

Определенный интеграл. Площадь криволинейной трапеции

Три пути ведут к знанию:
путь размышления - это путь самый благородный,
путь подражания - это путь самый легкий,
и путь опыта - это путь самый трудный.

Конфуций

Устно ответьте на вопрос

задачи

Найти все первообразные данной функции (1—17).

1. $\boxed{3}$ $3x^3 - 4x^2$.

2. $\boxed{3}$ $\frac{1}{x} - \frac{3}{x^3}$.

3. $\boxed{3}$ $x^5 - 2x$.

4. $\boxed{4}$ $-\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}$.

5. $\boxed{4}$ $2 \sin x + x^2$.

6. $\boxed{5}$ $\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}$.

7. $\boxed{4}$ $4e^x + x^3$.

8. $\boxed{4}$ $\sqrt{x} + 2x^2 \sqrt{x}$.

Устно ответьте на вопрос
задачи

Найти все первообразные данной функции (1—17).

1. $\boxed{3} \quad 2x^4 - 5x.$

2. $\boxed{3} \quad \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^4}.$

3. $\boxed{3} \quad x^6 + 3x^2.$

4. $\boxed{4} \quad \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2}.$

5. $\boxed{4} \quad 3 \cos x - x.$

6. $\boxed{5} \quad x\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}.$

7. $\boxed{4} \quad 5e^x - 2x^4.$

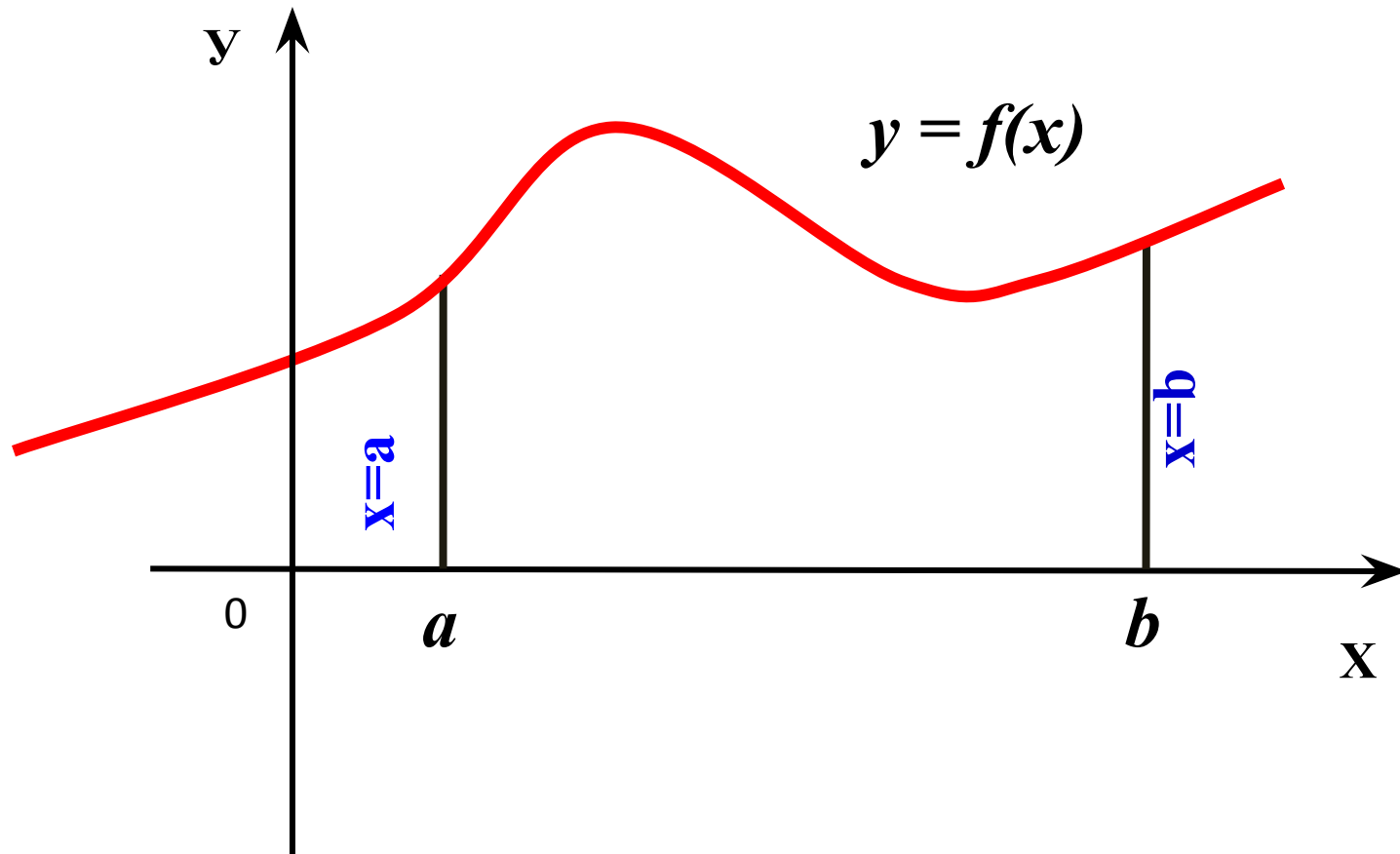
8. $\boxed{4} \quad x\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}.$

Криволинейная

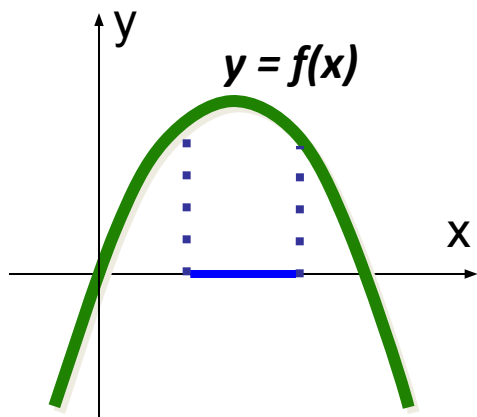
трапеция

Фигура ограниченная графиком непрерывной и неотрицательной функции $f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x=a$, $x=b$, называется криволинейной трапецией.

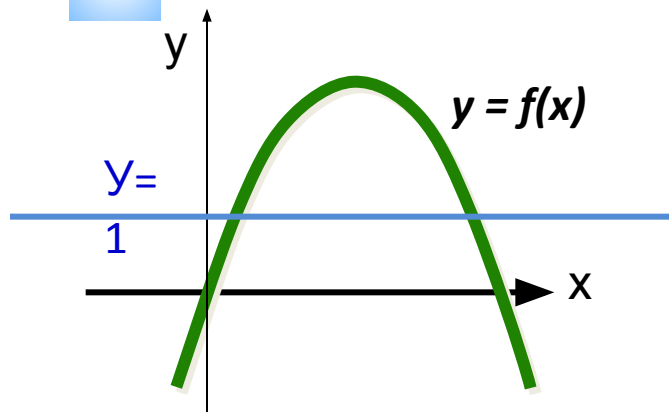
Отрезок $[a; b]$ называют основанием криволинейной трапеции.



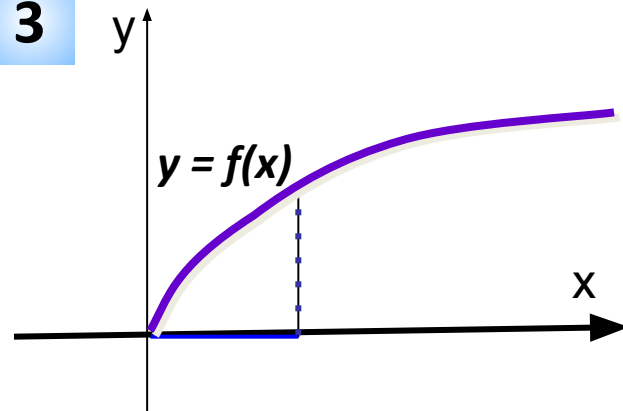
1



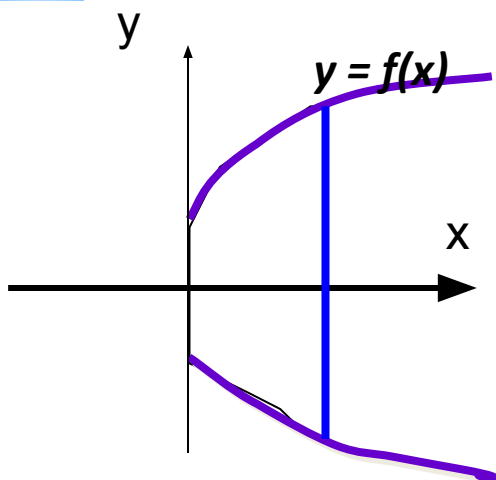
2



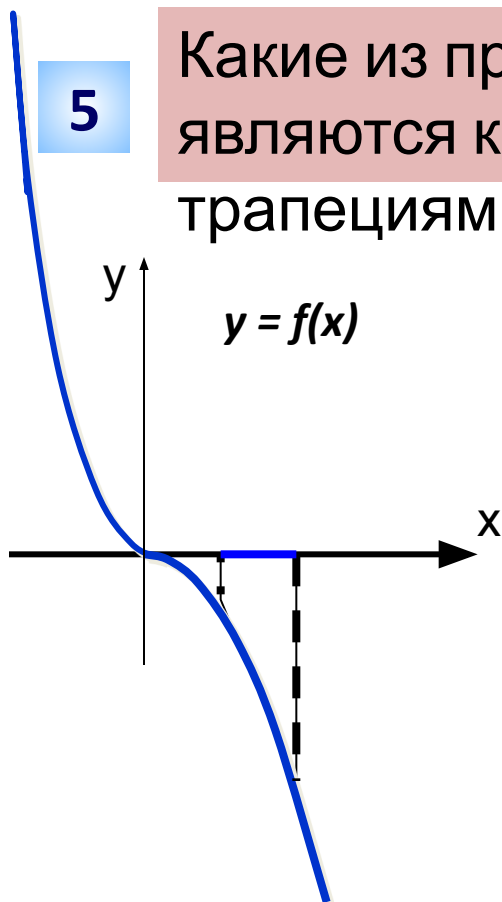
3



4

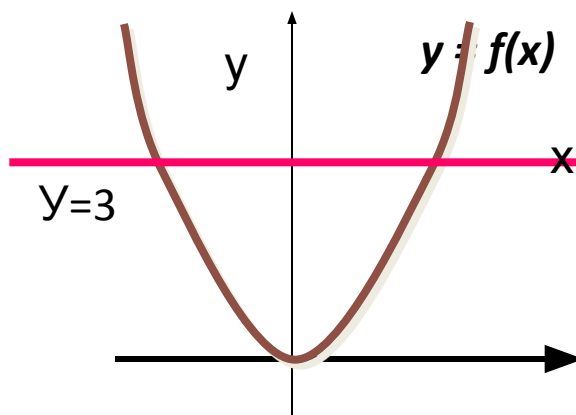


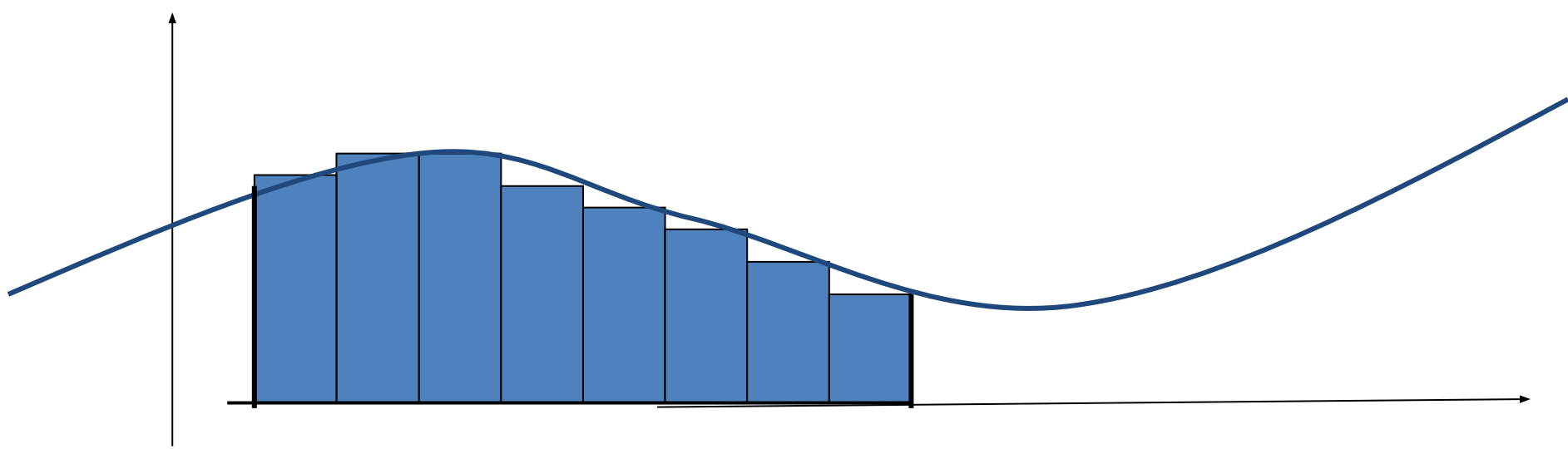
5



Какие из предложенных фигур являются криволинейными трапециями?

6





- Слово интеграл происходит от латинского слова *integer* – «целый».
- Интеграция-восстановление, восполнение, воссоединение; подробнее - это процесс, ведущий к состоянию связанности отдельных частей в целое. В построенной математической модели речь идет о воссоединении целого по отдельным частям (например о нахождении всей площади – по площадям столбиков)

Определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

«определенный интеграл от a до b от функции f(x) по dx»

$\int$ – знак интеграла,

$f(x)$ – подынтегральная функция,

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение,

x – переменная интегрирования,

$F(x)$ – первообразная подынтегральной функции,

a – нижний предел интегрирования,

b – верхний предел интегрирования

Формула Ньютона-Лейбница



1643—1727

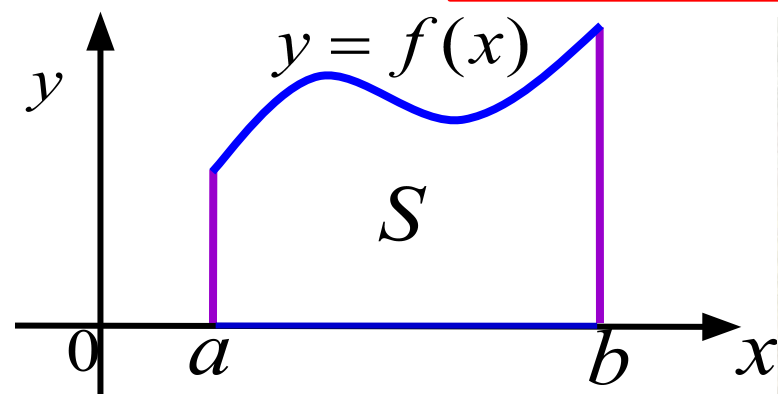
$$S = F(b) - F(a)$$

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

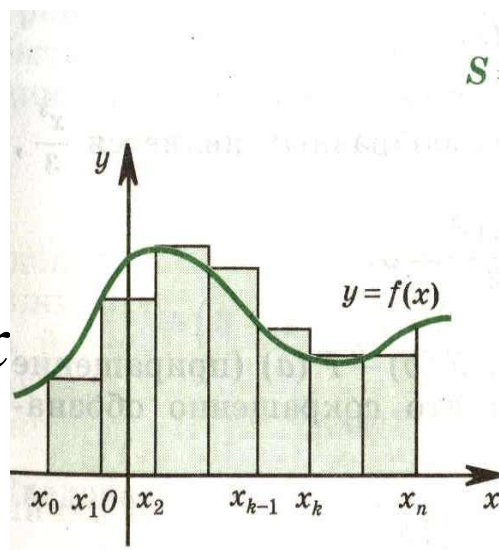


1646—1716

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

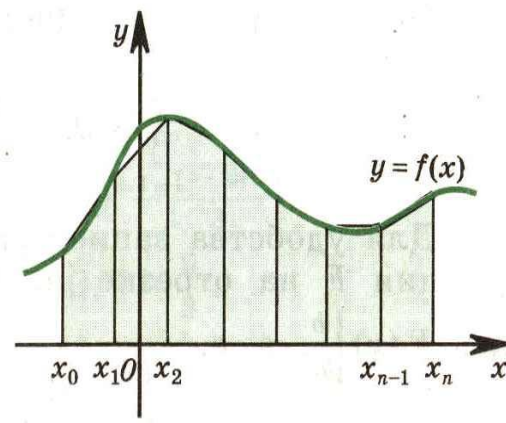


$$S = F(b) - F(a)$$



$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

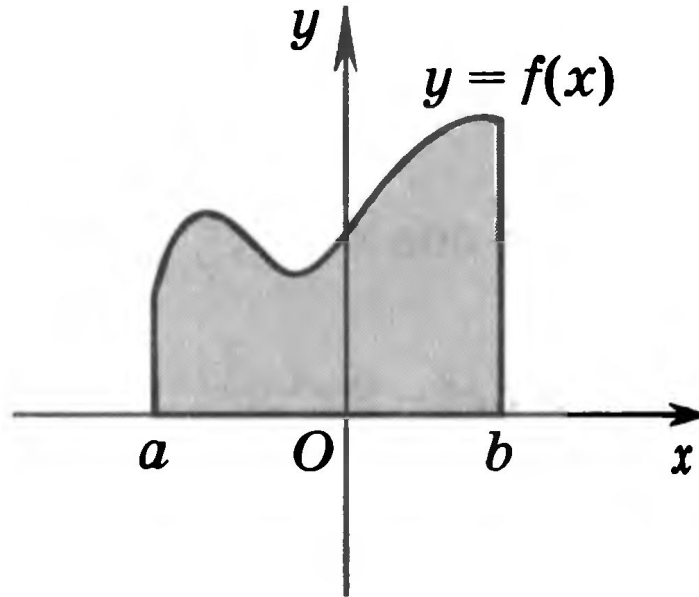
(2)



Геометрический смысл определенного интеграла:

Площадь фигуры S , ограниченной кривой $y=f(x)$ ($f(x)>0$),
осью абсцисс и прямыми $x=a$ и $x=b$:

$$S = \int_a^b f(x) dx$$



Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на промежутке $[a; b]$, то по формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Вычислите площади фигур с рисунков 87 и 88

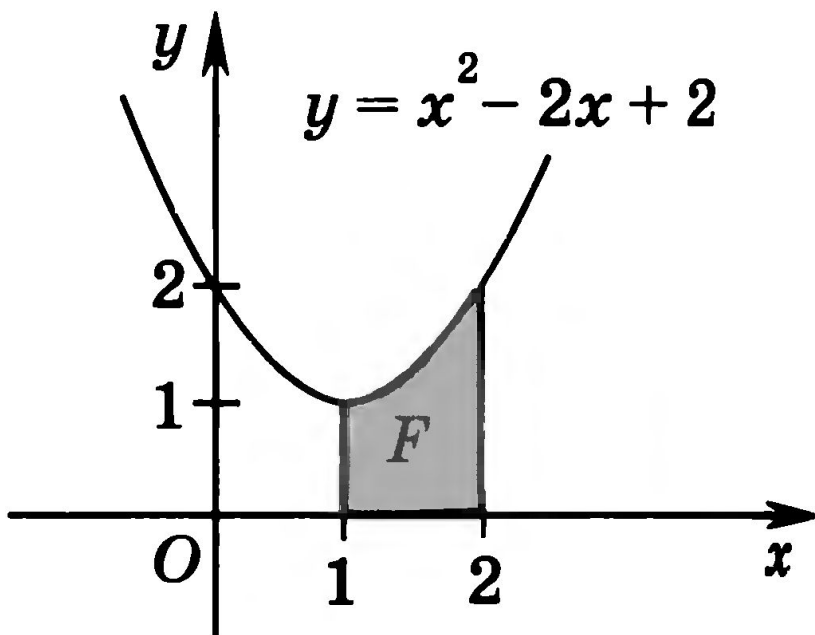


Рис. 87

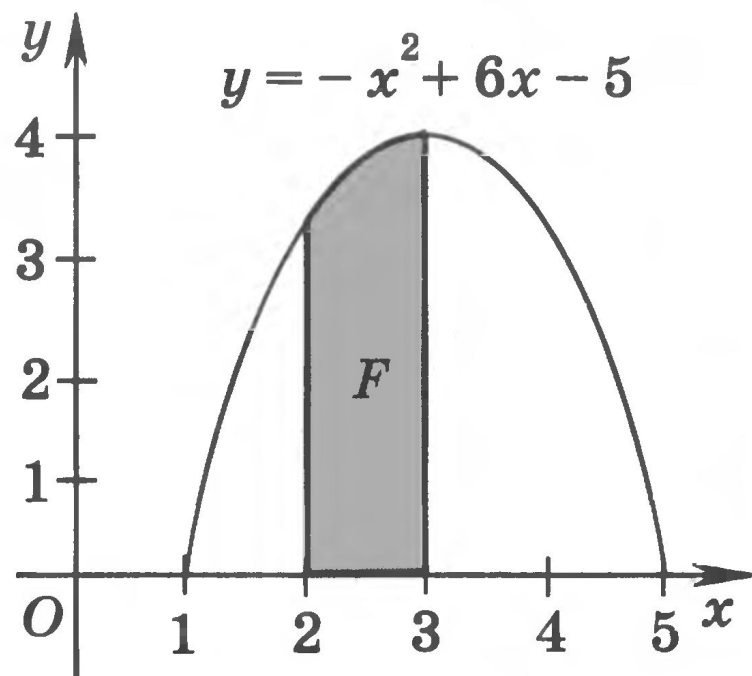
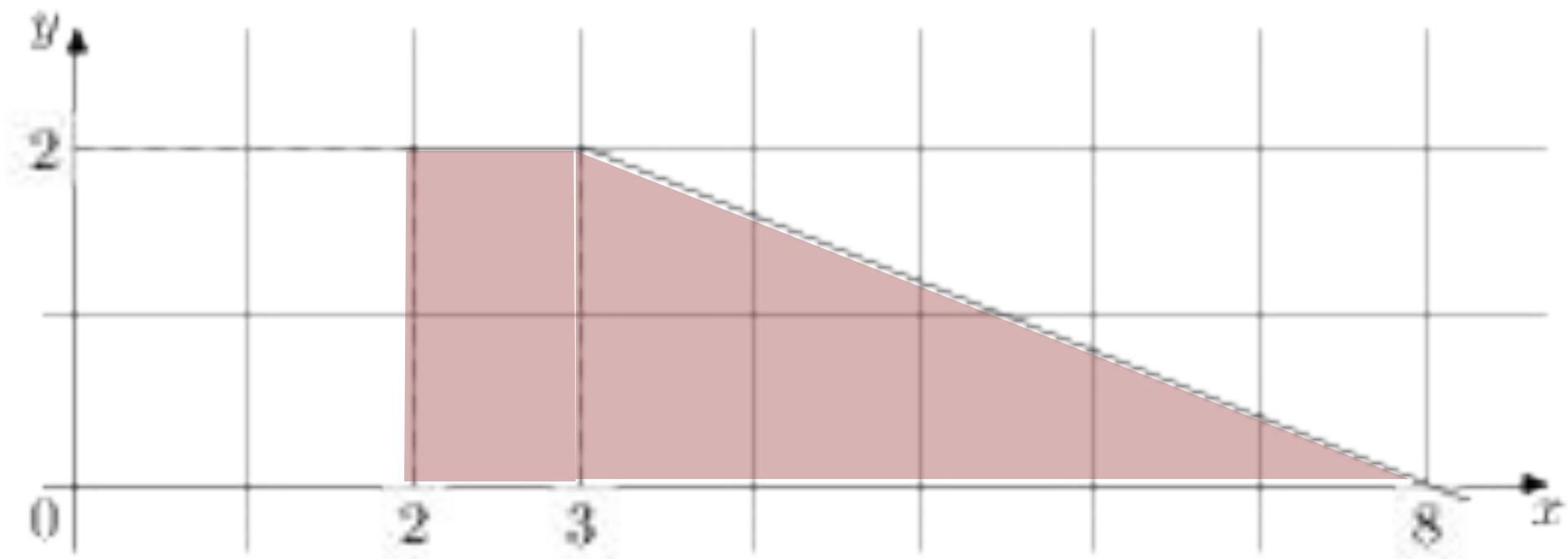


Рис. 88

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$

Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$



Прототип задания 7 (№

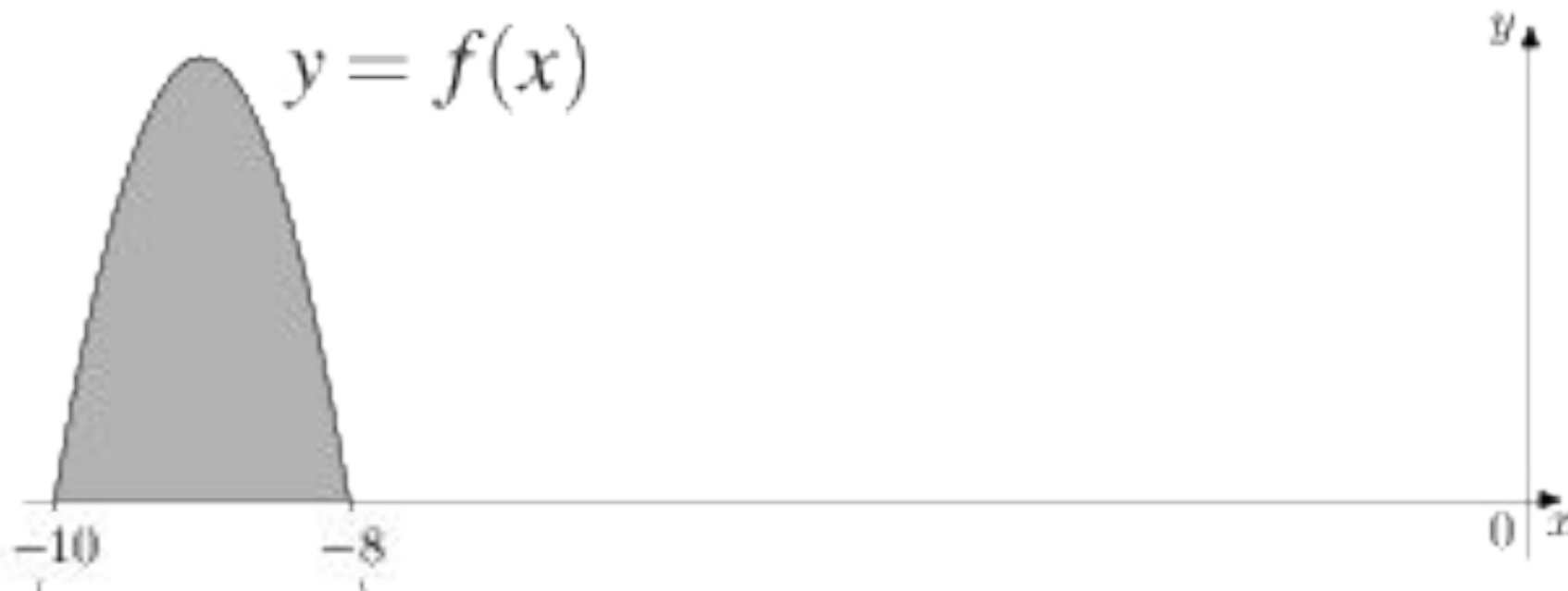
323080)

На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$

Функция $F(x) = -x^3 - 27x^2 - 240x - 8$

— одна из первообразных функции $f(x)$

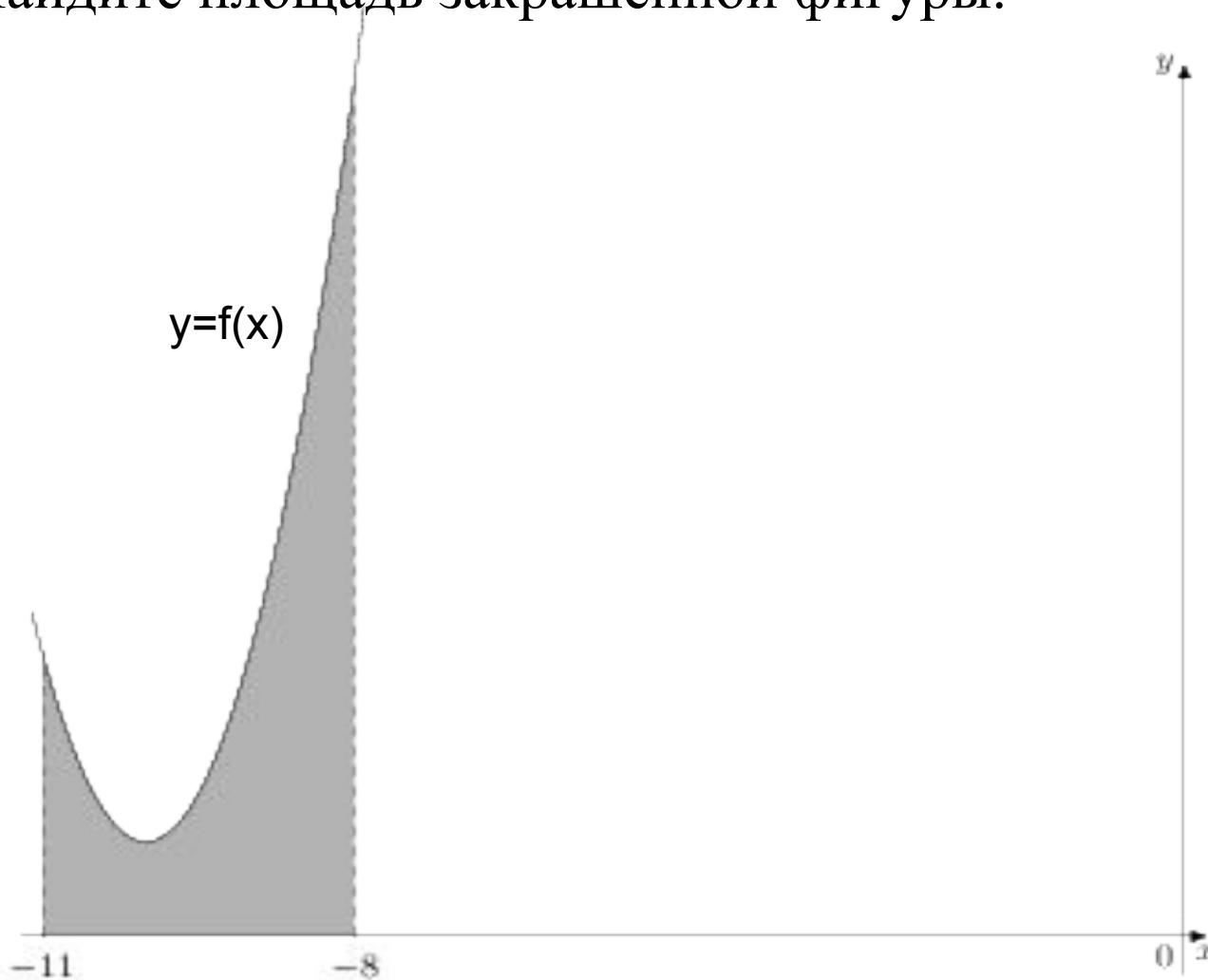
. Найдите площадь закрашенной фигуры.



№ 323287 На рисунке изображён график некоторой функции $y=f(x)$.

Функция $F(x)=\frac{2}{3}\cdot x^3+20x^2+201x-\frac{6}{7}$ — одна из первообразных функции $y=f(x)$.

Найдите площадь закрашенной фигуры.



Прототип задания 7 (№

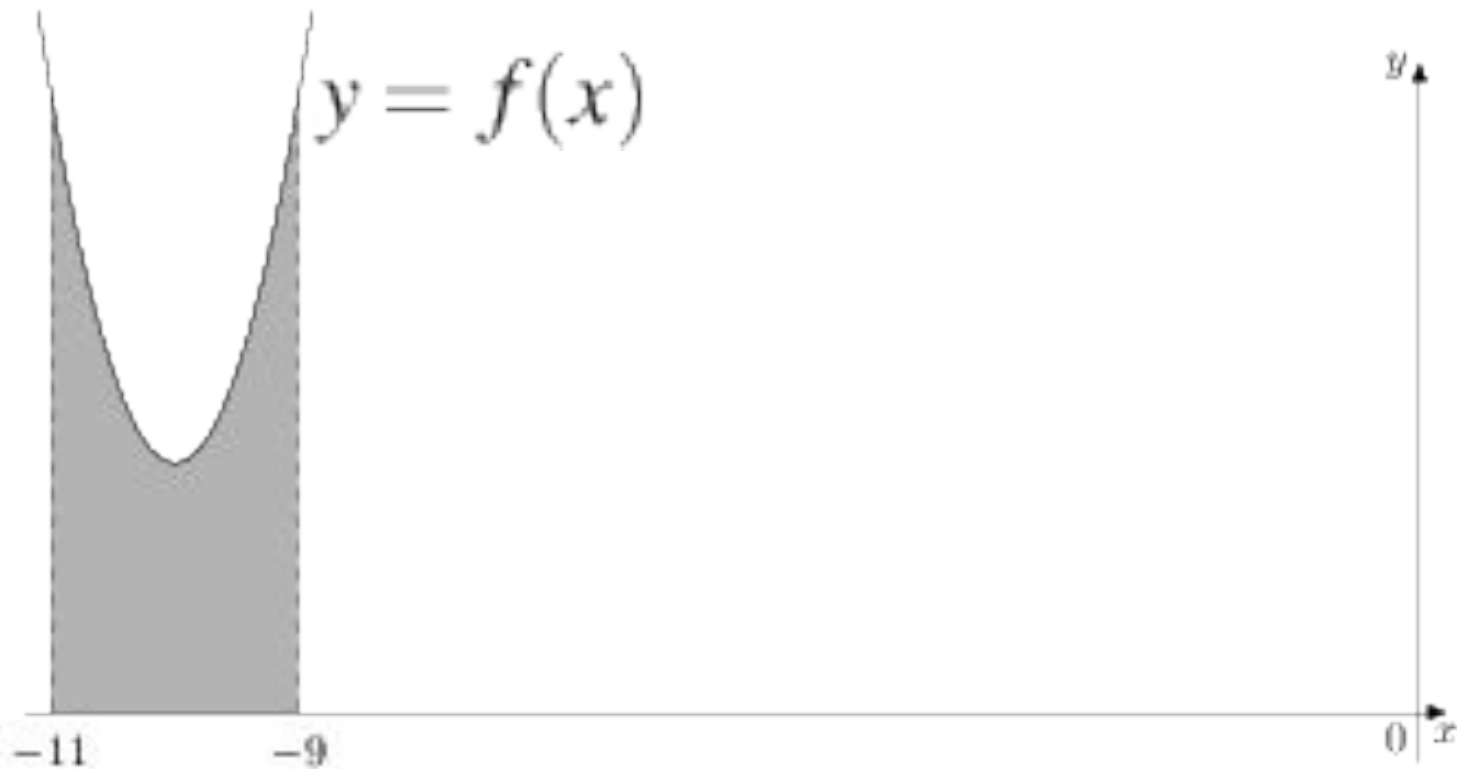
323079)

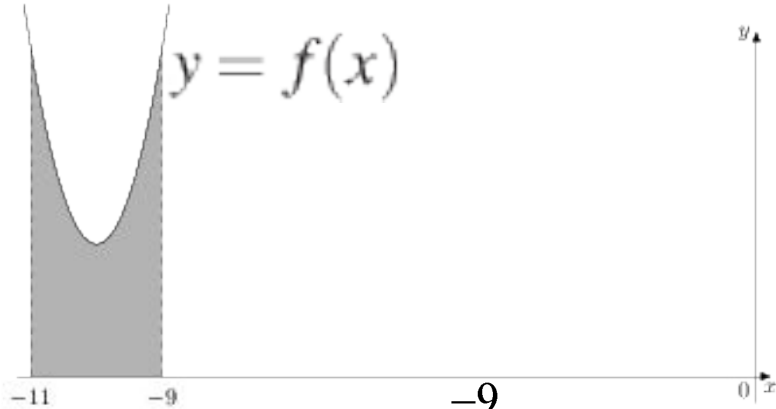
На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$

Функция $F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - \frac{15}{8}$

— одна из первообразных функции $f(x)$

. Найдите площадь закрашенной фигуры.





$$F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - \frac{15}{8}$$

1

способ

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-11}^{-9} f(x) dx = \left(x^3 + 30x^2 + 302x \right) \Big|_{-11}^{-9} = \\
 &= \left((-9)^3 + 30(-9)^2 + 302(-9) \right) - \left((-11)^3 + 30(-11)^2 + 302(-11) \right) = \\
 &= (-9)^3 + 30(-9)^2 + 302(-9) - (-11)^3 - 30(-11)^2 - 302(-11) = \\
 &= \underline{-9^3} + \underline{30 \cdot 9^2} - 302 \cdot 9 + \underline{11^3} - \underline{30 \cdot 11^2} + 302 \cdot 11 = \\
 &= (11^3 - 9^3) + (30 \cdot 9^2 - 30 \cdot 11^2) + (302 \cdot 11 - 302 \cdot 9) = \\
 &= (11 - 9)(11^2 + 11 \cdot 9 + 9^2) + 30(9^2 - 11^2) + 302(11 - 9) = \\
 &= 2(11(11 + 9) + 81) + 30(9 - 11)(9 + 11) + 302 \cdot 2 = \\
 &= 2(11 \cdot 20 + 81) - 30 \cdot 2 \cdot 20 + 604 = 2(220 + 81) - 1200 + 604 = \\
 &= 2 \cdot 301 - 1200 + 604 = 602 - 1200 + 604 = 1206 - 1200 = 6
 \end{aligned}$$

2

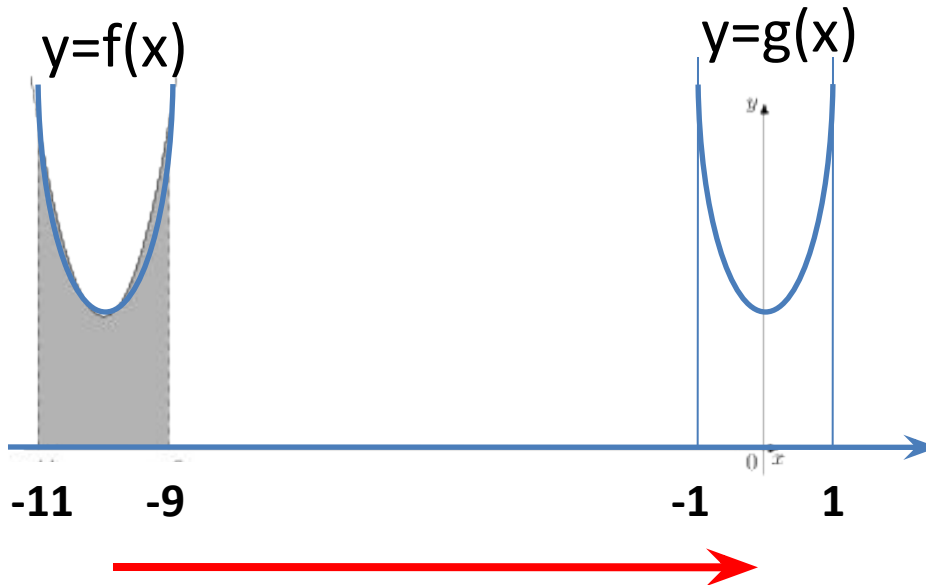
$$F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - \frac{15}{8}$$

способ

$$f(x) = F'(x) = 3x^2 + 60x + 302 = 3(x^2 + 20x + 100) + 2 = 3(x+10)^2 + 2$$

$$g(x) = 3x^2 + 2$$

$$G(x) = 3 \cdot x^3 / 3 + 2x + C = x^3 + 2x + C$$



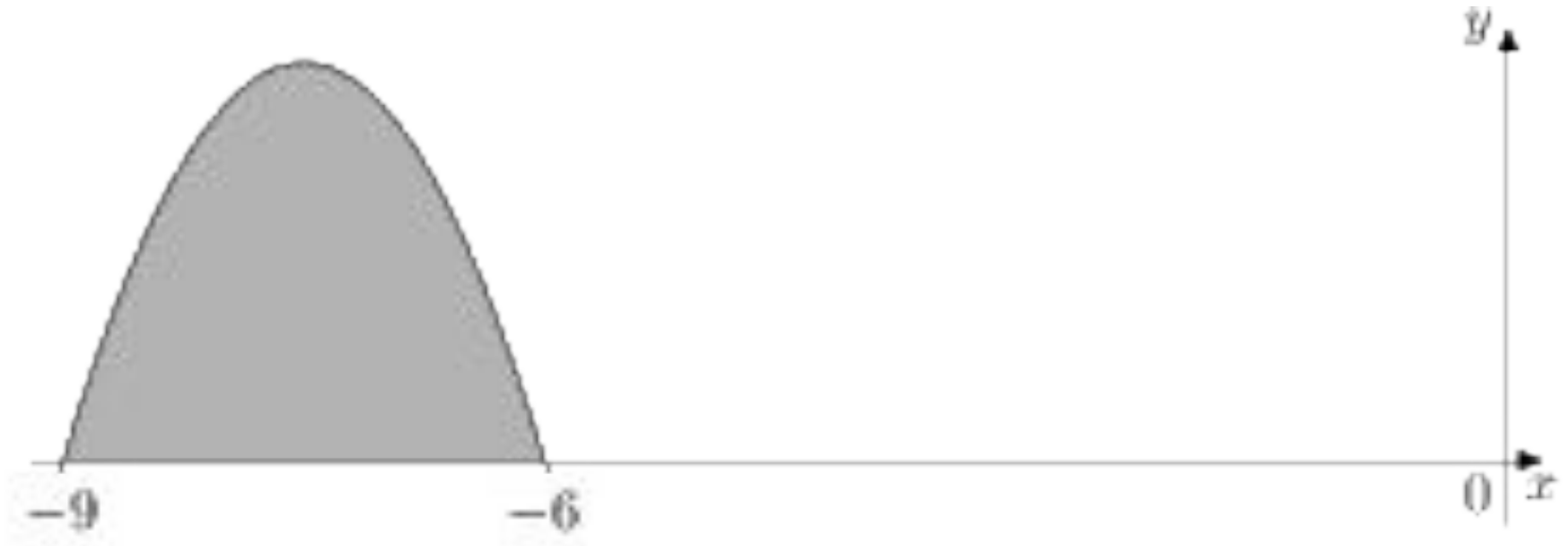
$$G(x) = x^3 + 2x$$

$$S = G(1) - G(-1) = (1^3 + 2 \cdot 1) - ((-1)^3 + 2 \cdot (-1)) = 3 + 3 = 6$$

№ 323389 На рисунке изображён график некоторой функции $y=f(x)$.

Функция $F(x)=-11/30 \cdot x^3-33/4 \cdot x^2-297/5 \cdot x-1/2$ — одна из первообразных функции $y=f(x)$.

Найдите площадь закрашенной фигуры.



Домашнее задание с урока

знать правила и формулы нахождения первообразных, определение первообразной функции, формулу Ньютона-Лейбница, геометрический смысл определенного интеграла, с сайта РЕШУ ЕГЭ выполнить 4 задачи на первообразную:
№ 323085, 323187, 323291, 323387.

Вольтер о Лейбнице

Весь мир его узнал по изданным трудам,
Был даже край родной с ним вынужден считаться,
Уроки мудрости давал он мудрецам,
Он был мудрее их: умел он сомневаться

Интеграл

* * *

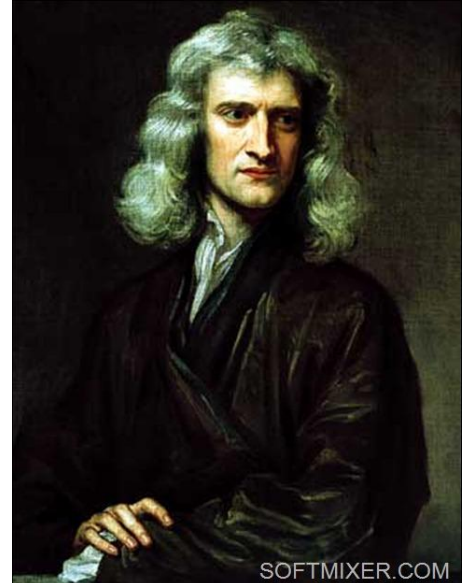
Весь мир вопрос интриговал:
Кто первым вывел интеграл?
Герр Лейбниц был уверен в том,
Что первый «герр»,
А «сэр» потом.

Сэр Ньютон был уверен в том,
Что первый «сэр»,
А «герр» потом.

Собрали в Лондоне совет:
– Сэр Ньютон – да!
Герр Лейбниц – нет!
Собрали в Лейпциге совет:
– Герр Лейбниц – да!
Сэр Ньютон – нет!



Г.В. фон Лейбниц
НЬУТОН



И.

А велся спор, наверно, зря
В таком ключе и стиле.
Так интеграл делить нельзя:
Он – сумма всех усилий!

Е. Ефимовский