

§7. Дисперсия дискретной случайной величины.

1. Отклонение случайной величины.

$X = X - E(X)$ - отклонение с. в. X от мат. ожидания.

2. Определение дисперсии.

Дисперсией с. в. X наз. число $D(X) = E(X - E(X))^2$.

Формула для вычисления дисперсии: $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$ (*);

Док-во.

$$\begin{aligned} a = E(X), \quad D(X) &= E(X - a)^2 = E(X^2 - 2aX + a^2) = E(X^2) - 2aE(X) + a^2 = \\ &= E(X^2) - 2a^2 + a^2 = E(X^2) - a^2 = E(X^2) - E^2(X); \end{aligned}$$

Пример.

3. Свойства дисперсии.

1) $D(X) \geq 0$;

2) $D(c) = 0$;

3. $D(cX) = c^2 D(X);$

- $D(cX) = E(c^2 X^2) - (E(cX))^2 = c^2 E(X^2) - (cE(X))^2 =$
 $= c^2 (E(X^2) - E^2(X)) = c^2 D(X);$

4. Если с.в. X и Y **независимы**, то $D(X+Y) = D(X) + D(Y);$

Док-во

$$\begin{aligned} D(X+Y) &= E(X+Y)^2 - E^2(X+Y) = E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X) + E(Y))^2 \\ &= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - E^2(X) - 2E(X)E(Y) - E^2(Y) = \\ &= E(X^2) - E^2(X) + E(Y^2) - E^2(Y) = D(X) + D(Y); \end{aligned}$$

Следствие 1. Для попарно независимых с.в. $X_1, X_2, \dots, X_k$

$$D\left(\sum_{l=1}^k X_l\right) = \sum_{l=1}^k D(X_l).$$

Следствие 2. Для любого числа c $D(X+c) = D(X);$

Следствие 3. Если с.в. X и Y **независимы**, то $D(X-Y) = D(X) + D(Y);$

$$D(X-Y) = D(X+(-Y)) = D(X) + D(-Y) = D(X) + (-1)^2 D(Y) = D(X) + D(Y).$$

Пример. С.в. X и Y - независимы, $D(X)=2$, $D(Y)=1$. Найти дисперсию

$$Z = 2X - 4Y + 7.$$

$$D(Z) = D(2X - 4Y + 7) = D(2X) + D(-4Y) + D(7) = 4D(X) + 16D(Y) = 24$$

4. Среднее квадратическое отклонение

Опр-е. Число $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ наз. средним квадратическим отклонением.

$$D(X) = \sigma^2(X) = \sigma^2.$$

Пример

Закон распределения с.в. X имеет вид

X	-2	-1	0	1	2
P	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

Вычислить $E(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P\{X \leq 0\}$, $P\{|X| \geq 2\}$

a) $E(X) = -0,4 - 0,3 + 0 + 0,1 + 0,2 = -0,4;$

b) $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$

	0	1	4
P	0,3	0,4	0,3

$$E(X^2) = 0 + 0,4 + 1,2 = 1,6$$

$$D(X) = 1,6 - (-0,4)^2 = 1,44; \quad \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1,44} = 1,2;$$

c) $P\{X \leq 0\} = P\{X = -2\} + P\{X = -1\} + P\{X = 0\} =$
 $= 0,2 + 0,3 + 0,3 = 0,8$

5. Центрированная и нормированная случайная величина

a) центрирование $\tilde{X} = X - E(X)$

b) Нормирование $Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ - стандартная с.в.

$$E(Z) = 0; \quad D(Z) = 1;$$

$$E(Z) = E\left(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma(X)} E(X - E(X)) = 0;$$

$$D(Z) = D\left(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma^2(X)} D(X - E(X)) = \frac{D(X)}{D(X)} = 1;$$

$$\cdot \quad \overset{\boxtimes}{X} = X - E(X) \quad \cdot$$

§ 8. Моменты случайной величины.

$k=1,2,\dots$

Опр.1. Моментом порядка k с.в. X наз.
число

$$\nu_k = E(X^k).$$

Опр.2. Центральным моментом порядка k с.в. X
наз. число

$$k=2 \quad \mu_k = E(X - E(X))^k.$$

$$\mu_2 = E(X - E(X))^2;$$

II. Основные законы распределения д.с.в.

§1. Биномиальный закон распределения.

1. Опр. С.в. **X** имеет биномиальное распределение с параметрами **n** и **p** , если она принимает значения $0, 1, \dots, n$ с вероятностями

$$P\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad \text{где } 0 < p < 1, \quad q = 1 - p, \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

X	0	1	2	...	n
$P\{X=m\}$	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$		p^n

$$\sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} = 1.$$

§ 2. Математическое ожидание и дисперсия с.в., распределенной по биномиальному закону.

Теорема. Пусть $X \in Bi(n, p)$.

Тогда $E(X)=np$, $D(X)=npq$, где $q=1-p$.

X - число успехов в n испытаниях Б. с вер. успеха p .

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i \text{ испытании наступил успех,} \\ 0, & \text{если в } i \text{ испытании наступила неудача.} \end{cases}$$

X_i	0	1
P	q	p

$E(X_i)=0*q+1*p=p$. Представим $X=X_1+X_2+\dots+X_n$

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n p = np.$$

$$D(X)=?$$

$$D(X_i)=E(X_i^2)-E^2(X_i),$$

X_i^2	0	1
P	q	p

$$E(X_i^2)=p;$$

$$D(X_i)=E(X_i^2)-E^2(X_i) = p-p^2 = p(1-p) = pq$$

$$D(X)=?$$

$$D(X) = D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n D(X_i) = \sum_{i=1}^n pq = npq.$$

Пример

Вероятность приема самолетом радиосигнала при каждой передаче равна 0,7. Вычислить $E(X)$ и $D(X)$ числа сигналов, принятых при четырехкратной передаче. Каково наиболее вероятное значение числа принятых сигналов?

Считаем, прием самолетом радиосигнала при одной передаче – это Y .

С.в. X – число успехов в 4-х испытаниях Б. с $p=0,7$.

X имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 4, p = 0,7$.

$$E(X) = np = 4 * 0,7 = 2,8; \quad D(X) = npq = 4 * 0,7 * 0,3 = 0,84;$$

$$(n + 1)p = 3,5 \quad m_0 = [3,5] = 3;$$

Пр.

- В Петербурге в течении трех дней наблюдается наводнение. Вероятность того, что в каждый из этих дней уровень воды в Неве превысит ординар равна 0,8.

Записать таблицу распределения числа дней с превышением ординара.

Вычислить м.о. и дисперсию числа дней с превышением ординара.

Решение.

$$n=3, \quad p=0,8 \quad q=0,2;$$

X	0	1	2	3
$P\{X=m\}$	0,008	0,096	0,384	0,512

$$E(X)=np=3*0,8=2,4; \quad D(X)=npq=3*0,8*0,2=0,48;$$

$$(n+1)p=4*0,8=3,2; \quad m_0=[3,2]=3;$$

$$P\{X=0\}=q^3=0,008;$$

$$P\{X=1\}=C_3^1 p q^2=3*0,8*0,2^2=0,096;$$

$$P\{X=2\}=C_3^2 p^2 q=3*0,8^2*0,2=0,384;$$

$$P\{X=3\}=p^3=0,512;$$

$$E(X)=np=3*0,8=2,4; \quad D(X)=npq=3*0,8*0,2=0,48;$$

$$(n+1)p=4*0,8=3,2; \quad m_0=[3,2]=3;$$