

МАТЕМАТИКА

СТРОИТЕЛЬСТВО

БАКАЛАВРИАТ

1 семестр

2020

5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОГО АРГУМЕНТА

- 5.1 Определение производной
- 5.2 Геометрический смысл производной
- 5.3 Связь между непрерывностью и дифференцируемостью
- 5.4 Производные основных элементарных функций
- 5.5 Правила дифференцирования
- 5.6 Производная сложной функции
- 5.7 Производная обратной функции
- 5.8 Производная неявно заданной функции
- 5.9 Логарифмическое дифференцирование
- 5.10 Производная функции, заданной параметрически

5.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

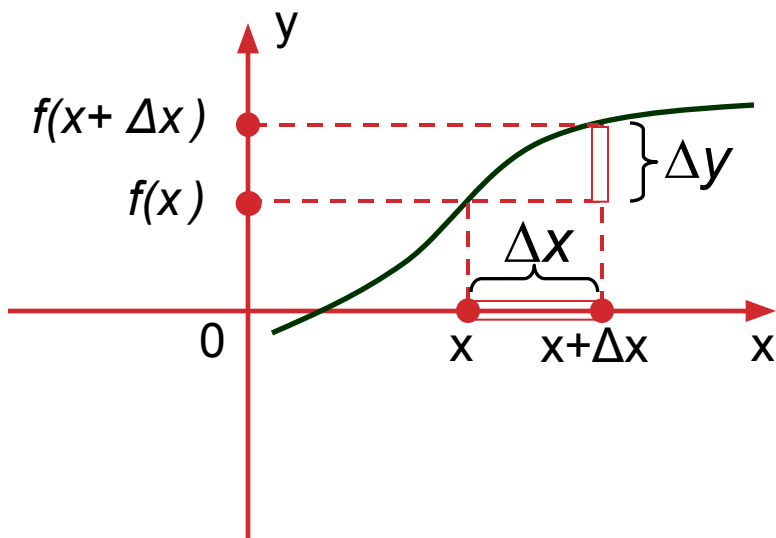
Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале $(a; b)$.

Аргументу x придадим некоторое приращение Δx :

$$x + \Delta x \in (a; b)$$

Найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$



Если существует предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

то его называют производной функции $y = f(x)$ и обозначают одним из символов:

$$y'; \quad f'(x); \quad \frac{dy}{dx}$$

5.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Итак, по определению:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a; b)$, называется **дифференцируемой** в этом интервале; операция нахождения производной функции называется **дифференцированием**.

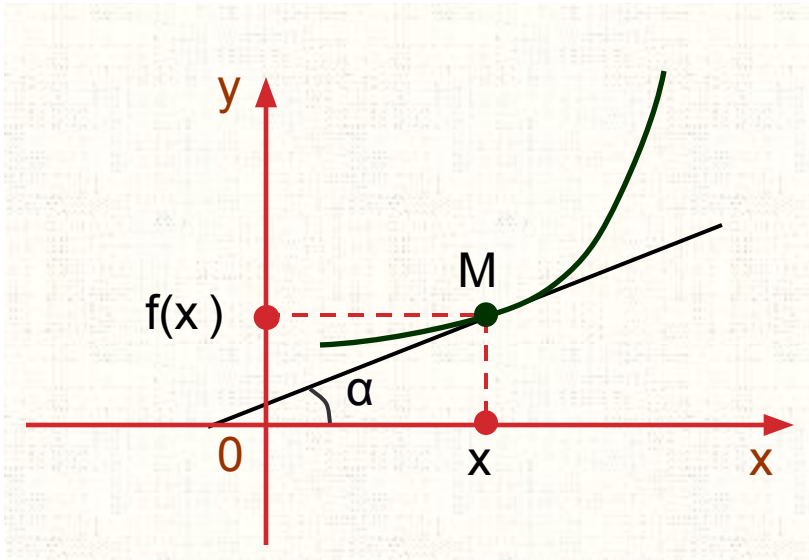
Значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначается одним из символов:

$$y'(x_0); \quad f'(x_0); \quad y'|_{x_0}$$

Если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то $f'(x)$ есть скорость протекания этого процесса – **физический смысл производной**.

5.2 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Возьмем на непрерывной кривой L две точки M и M_1 :



Через точки M и M_1 проведем **секущую** и обозначим через φ угол наклона секущей.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \\ &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ в силу непрерывности функции Δy также стремится к нулю, поэтому точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M , а секущая MM_1 переходит в **касательную**.

$$\varphi \rightarrow \alpha \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi = \alpha \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha$$

5.2 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = k = y'$$

Производная $f'(x)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x .

Если точка касания M имеет координаты $(x_0; y_0)$, угловой коэффициент касательной есть $k = f'(x_0)$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Уравнение касательной
Уравнение нормали

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется **нормалью** к кривой.

$f'(x_0)$

$$k_{\text{норм}} = -\frac{1}{k_{\text{кас}}} = -\frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

5.3 СВЯЗЬ МЕЖДУ НЕПРЕРЫВНОСТЬЮ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬЮ ФУНКЦИИ

Теорема

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней.

Доказательство:

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x , следовательно существует предел:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x) \Rightarrow$$

[где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$]

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \Rightarrow$$

Функция $y = f(x)$ – непрерывна.

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции

Обратное утверждение не верно: непрерывная функция может не иметь производной.

5.4 ПРОИЗВОДНЫЕ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Таблица производных (без вывода)

$$1. (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$2. (x)' = 1$$

$$3. \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$4. (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$5. (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$6. (e^x)' = e^x$$

$$7. (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$8. (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

5.4 ПРОИЗВОДНЫЕ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Таблица производных (без вывода)

$$9. (\sin x)' = \cos x$$

$$10. (\cos x)' = -\sin x$$

$$11. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$12. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$13. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$14. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$15. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$16. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

5.5 ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Пусть $u(x)$, $v(x)$ и $w(x)$ – дифференцируемые в некотором интервале $(a; b)$ функции, C – постоянная.

- $(C)' = 0$

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$

- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \Rightarrow \quad (C \cdot u)' = C \cdot u'$

- $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C} \\ \left(\frac{C}{v}\right)' = \frac{-C \cdot v'}{v^2} \end{array} \right.$$

5.6 ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть даны функции $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x .

Теорема

Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x в точке x ,
а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке u ,
то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную y'_x , которая находится по формуле:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько:

$$y = f(u); \quad u = \varphi(v); \quad v = g(x) \quad \Rightarrow \quad y = f(\varphi(g(x)))$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$$

5.6 ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Вычислить производную функции $y = \cos(\ln^{12} x)$

$$y' = (\cos(\ln^{12} x))' = -\sin(\ln^{12} x) \cdot (\ln^{12} x)' =$$

$$= -\sin(\ln^{12} x) \cdot 12 \ln^{11} x \cdot (\ln x)' =$$

$$= -\sin(\ln^{12} x) \cdot 12 \ln^{11} x \cdot \frac{1}{x}$$

5.7 ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть задана дифференцируемая функция $y = f(x)$ и $f'(x) \neq 0$, пусть существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$.

Из дифференцируемости $f(x)$ следует её непрерывность, а значит и непрерывность обратной функции, поэтому

$$\Delta x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta y \rightarrow 0$$

$$x'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x}$$

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

5.8 ПРОИЗВОДНАЯ НЕЯВНО ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ

Если функция задана уравнением $y = f(x)$, разрешенным относительно y , то говорят, что **функция задана в явном виде**.

Под **неявным заданием функции** понимают задание функции в виде уравнения не разрешенного относительно y :

$$F(x; y) = 0$$

Для нахождения производной неявно заданной функции необходимо продифференцировать уравнение по x , рассматривая при этом y как функцию от x , и полученное уравнение разрешить относительно производной.

$$[x^3 + y^3 - 3xy]' = [0]' \Rightarrow (x^3)' + (y^3)' - 3(xy)' = 0 \Rightarrow$$

$$\cancel{3}x^2 + \cancel{3}y^2 \cdot y' - \cancel{3}(x'y + xy') = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 \cdot y' - y - xy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

5.9 ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

В ряде случаев для нахождения производной целесообразно заданную функцию сначала **прологарифмировать**, а затем результат **продифференцировать**.

Такую операцию называют **логарифмическим дифференцированием**.

Типы функций, к которым применяют логарифмическое дифференцирование:

1) функция, построенная при помощи нескольких операций произведения и (или) деления

Например:

$$y = \frac{(x^3 + 4) \cdot \sqrt[3]{(2x - 3)^4} \cdot e^x}{(3x^2 + 5)^2}$$

2) **степенно-показательная** функция

Например:

$$y = (\sin(2x + 1))^{\cos(x^2 - 1)}$$

5.9 ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Для применения логарифмического дифференцирования необходимо вспомнить свойства логарифмов:

$$1) \quad \ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$2) \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$3) \quad \ln(a^b) = b \cdot \ln a$$

Найти производные следующих функций:

$$1) \quad y = \frac{(x^3 + 4) \cdot \sqrt[3]{(2x - 3)^4} \cdot e^x}{(3x^2 + 5)^2}$$

$$2) \quad y = (\sin(2x + 1))^{\cos(x^2 - 1)} \quad x =$$

5.10 ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически уравнениями: $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$

Выведем формулу для нахождения производной этой функции:

Пусть функция $x = f(t)$ имеет обратную $t = f^{-1}(x)$,

тогда $y = g(t) = g(f^{-1}(x))$ – сложная функция

$$\begin{aligned} y'_x &= (g(t))'_x = (g(f^{-1}(x)))'_x = (g(t))'_t \cdot (f^{-1}(x))'_x = \\ &= y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t} \end{aligned}$$

При выводе использовали:

- ✓ производную сложной функции
- ✓ производную обратной функции
- ✓ требование $x'_t \neq 0$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

5.10 ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Вычислить производные следующих функций, заданных параметрически:

$$1) \begin{cases} x = t^2 + 4t - 1 \\ y = \operatorname{arctg} 2t \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{1}{(t+2)(1+4t^2)}$$

$$\text{При } \begin{cases} x = e^t \cdot \cos t \\ y = e^t \cdot \sin t \end{cases}$$

$$t = \pi$$

$$y'_x(\pi) = 1$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ СЛЕДУЕТ...

