

Натуральные числа $\mathbb{N}$

Множество X называется *индуктивным*, если вместе с каждым числом $x \in X$ ему принадлежит также и число $x+1$. *Множеством натуральных чисел* $\mathbb{N}$ называют наименьшее индуктивное множество, содержащее число 1.

Свойства натуральных чисел

1. Сумма и произведение натуральных чисел – натуральные числа.
2. Если $n \in \mathbb{N}$ и $n \neq 1$, то $n-1 \in \mathbb{N}$.
3. Если $m, n \in \mathbb{N}$ и $n < m$, то $n+1 \leq m$.
4. В любом непустом подмножестве множества натуральных чисел имеется минимальный элемент.
5. *Аксиома индукции.* Натуральное число $n+1$ непосредственно следует за натуральным числом n (или, что то же самое, число $n-1$ предшествует числу n), т.е. нет натуральных чисел x , удовлетворяющих условию $n < x < n+1$.

Метод математической индукции:

Пусть $A(n)$ – зависящее от $n \in \mathbb{N}$ утверждение. Если доказано, что выполняется $A(1)$ и из справедливости $A(n)$ вытекает справедливость $A(n+1)$, то $A(n)$ справедливо $\forall n \in \mathbb{N}$.

Замечание. Индукция может начинаться с любого числа $n_0 \in \mathbb{N}$. Тогда утверждение $A(n)$ верно $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$.

Целые числа $\mathbb{Z}$

Действительное число z называется *целым*, если существуют такие $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, что $z = n_1 - n_2$.

Свойства целых чисел

1. Сумма и произведение целых чисел – целые числа.
2. Если $n \in \mathbb{Z}$, то $n-1 \in \mathbb{Z}$.
3. Если $m, n \in \mathbb{Z}$ и $n < m$, то $n+1 \leq m$.
4. Целое число $n+1$ непосредственно следует в $\mathbb{Z}$ за целым числом n , т.е. нет целых чисел x , удовлетворяющих условию $n < x < n+1$.

Рациональные числа $\mathbb{Q}$

Действительное число a называется *рациональным*, если существуют $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$, $z_2 \neq 0$ такие, что $a = \frac{z_1}{z_2}$ (z_1 и z_2 не определены однозначно числом a).

Множество $\mathbb{Q}$ замкнуто относительно операций сложения, вычитания, умножения и деления на ненулевой элемент.

Иррациональные числа $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Действительные числа, не являющиеся рациональными, называют *иррациональными*. Необходимость введения иррациональных чисел доказал Пифагор (570-496 г. до н.э) через теорему о несоизмеримости диагонали и стороны квадрата.

Теорема о несоизмеримости диагонали и стороны квадрата.

Диагональ единичного квадрата на координатной плоскости не может измеряться рациональным числом. Другими словами, $\sqrt{2}$ не может быть рациональным числом.

▣ Докажем от противного.

Пусть $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь, $m, n \in \mathbb{N}$.

Способ 1. Возможны три варианта:

m – четное,
 n – нечетное.

Обозначим:

$$m = 2k, n = 2l + 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} 2(2l+1)^2 &= (2k)^2, \\ (2l+1)^2 &= 2k^2, \end{aligned}$$

«нечетное» = «четное».

m – нечетное,
 n – четное.

Обозначим:

$$m = 2k + 1, n = 2l.$$

Тогда

$$\begin{aligned} 2(2l)^2 &= (2k+1)^2, \\ \text{«четное»} &= \text{«нечетное»}. \end{aligned}$$

n – нечетное,
 m – нечетное.

Обозначим:

$$m = 2k + 1, n = 2l + 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} 2(2l+1)^2 &= (2k+1)^2, \\ \text{«четное»} &= \text{«нечетное»}. \end{aligned}$$

В каждом случае получили противоречие.

Способ 2. Возводя $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ в квадрат, получим: $2 = \frac{m^2}{n^2}$, т.е. $2n^2 = m^2$. Отсюда получаем: $m^2 \equiv 2$, а значит, $m \equiv 2$, поэтому можно записать $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $(2k)^2 = 2n^2$, но тогда и $n \equiv 2$, а это противоречит условию о несократимости дроби $\frac{m}{n}$. ▣ 3

Расширенная числовая ось

Соотношения, принятые между числами $x \in \mathbb{R}$ и символами $-\infty, +\infty$.

1. $-\infty < x < +\infty$.

2. $\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$.

3. $x \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{если } x > 0; \\ -\infty & \text{если } x < 0, \end{cases}$

$$x \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{если } x > 0; \\ +\infty & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

4. $x + (+\infty) = +\infty + x = +\infty$,

$$x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty,$$

$$x - (+\infty) = -\infty + x = -\infty,$$

$$x - (-\infty) = +\infty + x = +\infty.$$

Для символов $-\infty, +\infty$ определены действия:

1. $+\infty + (+\infty) = +\infty$,

$$-\infty - (+\infty) = -\infty - \infty = -\infty.$$

2. $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$,

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Подмножества точек числовой оси (**числовые промежутки**):

– **интервал**: $(a, b) \stackrel{df}{=} \{x | x \in \mathbb{R} \quad a < x < b\};$

– **отрезок** или **сегмент**: $[a, b] \stackrel{df}{=} \{x | x \in \mathbb{R} \quad a \leq x \leq b\};$

– **полуинтервалы**: $[a, b) \stackrel{df}{=} \{x | x \in \mathbb{R} \quad a \leq x < b\},$

$(a, b] \stackrel{df}{=} \{x | x \in \mathbb{R} \quad a < x \leq b\};$

конечные
промежутки

– **лучи**: $[a, +\infty) \stackrel{df}{=} \{x | x \in \mathbb{R} \quad a \leq x\},$

$(-\infty, a] \stackrel{df}{=} \{x | x \in \mathbb{R} \quad x \leq a\},$

$(a, +\infty) \stackrel{df}{=} \{x | x \in \mathbb{R} \quad a < x\},$

$(-\infty, a) \stackrel{df}{=} \{x | x \in \mathbb{R} \quad x < a\};$

бесконечные
промежутки

– **вещественная ось**: $(-\infty, +\infty) \stackrel{df}{=} \{x | x \in \mathbb{R} \}.$

Окрестности

$$\varepsilon > 0$$

1) ε -окрестность точки a :

$$B(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon);$$

2) проколота ε -окрестность точки a :

$${}^0B(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\};$$

3) ε -окрестность бесконечности: $(-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty)$;

4) ε -окрестность плюс-бесконечности: $(\varepsilon, +\infty)$;

5) ε -окрестность минус-бесконечности: $(-\infty, -\varepsilon)$.

ПОЛНОТА МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Множество $X \subset \mathbb{R}$ *ограничено сверху* (*снизу*), если

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad x \leq c \quad (x \geq c).$$

c – *верхняя* (*нижняя*) *грань* множества X или *мажоранта* (*миноранта*) множества X .

Множество *ограничено*, если оно ограничено и сверху, и снизу.

Элемент $a \in X$ называется *наибольшим* или *максимальным* (*наименьшим* или *минимальным*) элементом множества $X \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall x \in X \quad x \leq a \quad (x \geq a).$$

Обозначения: $a = \max X = \max_{x \in X} x$ ($a = \min X = \min_{x \in X} x$).

Лемма. Если в числовом множестве есть максимальный (*минимальный*) элемент, то он единственный.

$\square$ Справедливость леммы следует из аксиом порядка и определения максимального (*минимального*) элементов. $\square$

Замечание. Существуют множества, не имеющие максимального (*минимального*) элемента.

*Точной верхней (нижней) гранью **ограниченного** множества X называется наименьшее (наибольшее) из чисел, ограничивающих множество $X \subset \mathbb{R}$ сверху (снизу).*

Обозначения:

$$\sup X \text{ или } \sup_{x \in X} x \quad (\inf X \text{ или } \inf_{x \in X} x)$$

«супремум X » («инфимум X »):

$$s = \sup_{x \in X} x \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1) \forall x \in X \quad x \leq s, \\ 2) \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x' \in X \quad x' > s - \varepsilon \text{ или } \forall s' < s \quad \exists x' \in X \quad s' < x'. \end{array}$$

$$i = \inf_{x \in X} x \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1) \forall x \in X \quad i \leq x, \\ 2) \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x' \in X \quad x' < i + \varepsilon \text{ или } \forall i' > i \quad \exists x' \in X \quad x' < i'. \end{array}$$

Верхней гранью неограниченного сверху (снизу) множества X принято считать « $+\infty$ » (« $-\infty$ »).

Теорема (принцип верхней грани). Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) множество имеет и притом единственную точную верхнюю (нижнюю) грань.

□ Докажем, что **непустое ограниченное сверху** множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет единственную точную **верхнюю** грань.

Пусть $Y = \{y \mid y \in \mathbb{R} \text{ и } \forall x \in X, y \geq x\}$ множество верхних граней множества X . По условию $X \neq \emptyset$ **и ограничено**, а значит, и $Y \neq \emptyset$.

Так как $X \neq \emptyset$ и $Y \neq \emptyset$, то, в силу аксиомы полноты,

$$\exists d \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad x \leq d \leq y,$$

причем число $d \in Y$.

С другой стороны, $\forall y \in Y, d \leq y \Rightarrow$

$\Rightarrow \ll d - \text{минимальный элемент множества } Y, \text{ причем единственный} \gg$.

Существование и единственность точной нижней грани ограниченного снизу множества доказывается аналогично. □

Аксиома полноты. Принцип непрерывности Дедекинда.

Каковы бы ни были непустые множества $A \subset \mathbb{R}$ и $B \subset \mathbb{R}$, у которых для любых двух элементов $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a \leq b$, существует такое число γ , что $\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq \gamma \leq b$.

Свойства точных граней

1. $\sup \{-x \mid x \in X\} = -\inf X, \quad \inf \{-x \mid x \in X\} = -\sup X.$

2. $\sup \{x + y \mid x \in X, y \in Y\} = \sup X + \sup Y,$

$$\inf \{x + y \mid x \in X, y \in Y\} = \inf X + \inf Y.$$

3. $\sup \{x - y \mid x \in X, y \in Y\} = \sup X - \inf Y.$

4. Если $\lambda \geq 0$, то

$$\sup \{\lambda x \mid x \in X\} = \lambda \sup X, \quad \inf \{\lambda x \mid x \in X\} = \lambda \inf X.$$

5. Пусть $X \subset \{x \mid x \geq 0\}$, $Y \subset \{y \mid y \geq 0\}$. Тогда

$$\sup \{xy \mid x \in X, y \in Y\} = \sup X \sup Y,$$

$$\inf \{xy \mid x \in X, y \in Y\} = \inf X \inf Y.$$

Теорема Архимеда. Если $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, то

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists ! k \in \mathbb{Z} \quad (k-1)h \leq x < kh.$$

Следствия:

$$1. \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

$$2. \text{ Если число } x \in \mathbb{R} \text{ таково, что } 0 \leq x \text{ и } \forall n \in \mathbb{N} \quad x < \frac{1}{n}, \text{ то } x = 0.$$

$$3. \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \{a < b \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R} \quad a < r < b\}.$$

$$4. \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \{a < b \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad a < r < b\}.$$

$$5. \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists ! k \in \mathbb{Z} \quad k \leq x < k+1.$$

6. Числовую прямую можно покрыть не более чем счетным количеством непересекающихся интервалов.

Пример. Множество всех правильных дробей:

$$A = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N} \quad 0 < m < n \right\},$$



не имеет наименьшего и наибольшего элементов; $\inf A = 0$, $\sup A = 1$. 11

Пример. Множество всех правильных дробей: $A = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, m < n \right\}$,

не имеет наименьшего и наибольшего элементов; $\inf A = 0$, $\sup A = 1$.

□ Докажем от противного отсутствие наименьшего (наибольшего) элемента.

Пусть $\frac{m}{n}$ ($n, m \in \mathbb{N}$) – наименьшее (наибольшее) число. Тогда

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad \frac{m}{n} = \frac{2m}{2n} > \frac{2m-1}{2n} > 0 \quad (\forall n, m \in \mathbb{N} \quad \frac{m}{n} = \frac{2m}{2n} < \frac{2m+1}{2n} < 1), \quad (1.10)$$

т.е. получили меньший (большой), чем указанный наименьший (наибольший) элемент множества.

Инфимум. Согласно теореме Архимеда ($x := m$, $h := \varepsilon$, $k := n$):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n > m/\varepsilon.$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} < \varepsilon \text{ и, учитывая (1.10) } \frac{m}{n} > 0, \text{ а значит: } \inf A = 0.$$

Супремум. Согласно теореме Архимеда ($x := p$, $h := \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$, $k := m$):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad m > \frac{p(1-\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

$$\Rightarrow \frac{m}{p+m} > 1-\varepsilon, \text{ т.е. при } n = p+m \text{ имеем } \frac{m}{n} > 1-\varepsilon \text{ и, учитывая (1.10) } \frac{m}{n} < 1, \text{ а значит, } \sup A = 1.$$



Системой вложенных отрезков называют множество S отрезков таких, что

$$\forall I_1, I_2 \in S \quad I_1 \subset I_2 \text{ или } I_2 \subset I_1.$$

Лемма о вложенных отрезках, или принцип Коши-Кантора

Пусть S – система вложенных отрезков, тогда $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall I \in S \quad x \in I$.



Система вложенных отрезков называется **последовательностью вложенных отрезков**, если они занумерованы и $\forall n \quad \forall k \quad I_n \subset I_{n+k}$.

Последовательность вложенных отрезков называется **стягивающейся**, если в ней есть отрезки сколь угодно малой длины.

Лемма о последовательности стягивающихся отрезков

Последовательность стягивающихся отрезков содержит общую точку и притом единственную.



Лемма о вложенных отрезках, или принцип Коши-Кантора.

Пусть S – система вложенных отрезков, тогда $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall I \in S \quad x \in I$.

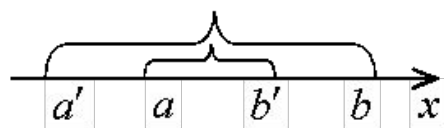
☐ Пусть A – множество левых, а B – множество правых концов отрезков. Тогда $\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq b$.

Действительно, пусть $[a, b'], [a', b] \in S$ – произвольные отрезки, тогда возможны 2 случая:

$$1) [a, b'] \subset [a', b],$$

$$a' \leq a < b' \leq b,$$

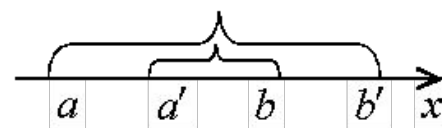
$$a < b;$$



$$2) [a', b] \subset [a, b'],$$

$$a \leq a' < b \leq b',$$

$$a < b.$$



Поэтому, в силу аксиомы полноты,

, а значит,

☐

Системой вложенных отрезков называют множество отрезков таких, что
или .



Лемма о последовательности стягивающихся отрезков.

Последовательность стягивающихся отрезков содержит общую точку и притом единственную.

☐ Наличие этой точки следует из предыдущей леммы.

Пусть все отрезки содержат две различных точки a и b , тогда длина всех отрезков больше, чем $|b - a| > 0$, но это противоречит тому, что отрезки стягивающиеся. ☐



Система вложенных отрезков называется *последовательностью вложенных отрезков*, если они занумерованы и $\forall n \forall k I_n \subset I_{n+k}$.

Последовательность вложенных отрезков называется *стягивающейся*, если в ней есть отрезки сколь угодно малой длины.

Теорема Кантора о мощности отрезка

Множество точек отрезка несчетно.



Лемма Бореля-Лебега о конечном покрытии)

В любой системе интервалов, покрывающих отрезок, имеется конечная подсистема, покрывающая этот отрезок.



Точка a называется *предельной точкой множества* $X \subset \mathbb{R}$, если в любой ее окрестности содержится бесконечное количество точек множества X , или, что то же самое, в любой ее окрестности есть хотя бы одна точка множества X , отличная от a .

Лемма о предельной точке (принцип Больцано-Вейерштрасса)

Всякое бесконечное ограниченное множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет, по крайней мере, одну предельную точку.



Теорема Кантора о мощности отрезка. Множество точек отрезка несчетно.

☒ Докажем от противного.

Пусть все точки отрезка занумерованы $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

Делим отрезок на 3 части и выбираем ту, которой x_1 **не** принадлежит.

Делим новый отрезок на 3 части и выбираем ту, которой x_2 **не** принадлежит.

...

Получим систему вложенных отрезков. По лемме о вложенных отрезках, существует точка, принадлежащая сразу всем отрезкам. Но эта точка не может совпадать ни с одной из точек последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ по построению. ☒



Лемма Бореля-Лебега о конечном покрытии). В любой системе интервалов, покрывающих отрезок, имеется конечная подсистема, покрывающая этот отрезок.

☒ Доказательство от противного

Пусть система интервалов S покрывает отрезок $[a, b] = I_1$ и в ней **нельзя** выбрать **конечную** подсистему, покрывающую I_1 .

Делим I_1 пополам и выбираем тот отрезок, который нельзя покрыть конечным набором интервалов системы S . Обозначим его I_2 .

Делим I_2 пополам и выбираем тот отрезок, который нельзя покрыть конечным набором интервалов системы S . Обозначим его I_3 .

...

Получаем последовательность вложенных отрезков $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$, не допускающих конечного покрытия интервалами системы S .

$|I_{n+1}| = \frac{|I_1|}{2^n} \Rightarrow$ в последовательности $I_1, I_2, I_3, \dots$ есть сколь угодно малые отрезки.

По лемме о вложенных отрезках $\exists! c \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad c \in I_n$.

$c \in I_1 = [a, b] \Rightarrow$ найдется интервал $(\alpha, \beta) \in S$, содержащий точку c , т.е. $\alpha < c < \beta$.

Найдем в последовательности $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ такой отрезок I_n , что

$$|I_n| < \min \{c - \alpha, \beta - c\}.$$

Тогда $c \in I_n$ и $I_n \subset (\alpha, \beta)$, а это противоречит тому, что отрезок I_n нельзя покрыть конечным набором интервалов системы. ☒



Лемма о предельной точке, или принцип Больцано-Вейерштрасса.

Всякое бесконечное ограниченное множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет, по крайней мере, одну предельную точку.

$$\mathbb{R} \text{ } X \text{ – ограничено} \Rightarrow X \subset [a, b] = I.$$

Докажем от противного, что, по крайней мере, одна из точек отрезка I является предельной для X .

Пусть это не так, тогда каждая точка $x \in I$ имеет окрестность, в которой не более чем конечное количество точек множества X .

Совокупность S таких окрестностей, построенных для каждой точки $x \in I$, образует покрытие I интервалами $U(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

Из S по лемме о конечном покрытии можно извлечь **конечную** систему $U(x_1), U(x_2), \dots, U(x_n)$ интервалов, покрывающих I , а значит, и множество X (т.к. $X \subset I$).

По построению в каждом интервале $U(x_i)$ не более чем конечное число точек множества X , значит, в их объединении тоже конечное число точек X , то есть X – конечное множество. А по теореме Кантора множество точек отрезка бесконечно. $\square$



Точка a является предельной точкой множества $X \subset \mathbb{R}$, если в любой ее окрестности содержится бесконечное количество точек множества X .