

Обратная матрица.

- Квадратная матрица порядка n называется **невырожденной**, если её определитель не равен нулю.

$$\Delta_n = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

- В противном случае ($\det A = 0$) матрица A называется **вырожденной**.

- Если A - квадратная матрица, то **обратной** по отношению к матрице A называется матрица, которая будучи умноженной на A (как справа, так и слева) даёт единичную матрицу.

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

- Если обратная матрица существует, то матрица A называется **обратимой**.
- Операция вычисления обратной матрицы при условии, что она существует, называется **обращением матрицы**.

Теорема.

Для того, чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной ($\det A \neq 0$).

Нахождение обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{(A^*)^T}{\det A}$$

где

$$(A^*)^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

присоединенная матрица

Чтобы найти обратную матрицу:

- ✓ 1. находят $\det A$ и убеждаются, что $\det A \neq 0$;
- ✓ 2. находят алгебраические дополнения всех элементов матрицы A и записывают новую матрицу A^* ;
- ✓ 3. транспонируют новую матрицу $(A^*)^T$
- ✓ 4. умножают полученную матрицу на $\frac{1}{\det A}$

Пример 1.

Найти матрицу, обратную к матрице A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

1) находим определитель матрицы A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists A^{-1}$$

2) находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы А:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -14$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

записываем новую матрицу: $A^* = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 3 \\ -14 & -2 & 6 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

3) транспонируем эту матрицу:

$$(A^*)^T = \begin{pmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

4) умножим полученную матрицу на $\frac{1}{\det A}$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{7}{14} & -1 & \frac{7}{14} \\ \frac{6}{14} & -\frac{2}{14} & -\frac{2}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{6}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Проверка: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{7}{14} & -1 & \frac{7}{14} \\ \frac{6}{14} & -\frac{2}{14} & -\frac{2}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{6}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}$

Решение матричных уравнений.

$$A \cdot X = B$$

$$X \cdot A = B$$

$$\boxed{A}^{-1} \cdot \boxed{A} \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

E

$$X \cdot \boxed{A} \cdot \boxed{A}^{-1} = B \cdot A^{-1}$$

E

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X \cdot E = B \cdot A^{-1}$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = B \cdot A^{-1}$$

Пример 2.

Найти матрицу X : $A \cdot X \cdot C = B$

$$A \cdot X \cdot C = B$$

$$\begin{matrix} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ A^{-1} & A & X & C & C^{-1} & \\ E & & & E & & \end{matrix} = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$$

$$E \cdot X \cdot E = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$$

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$$

Пример 3. Найти матрицу X :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

A

B

$$A \cdot X = B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$1) \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists A^{-1}$$

$$2) \quad A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$3) \quad (A^*)^T = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$4) \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^*)^T = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$5) \quad X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Ответ:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Пример 4. Показать, что $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Пусть $ABX = C$

$$(AB)X = C$$

$$(AB)^{-1} \cdot (AB) \cdot X = (AB)^{-1} C$$

$$X = (AB)^{-1} C$$

$$X \cdot C^{-1} = (AB)^{-1} C C^{-1}$$

$$XC^{-1} = (AB)^{-1}$$

$$A(BX) = C$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot (BX) = A^{-1} \cdot C$$

$$BX = A^{-1} \cdot C$$

$$B^{-1} \cdot B \cdot X = B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot C$$

$$X = B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot C$$

$$X \cdot C^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot C C^{-1}$$

$$XC^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

Получили, что

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$