}}, \quad E_2^{(2)} F \approx \sqrt{\varepsilon} \sqrt{1+X} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2(1+X)} \right)$$

3) Подставляем во внешнее разложение $x = \varepsilon X$ и проводим разложение полученного выражения по ε с удержанием 2-х главных членов

$$\begin{aligned} E_2^{(2)} \left\{ (E_1^{(3)} f)(X, \varepsilon) \right\} &= \sqrt{\varepsilon X} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2X\varepsilon} - \frac{\varepsilon^2}{8} \frac{(1-3X\varepsilon)}{\varepsilon^2 X^2 (1+X\varepsilon)} \right) \approx \\ &\approx \sqrt{\varepsilon X} \left(1 + \frac{1}{2X} - \frac{1}{8X^2} + \frac{\varepsilon}{2X} \right) \end{aligned}$$

19. Пример применения

$$f(x, \varepsilon) = \sqrt{x + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{1+x}}, \quad x \geq 0 \quad n = 3, m = 2$$

4) Подставляем во внутреннее разложение $X = x/\varepsilon$ и проводим разложение полученного выражения по ε с удержанием 3-х главных членов

$$\begin{aligned} E_1^{(3)} \left\{ (E_2^{(2)} F)(x, \varepsilon) \right\} &= \sqrt{\varepsilon} \sqrt{1 + \frac{x}{\varepsilon}} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2(1+x/\varepsilon)} \right) \boxtimes \sqrt{x} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2x} - \frac{\varepsilon^2}{8x^2} \right) \times \\ &\times \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2x} \right) \boxtimes \sqrt{x} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2x} + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (1)$$

5) Переходим в $E_2^{(2)} \left\{ (E_1^{(3)} f)(X, \varepsilon) \right\}$ от переменной X к переменной x

$$E_2^{(2)} \left\{ (E_1^{(3)} f)(X, \varepsilon) \right\} \Big|_{X=x/\varepsilon} = \sqrt{x} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2x} - \frac{\varepsilon^2}{8x^2} + \frac{\varepsilon^2}{2x} \right) \quad (2)$$

6) Убеждаемся в идентичности выражений (1) и (2).

20. Составное разложение

- $f_n(x, \varepsilon), F_m(X, \varepsilon)$ - внешнее и внутреннее разложения
 $g_{n,m}(x, \varepsilon)$ - их общая часть в области перекрытия

$\phi_{n,m}(x, \varepsilon) = f_n(x, \varepsilon) + F_m(x/\delta(\varepsilon), \varepsilon) - g_{n,m}(x, \varepsilon)$ составное (равномерно пригодное) разложение

Пример $f(x, \varepsilon) = \frac{1}{1+x+\varepsilon+e^{-x/\varepsilon}}, \quad x \geq 0 \quad n=2, m=2$

$$f \approx f_2(x, \varepsilon) \approx \frac{1}{1+x} \left(1 - \frac{\varepsilon}{1+x} \right), \quad x = O(1)$$

$$f \approx F_2(X, \varepsilon) \approx \frac{1}{1+e^{-X}} \left(1 - \frac{\varepsilon(1+X)}{1+e^{-X}} \right), \quad X = O(1)$$

$$g_{22} \approx 1 - x - \varepsilon$$

$$\phi_{2,2}(x, \varepsilon) = \frac{1}{1+x} \left(1 - \frac{\varepsilon}{1+x} \right) + \frac{1}{1+e^{-x/\varepsilon}} \left(1 - \frac{x+\varepsilon}{1+e^{-x/\varepsilon}} \right) - 1 + x + \varepsilon$$

21. Упражнения к лекции 2

1) Получите асимптотическое разложение при $x \rightarrow \infty$ и выясните, является оно сходящимся или расходящимся.

$$\text{si}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

2) Используйте интегрирование по частям для того, чтобы найти при $x \rightarrow \infty$ асимптотическое разложение интеграла

$$I(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt, \quad x > 0$$

Покажите, что разложение расходится. Получите оценку для остатка и используйте ее, чтобы найти число членов при данном x , минимизирующих погрешность вычисления $I(x)$

22. Упражнения к лекции 2

3) Найдите разложения при $\varepsilon \rightarrow 0$ с точностью до двух членов для данных ниже функций. Постройте составное разложение

$$f(x, \varepsilon) = \frac{x + \varepsilon + e^{-x/\varepsilon}}{1 + x + \varepsilon}, \quad f(x, \varepsilon) = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon(1+x)}{x + \varepsilon}}$$