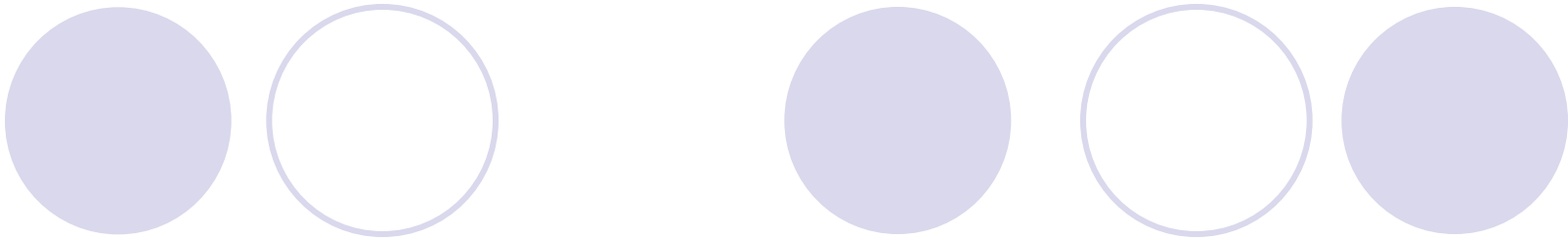


Дисциплина:

МАТЕМАТИКА

- Лектор: Ахкамова Юлия Абдулловна
- доцент кафедры математики и методики обучения математике ЮУрГГПУ
- akhkamovayua@cspu.ru



МАТЕМАТИКА ППИ

Лекция № 18 (продолжение).

**Основные формулы
комбинаторики. Классическое
определение вероятности.**

**Теоремы сложения и умножения
вероятностей.**





ВОПРОСЫ ЛЕКЦИИ:

- 3. Теоремы сложения вероятностей.
- 4. Условная вероятность. Теоремы умножения вероятностей.

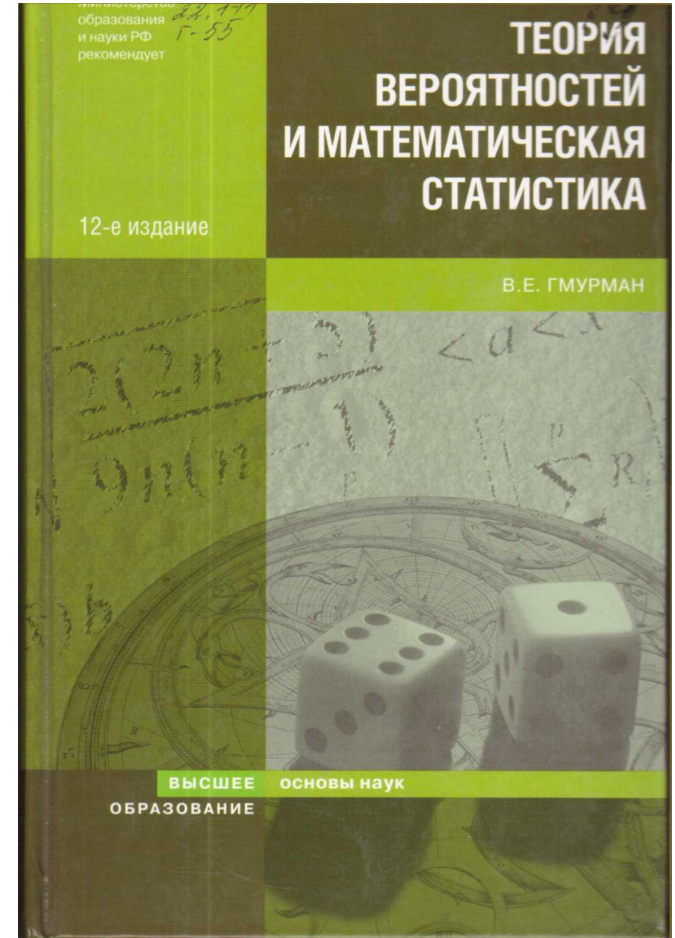


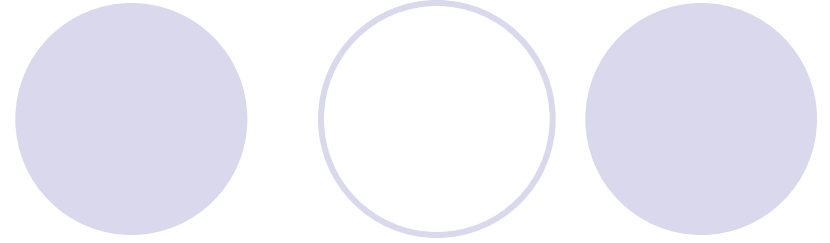
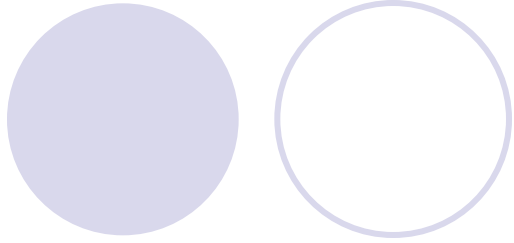
ЛИТЕРАТУРА

- Шолохович Ф.А. Высшая математика в кратком изложении.
- Баврин И.И. Высшая математика.
- Данко П.Е., Попов А.Г и др. Высшая математика в упражнениях и задачах, часть II.

ЛИТЕРАТУРА

- Гмурман В.Е.
Теория вероятностей
и математическая
статистика,
Высшее образование,
2006, с. 50-63.



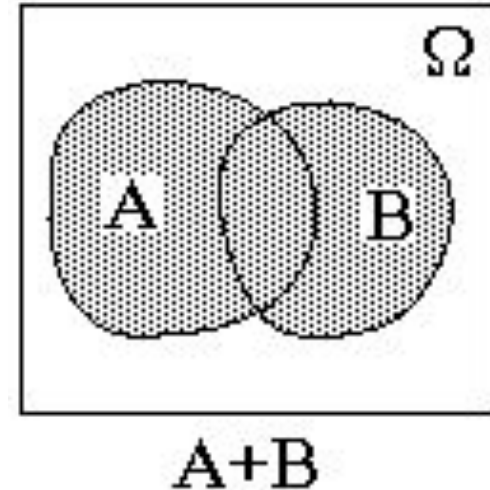


- Учебный вопрос.

Теоремы сложения вероятностей.

- **Суммой** нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении в результате испытания хотя бы одного из этих событий.

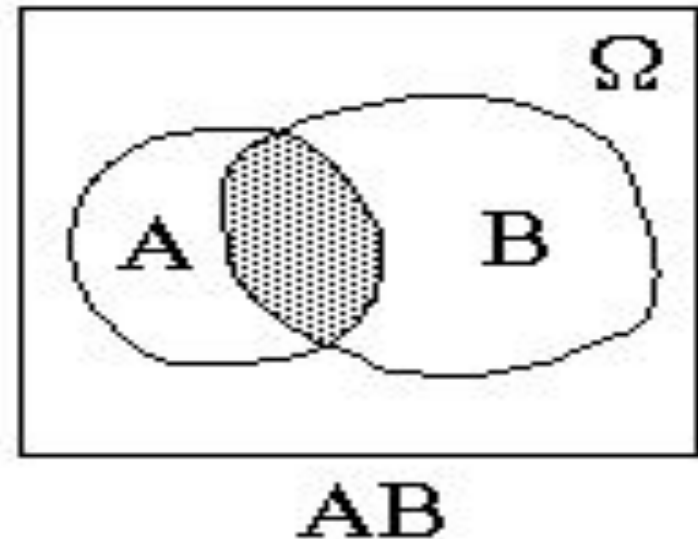
$$A + B, A \cup B, A \text{ или } B$$



- Пусть A - идет дождь, а B - идет снег, то $(A + B)$ - либо дождь, либо снег, либо дождь со снегом, т. е. осадки;
- Ω – пространство элементарных исходов испытания.

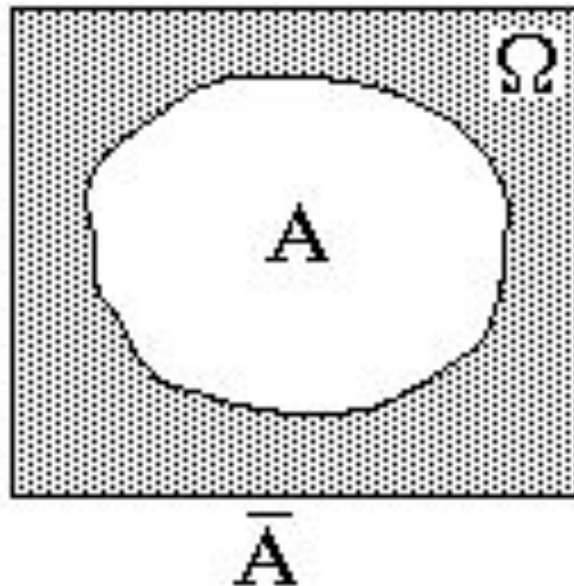
- **Произведением** нескольких событий называется событие, состоящее в совместном наступлении в результате испытания всех этих событий.

$$A \cdot B, A \cap B, A \text{ и } B$$

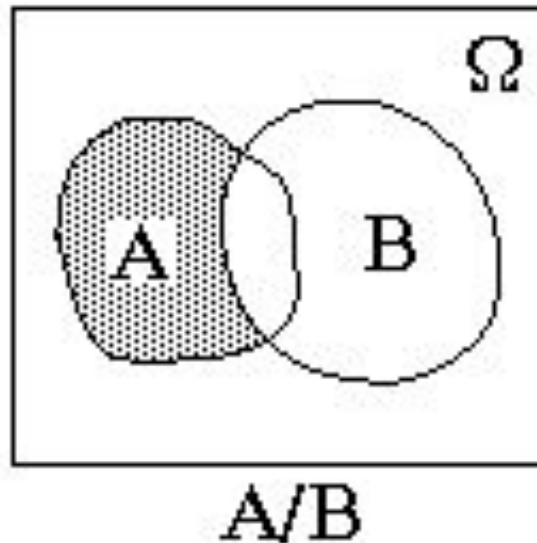


- Пусть события: A – «из колоды карт вынута дама», B – «из колоды карт вынута карта пиковой масти». Значит, $A \cdot B$ означает «вынута дама пик».

Противоположное событие $\bar{A}$ (по отношению к рассматриваемому событию A) – это событие, которое происходит, если не происходит событие A .



- **Разностью** событий A и B называется событие $A \setminus B$, которое состоит в том, что происходит событие A , но не происходит событие B .



- **Теорема 1 сложения вероятностей.**

Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

- **Следствие.**

Если события образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице.

$$P(A_1) + \dots + P(A_n) = 1.$$

В частности,

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

- **Пример.** Контрольная работа состоит из трех задач по алгебре и трех по геометрии. Вероятность правильно решить задачу по алгебре равна 0,8, а по геометрии - 0,6. Какова вероятность правильно решить все три задачи хотя бы по одному из предметов?
- Решение.



Обозначим через A событие – правильно решены все три задачи по алгебре; через B – правильно решены все три задачи по геометрии.

Тогда событие - правильно решены все три задачи хотя бы по одному из предметов – записывается как A + B.

Так как события A и B несовместны, то

$$\underline{P(A+B)} = P(A) + P(B).$$

Найдем вероятности событий A и B.

$$\underline{P(A)} = 0,8^3 = 0,512;$$

$$\underline{P(B)} = 0,6^3 = 0,216.$$

Следовательно, P(A+B) = 0,512 + 0,216 = 0,728.



- **Теорема 2 сложения вероятностей.**

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

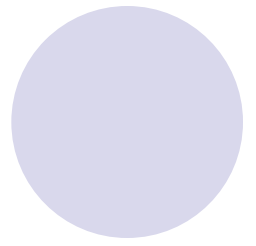
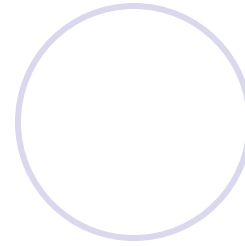
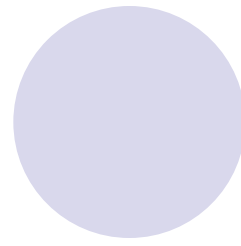
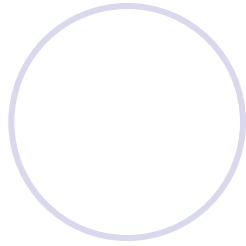
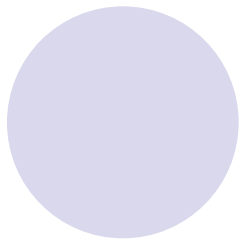
- **Расширенная теорема сложения**

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)-P(ABC).$$

- **Пример.** Из 25 студентов группы 10 человек занимаются сноубордом, 5 – горными лыжами, 5 – сноубордом и горными лыжами, а остальные – другими видами спорта. Какова вероятность того, что наудачу выбранный спортсмен занимается только горными лыжами или только сноубордом?
- **Решение.**

- Обозначим через A событие – выбранный спортсмен занимается только горными лыжами; через B – выбранный спортсмен занимается только сноубордом.
- Тогда событие - наудачу выбранный спортсмен занимается только горными лыжами или только сноубордом можно записать как $A + B$.
- Так как события A и B совместны, то $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.
- Найдем вероятности событий A , B и AB .
Итак, $P(A)=5/25=0,2$; $P(B)=10/25=0,4$;
 $P(AB)=5/25=0,2$.
- Следовательно, $P(A+B)=0,2+0,4-0,2=0,4$.

- **Определение.** Событие A называется **независимым** от события B , если вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет.
- **Определение.** Два события называются **зависимыми**, если появление одного из них изменяет вероятность появления другого.



- Учебный вопрос.

Условная вероятность.

**Теоремы умножения
вероятностей.**

- 
- **Определение.** Вероятность события B , вычисленная в предположении, что событие A произошло, называется **условной вероятностью** события B .
 - Обозначается $P_A(B)$ или $P(B/A)$.
 - По определению

$$P(B / A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

- **Теорема умножения вероятностей.**

Вероятность появления двух событий равна произведению вероятности наступления одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие произошло

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) \quad \text{или}$$

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B)$$

- В случае произведения нескольких зависимых событий вероятность равна произведению одного из них на условные вероятности всех остальных при условии, что все предыдущие события уже совершились

$$P(A_1 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) \dots P(A_n/A_1A_2 \dots A_{n-1})$$

- Если события независимые, то **теорема умножения вероятностей** принимает вид:

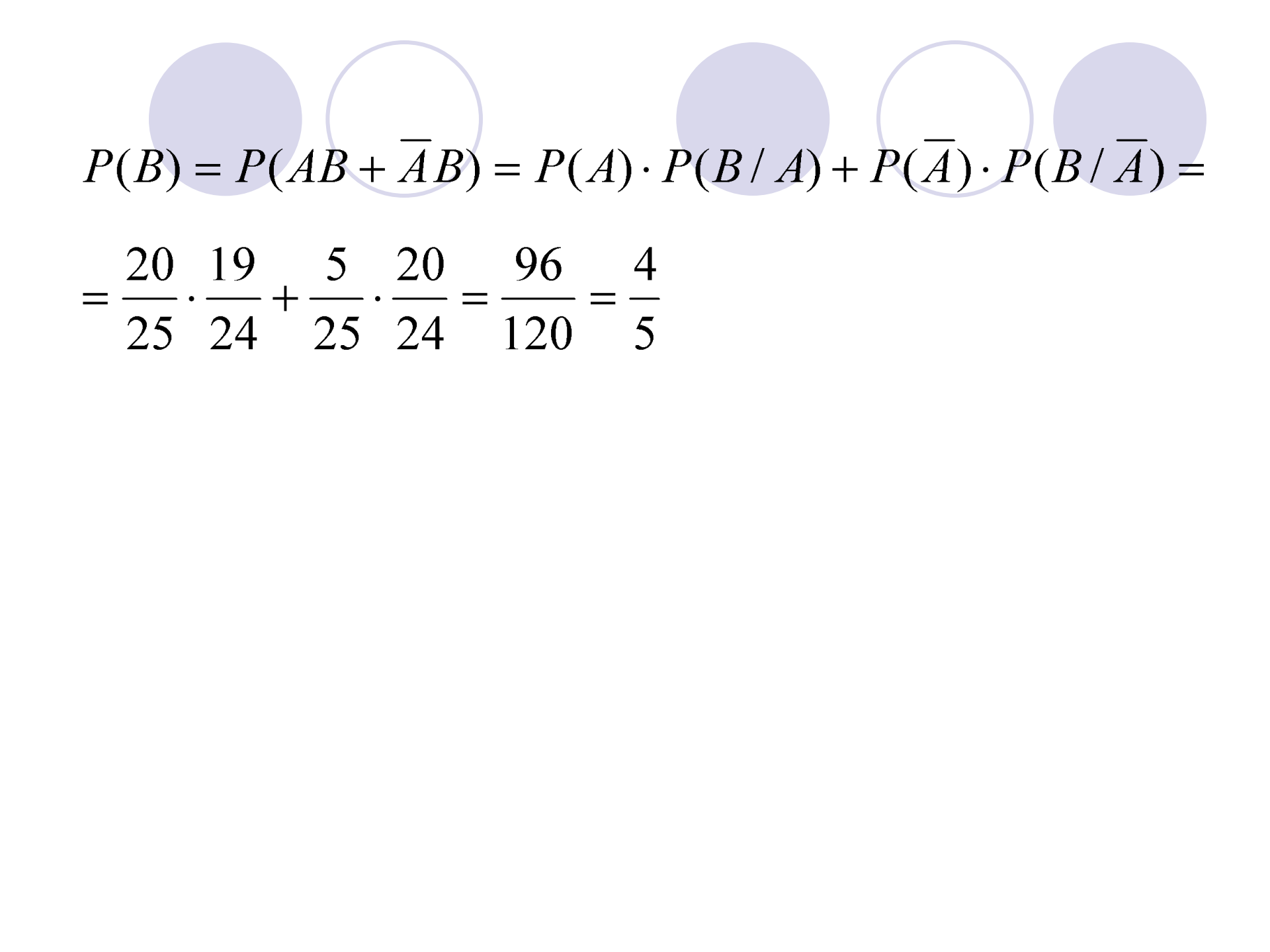
$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

- **Пример.** Из 25 билетов студент выучил 20. Какова вероятность того, что он вытянет счастливый билет, который знает, если он вытягивает билет:
а) первым; б) вторым.

- **Решение.**

- а) $P = 20/25 = 4/5$.
- б) обозначим события:

А – первый студент вынул «счастливый» билет,
В – второй студент вынул «счастливый» билет.


$$\begin{aligned} P(B) &= P(AB + \bar{A}B) = P(A) \cdot P(B / A) + P(\bar{A}) \cdot P(B / \bar{A}) = \\ &= \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} + \frac{5}{25} \cdot \frac{20}{24} = \frac{96}{120} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Вероятность появления хотя бы одного события

Пусть $A_1, \dots, A_n$ – независимые события.
Событие A – наступило хотя бы одно из A_i ,
 $A = A_1 + \dots + A_n$.

Если A_i несовместны, то
 $P(A) = P(A_1 + \dots + A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$.

Если A_i совместны, то рассмотрим
противоположное событие $\bar{A}$ – ни одно из A_i не
наступило, $\bar{A} = \bar{A}_1 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n$

Тогда

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n)$$

- **Пример.** Пусть S — множество всех исходов при трехкратном бросании монеты. Обозначим через A событие «в первый раз выпал герб», через B событие «выпало не менее двух гербов». Найдите вероятности событий $P(A)$, $P(B)$ и $P(AB)$, если все исходы бросаний равновероятны. Независимы ли эти события?
- **Решение.**

Общее число исходов $n = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Число исходов, благоприятствующих событию A,
 $m = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$.

Итак, $P(A) = 4/8 = 0,5$.

Исходы, благоприятствующие событию B –
(Г,Г,Р); (Г,Р,Г); (Р,Г,Г); (Г,Г,Г), следовательно, $m = 4$.
Таким образом, $P(B) = 4/8 = 0,5$.

Исходы, благоприятствующие событию AB –
(Г,Г,Р); (Г,Р,Г); (Г,Г,Г), следовательно, $m = 3$.
Таким образом, $P(AB) = 3/8$.

Если события A и B независимы, то выполняется равенство

$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. Имеем $P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$ и это не совпадает с вероятностью события AB, значит, события A и B зависимы.

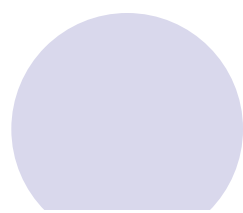
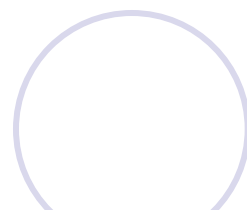
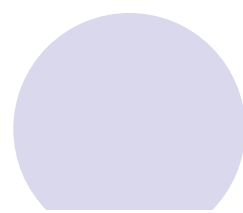
- **Пример.** Два стрелка независимо друг от друга стреляют в цель. Вероятность попадания в цель первого стрелка 0,9, второго - 0,75. Какова вероятность того, что хотя бы один стрелок попадет в цель?
- **Решение.**

Обозначим через A_i событие – i -ый стрелок попадет в цель;

противоположное событие $\overline{A_i}$ – i -ый стрелок не попадет в цель, $i = 1, 2$.

Тогда событие - хотя бы один стрелок попадет в цель

$$A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2 + A_1 \cdot A_2$$



$$P(\underline{A_1} \cdot \bar{A_2} + \bar{A_1} \cdot A_2 + A_1 \cdot A_2) = P(A_1) P(\bar{A_2}) + P(\bar{A_1}) P(A_2) + P(A_1) P(A_2).$$

По условию задачи $P(\underline{A_1}) = 0,9$; $P(A_2) = 0,75$.

$$\text{Тогда } P(\bar{A_1}) = 1 - 0,9 = 0,1;$$

$$P(\bar{A_2}) = 1 - 0,75 = 0,25.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} P(\underline{A_1} \cdot \bar{A_2} + \bar{A_1} \cdot A_2 + A_1 \cdot A_2) &= 0,9 \cdot 0,25 + 0,1 \cdot 0,75 + 0,9 \cdot 0,75 = \\ &= 0,225 + 0,075 + 0,675 = 0,975. \end{aligned}$$

$$\text{Или } P(\underline{A_1}) = 1 - P(\bar{A_1}) P(\bar{A_2}) = 1 - 0,1 \cdot 0,25 = 1 - 0,025 = 0,975.$$



Задание на самоподготовку

- **Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика, Высшее образование, 2009, с. 30-51.**