

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ

Братухина Татьяна  
4курс4группа

Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича.  
Кафедра высшей математики и исследования операций

# Теория управления

- наука о принципах и методах управления различными системами, процессами и объектами.
- Суть теории управления состоит в построении на основе анализа данной системы, процесса или объекта такой абстрактной модели, которая позволит получить алгоритм управления ими в динамике, — для достижения системой, процессом или объектом состояния, которое требуется целями управления.
- Теория управления, как и любая другая наука, имеет свои предмет, функцию, цели, задачи и методы. При этом методы теории управления довольно сильно различаются в зависимости от области применения, — в кибернетике, прикладной математике, компьютерном моделировании, социологии, политологии, правоведении, в экономике.

# Первое самоуправляемое устройство

- **Ктесибий**, также Ктезибий (285-222 год до н. э.) — древнегреческий изобретатель, математик и механик, живший в Александрии в Эллинистическом Египте. Ктесибия считают «отцом пневматики».

## клепсидра (водяные часы)

а – внешний вид;

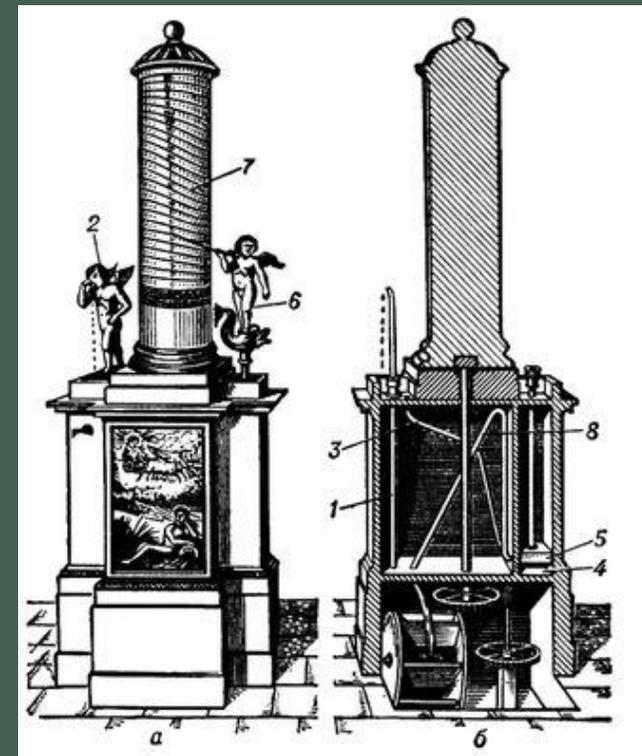
б – разрез;

1 – трубка подачи воды из постороннего источника;

2 – фигура, из глаз которой вода капля за каплей равномерно поступает по трубке 3 в резервуар 4;

5 – пробка с укрепленной на ней фигурой 6, показывающей палочкой время на цилиндрическом циферблате 7;

8 – трубка сифона, по которой в конце суток вода вытекает из наполненного резервуара 4, поворачивая цилиндр 7 вокруг вертикальной оси на  $1/365$  часть окружности.





# Корнелиус Дреббель

- **Корнелиус Якобсон Дреббель** (нидерл. Cornelius Jacobszoon Drebbel; 1572, Алкмар — 7 ноября 1633, Лондон) — нидерландский изобретатель, внёсший вклад в развитие оптики, химии, науки об измерениях, известен как изобретатель одного из первых типов микроскопов и строитель первой в мире действующей подводной лодки.



# Уатт, Джеймс

Джеймс Уатт ([англ. James Watt](#); 19 [\(30\) января 1736](#) — [19 августа 1819](#)) — шотландский [инженер](#), [изобретатель-механик](#). Член Эдинбургского королевского общества (1784), [Лондонского королевского общества](#) (1785), [Парижской академии наук](#) (1814). Ввёл первую единицу мощности — лошадиную силу. Его именем названа единица [мощности](#) — [ватт](#). Усовершенствовал [паровую машину Ньюкомена](#). Изобрел универсальную [паровую машину](#) двойного действия. Работы Уатта положили начало [промышленной революции](#) вначале в Англии, а затем и во всем мире.

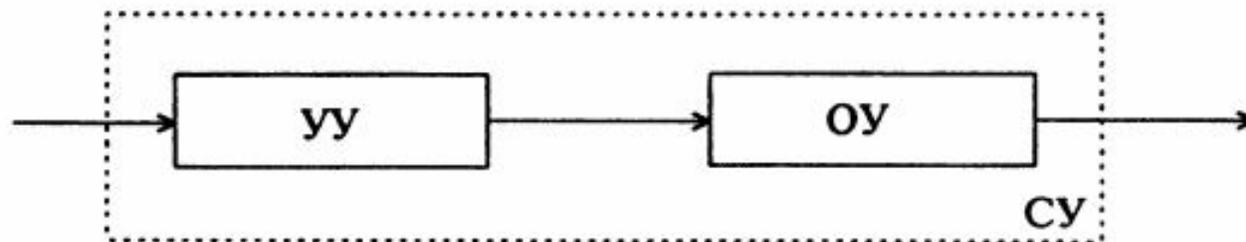
# Ляпунов, Александр Михайлович

- **Алекса́ндр Миха́йлович Ляпуно́в** (25 мая (6 июня) 1857, Ярославль — 3 ноября 1918, Одесса) — русский математик и механик, академик Петербургской Академии наук с 1901 года, член-корреспондент Парижской академии наук, член Национальной академии деи Линчеи (Италия) и ряда других академий наук и научных обществ.
- А. М. Ляпунов создал теорию устойчивости равновесия и движения механических систем с конечным числом параметров.



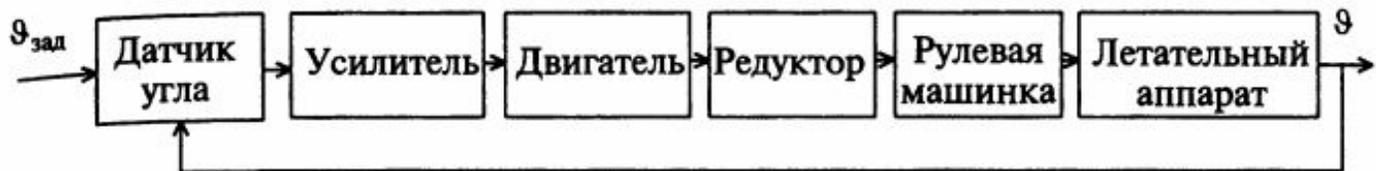
# Основные понятия и определения

- Система управления (СУ) – это совокупность управляющего устройства (УУ) и объекта управления, действия которой направлены на достижение некоторого результата – цели управления
- Управляющее устройство реализует следующие функции:
  1. сбор информации;
  2. обработка информации;
  3. передачу информации;
  4. выработку команды управления;



# функциональная схема системы управления





*a*



*б*



*в*

## Примеры

схемы систем управления:

- углом тангажа самолета
- производством товара
- процессом обучения в

# Классификация задач расчета систем управления

1. Задачи анализа: по заданному воздействию и оператору системы исследовать закон изменения выходного сигнала
2. Задачи синтеза: по желаемому выходу найти входной сигнал и оператор системы
3. Задачи идентификации: по входному и выходному сигналам определить оператор системы



# Описание сигналов

1. Дельта функция

$$\int_a^b f(t)\delta(t-\tau) dt = \begin{cases} f(\tau+0), \tau \in [a, b) \\ 0, \tau \in (-\infty > a) \cup [b + \infty) \end{cases}$$

2. Единичная ступенчатая функция

$$1(t-\tau) = \begin{cases} 1, & t > \tau \\ 0, & t \leq \tau \end{cases}$$

Типовые сигналы связаны соотношением

$$\int_{-\infty}^t \delta(\eta - \tau) d\eta = 1(t - \tau)$$

# Описание системы

- Одномерная линейная непрерывная нестационарная система управления описывается дифференциальным уравнением

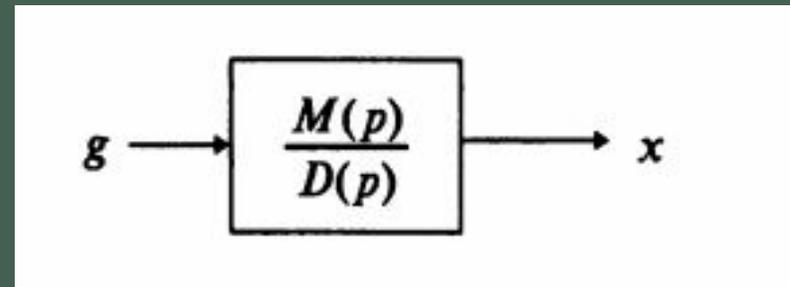
$$a_n(t) \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \dots + a_0(t)x(t) = b_n(t) \frac{d^n g(t)}{dt^n} + \dots + b_0(t)g(t)$$

С начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, \dot{x}(t) = \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$$

В операторной форме

$$D(p, t)x(t) = M(p, t)g(t) \text{ , где } p = \frac{d}{dt}$$



# УСИЛИТЕЛЬНОЕ ЗВЕНО

•

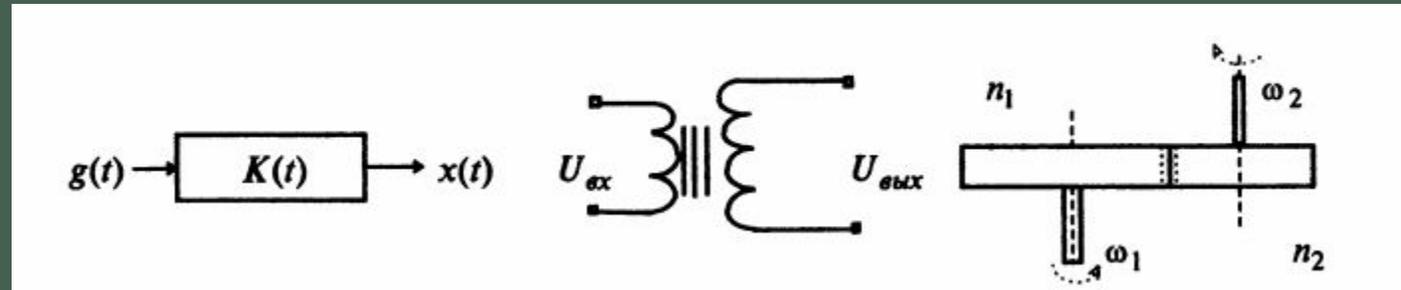
$$x(t) = K(t)g(t)$$

где  $K(t)$  – коэффициент усиления. Если звено стационарное, то  $K(t) = K = \text{const}$

Примеры:

а) Трансформатор  $U_{\text{ВЫХ}}(t) = KU_{\text{ВХ}}(t)$

б) Редуктор  $\omega_2 = \frac{n_1}{n_2} \omega_1 = K(t)\omega_1$



# Дифференцирующее звено

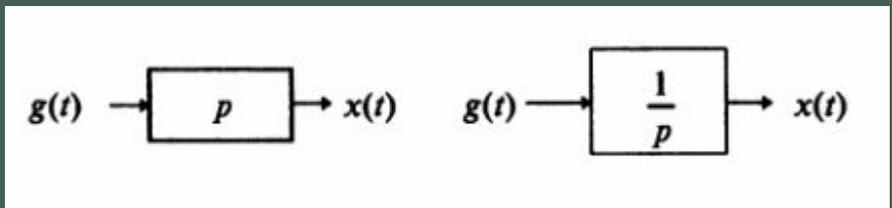
- $$x(t) = \frac{dg(t)}{dt}$$

Операторная форма:  $x(t) = pg(t)$

# Интегрирующее звено

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(t)$$

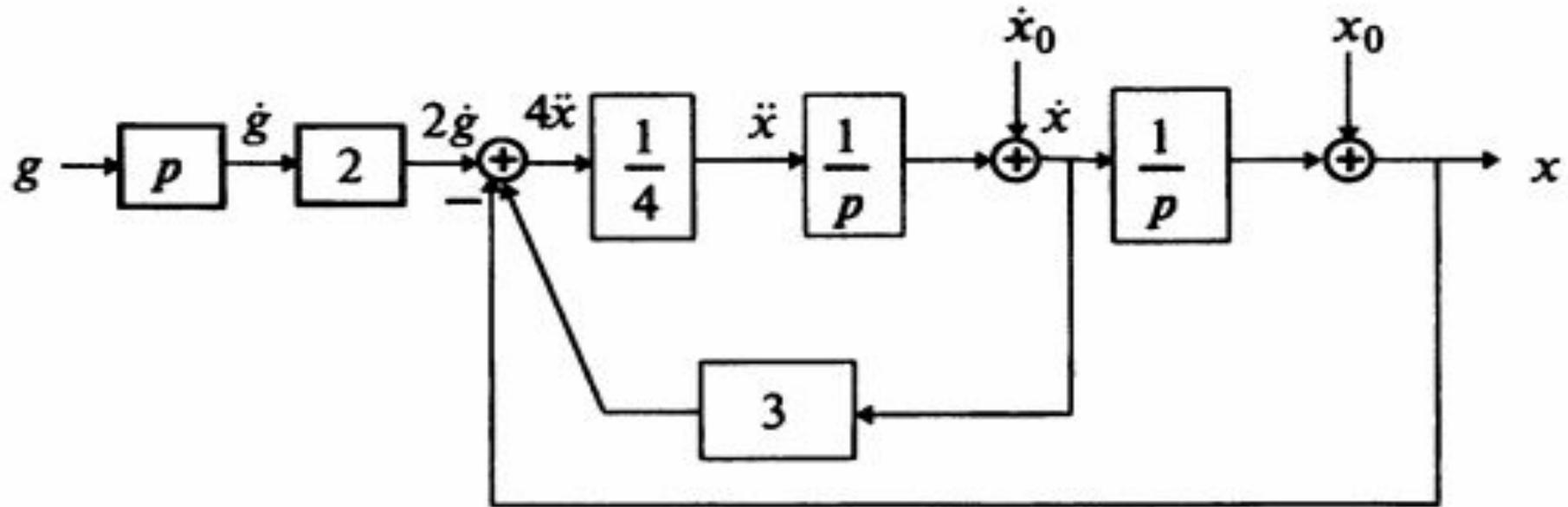
Операторная форма:  $px(t) = g(t)$



# Пример 1

- Построить структурную схему системы описываемой дифференциальным уравнением

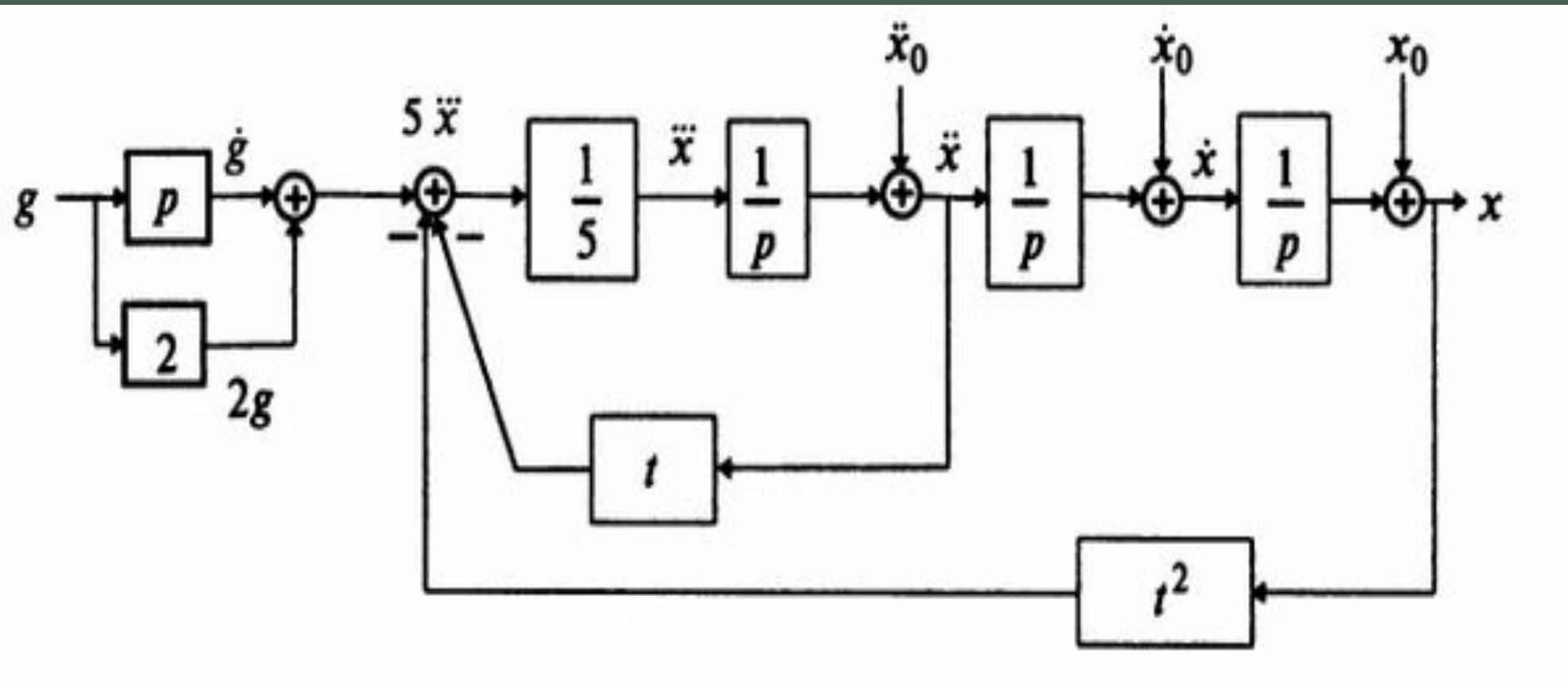
$$4\ddot{x} - 3\dot{x} + x = 2\dot{g} \text{ с нач. усл. } x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$



# Пример 2

- Построить структурную схему системы описываемой дифференциальным уравнением

$$5\ddot{x} + t\dot{x} + t^2x = \dot{g} + 2g \text{ с нач. усл. } x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \ddot{x}(0) = \ddot{x}_0$$



# Передачная функция

Преобразование Лапласа основано на двух следующих формулах:

1. прямого преобразования Лапласа

$$\hat{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

2. обратного преобразования Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{Pt} \hat{f}(p) dp$$

$$\dot{f}(t) = p\hat{f}(p) - f(0)$$

$p$  - комплексная переменная,  $t$  - параметр времени

Операция перехода от исходной функции  $y(t)$  к ее изображению  $Y(p)$  называется *прямым преобразованием Лапласа*. Обратное преобразование Лапласа - операция перехода от изображения функции к ее оригиналу.

*Передачной функцией*  $W(p)$  - называется отношение изображения по Лапласу выходной величины к изображению по Лапласу входной величины при нулевых начальных условиях.

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt = L[x(t)]$$
$$Y(p) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt = L[y(t)]$$

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

# Дифференциальные уравнения соединений

А. Последовательное соединение

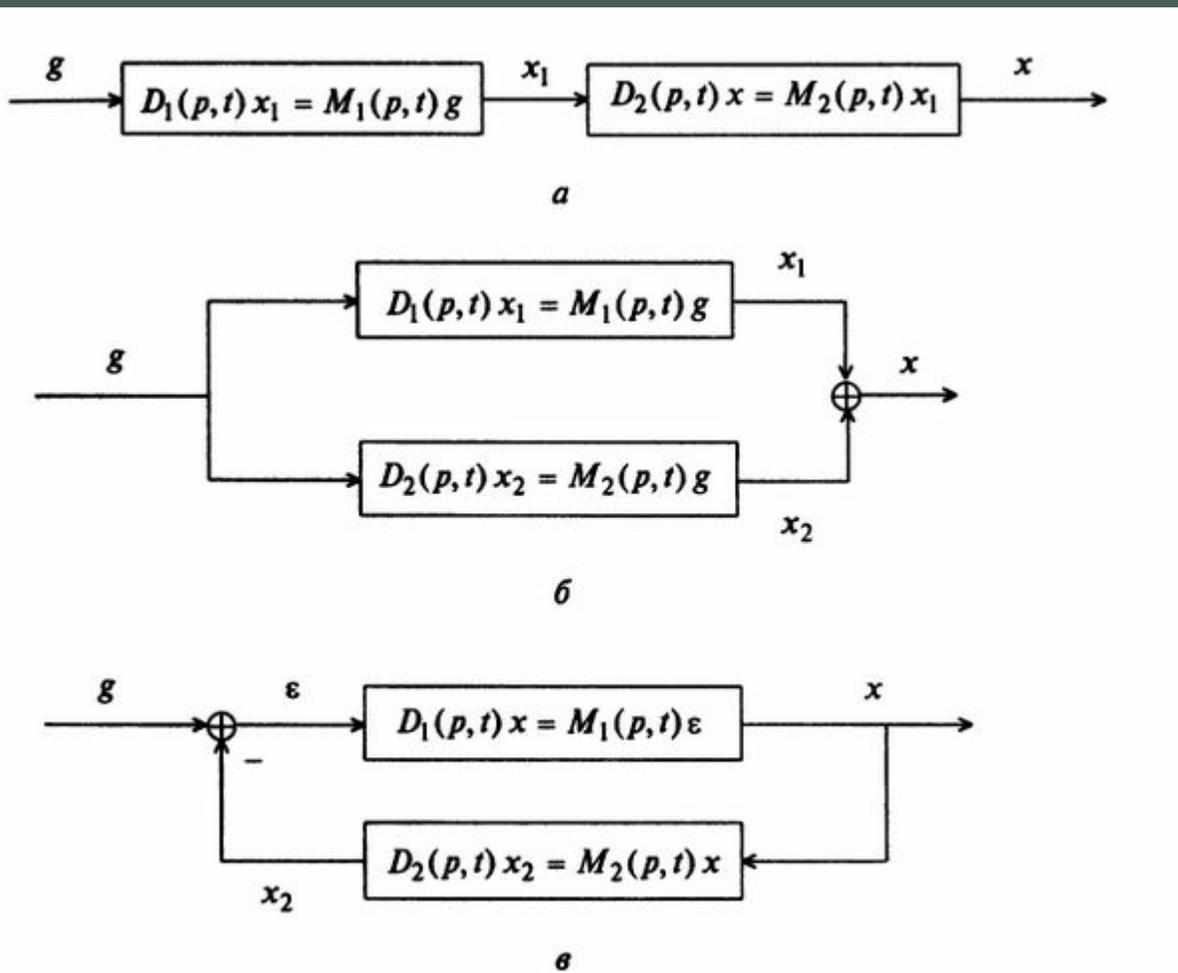
$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot \dots \cdot W_n(p)$$

Б. Параллельное соединение

$$W(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p)$$

В. Соединение с обратной связью

$$W(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p) \cdot W_{oc}(p)}$$



# Пример 3 Заданы входной и выходной сигналы:

$$x(t) = 1 + t - 0,5e^{-0,5t}$$

$$y(t) = 2 + e^{-0,2t}$$

- а) найти передаточную функцию  $W(p)$  всей системы;
- б) представить передаточную функцию в виде произведения элементарных динамических звеньев;

# Решение:

• а) Передаточная функция всей системы:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

$$X(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} - \frac{0,5}{p+0,5} = \frac{p^2 + 0,5 + p + 0,5 - 0,5^2}{p^2(p+0,5)}$$

$$X(p) = \frac{0,5p^2 + 1,5p + 0,5}{p^2(p+0,5)}$$

$$Y(p) = \frac{2}{p} + \frac{1}{p+0,2} = \frac{2p + 0,4 + p}{p(p+0,2)} = \frac{3p + 0,4}{p(p+0,2)}$$

$$W(p) = \frac{3p + 0,4}{p(p+0,2)} \cdot \frac{p^2(p+0,5)}{0,5p^2 + 1,5p + 0,5}$$

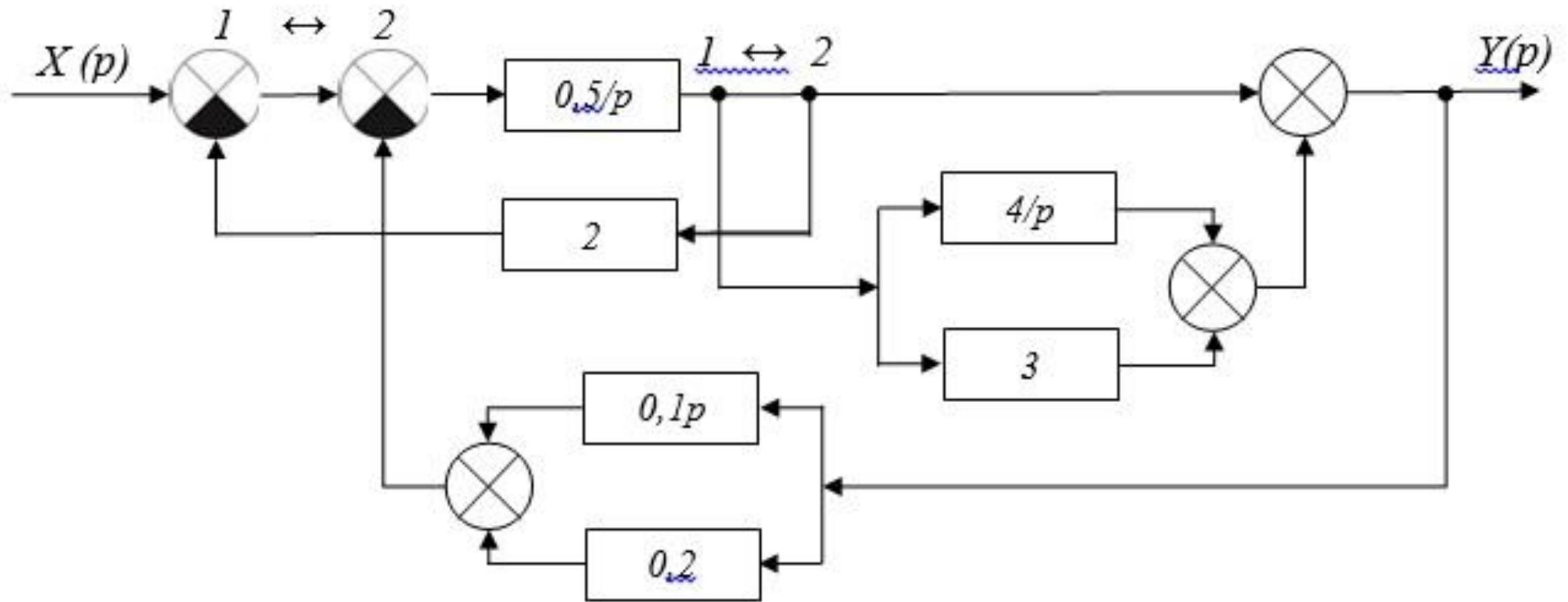
б) Передаточная функция в виде

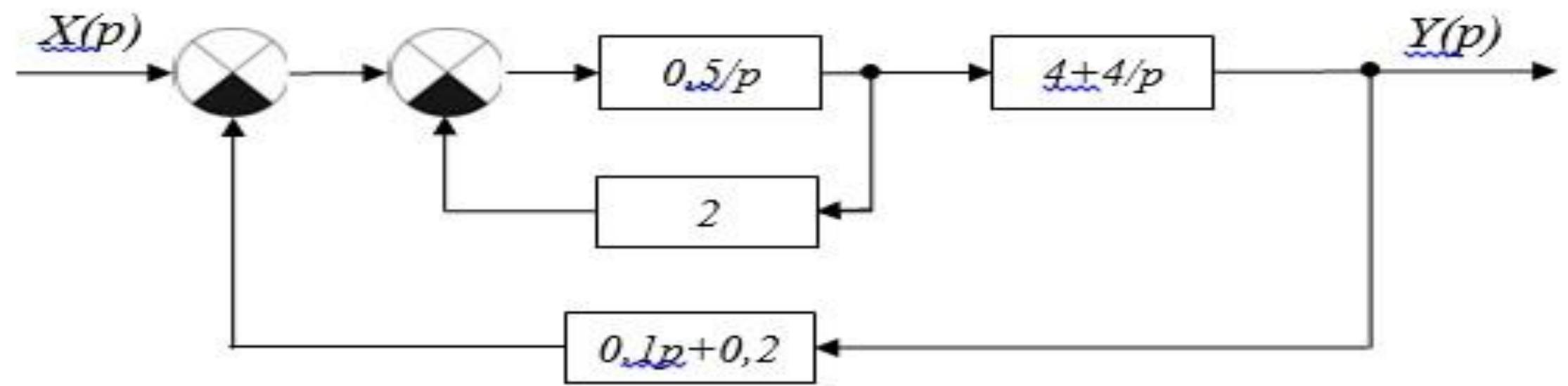
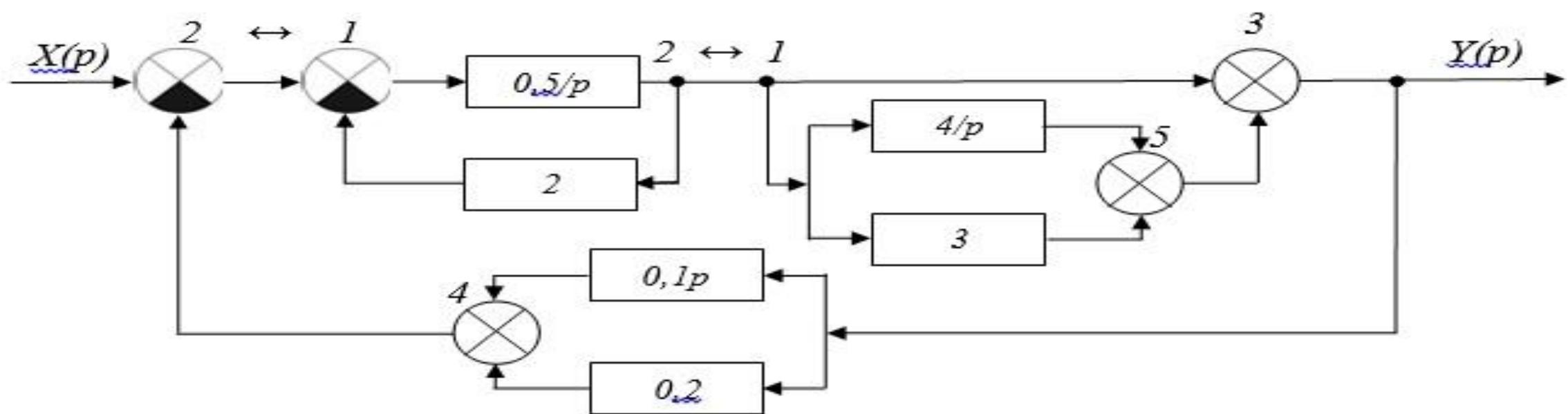
Произведения элементарных  
динамических звеньев:

$$W(p) = \frac{2p(7,5+1)}{5p+1} \cdot \frac{2p+1}{p^2+3p+1}$$



# Решение:





Передаточную функцию двух звеньев, соединенных встречно-параллельно с отрицательной обратной связью можно представить в виде следующего выражения:

$$W(p) = \frac{0,5/p}{1+0,5p-2}$$

Запишем передаточную функцию всей системы, представленной

$$\begin{aligned} W_{os}(p) &= \frac{(0,5/p+1) \cdot 4(p+1)/p}{1 + \frac{0,5p \cdot 4(p+1) \cdot 0,2(0,5p+1)}{(p+1)p}} = \frac{\frac{2(p+1)}{(p+1)p}}{1 + \frac{0,4(0,5p+1)}{p}} = \frac{2}{p+0,4(0,5p+1)} = \frac{2}{1,2p+0,4} = \\ &= \frac{2}{0,4(3p+1)} = \frac{5}{3p+1} \end{aligned}$$

Данная передаточная функция соответствует апериодическому звену с параметрами  $k=5$ ,  $T=3c$ .

$$\frac{k}{Tp+1}$$

# Литература

- Википедия \ \:Wikipedia.org
- Лекции «Основы теории управления» Ягьяева Ленура Тахировна Казанский национальный исследовательский технологический университет
- Теория управления в примерах и задачах Учеб. Пособие А.В. Пантелеев А.С. Бортакровский ФГУП Издательство «Высшая школа» с.583